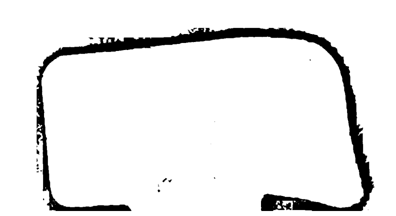




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Zeitschrift

für

mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen.

(Zugleich Organ der Sektionen für math. und naturw. Unterricht in den Versammlungen der Philologen, Naturforscher, Seminar- und Volksschul-Lehrer.)

Unter Mitwirkung
der Herren Prof. Dr. Bauer in Karlsruhe, Univ.-Prof. Dr. Frischauf in Graz, Dr. Günther, Prof. a. d. techn. Hochschule in München, Geh.-R. Dr. Hauck, Prof. an der techn. Hochschule in Berlin, Gewerbeschul-Dir. Dr. Holzmüller in Hagen, Realschul.-Prof. Dr. Lieber in Stettin, Gymnas.-Obl. v. Lühmann in Königsberg i/N., Regier.-Rat und Dir. em. Dr. Pisko und Dr. Pick in Wien, Prof. Schierling in Lübeck

herausgegeben
von

J. C. V. Hoffmann.



Achtzehnter Jahrgang.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1887.



Inhaltsverzeichnis des 18. Bandes.

I. **Abhandlungen** (grössere Aufsätze), **kleinere Mitteilungen** (Sprech- und Diskussions-Saal) **und Aufgaben-Repertorium.)**

A) Organisation des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

B) Specielle Methodik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer.

Materialien zur Verwertung beim Unterricht.

1. Mathematik.

a) Allgemeines.

b) Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

c) Arithmetik.

2) Naturwissenschaften.

a) Physik und Chemie.

b) Naturbeschreibung.

α) Zoologie vacat.

β) Botanik vacat.

γ) Mineralogie (mit Geognosie und Geologie).

c) Geographie.

α) Allgemeine (politische).

β) mathematische (inclus. Astronomie).

C. Sprech- und Diskussions-Saal.

a) Allgemeines.

b) Arithmetik.

c) Geometrie (inclus. Trigon. u. Stereom.).

d) Math. Physik.

e) Naturwissenschaften (inclus. Geographie).

D) Beiträge zum Aufgaben-Repertorium.

a) Auflösungen.

b) Neue Aufgaben.

c) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften.

Genauere Nachweise über das Aufgaben-Repertorium.

Nr. der Aufgabe	Gattung d. Aufg.	Aufgaben-steller	Band Heft Seite der Aufgabe	Der Auflösungen			Seite d. Aufl.
				Zahl	Art	Verfasser	
596	arithm.	Bermann	XVII_4, 287	4	R.	Bld., Bckg., Emm., Kok., Mein., Siev., Stl., Vllh., Brm., End, Nis., Fhrm., Schl.	30
597	Zinsess. Rchn.	Szimányi	„	1	„	Brm., Bckg., Emm., End, Fhrm., Hod., Mein., Siev., Stl., Szm.	31
598	„	„	„	1	„	Brm., Emm., End, Fhrm., Hod., Mein., Siev., Stl, Szm.	32
599	stereom.	Haag	„	1	„	Bckg., Emm., Hg.	„
600	gm.	Holzmüller	XVII_4, 288	1	gm.	Boy., Bckg., Emm., Fhrm., Hlzm., Ko., Mein., Schmt., Siev., Stm., Stl., Th	33
601	„	Schlömilch	„	1	R.	Brm., Emm., Fhrm., Hlm., Mein., Schl., Schmt., Siev., Stgm., Stl.	„

Nr. der Aufgabe	Gattung d. Aufg.	Aufgaben-steller	Band Heft Seite der Aufgabe	Der Auflösungen			Seite der Aufl.
				Zahl	Art	Verfasser	
653	Hyperbel	Kukujay	XVIII₁, 37	1	R.	Brm., Bey., Emm., Fhrm., Hod., Jmr., Kky., Lngr., Mior., Nis., Saut., Stm., Stgm., Stl., Taub.	411
654	geom.	Sporer	„	2	gm.	Emm., Fhrm., Hlm., Hod., Lngr., Spo., Stgm., Stl., Schmt., Brm.	„
655	„	Fuhrmann	„	2	„	Fhrm., Lngr., Emm.	412
656	„	Kober	„	5	gm. u. R.	Emm., Fhrm., Hod., Lngr., Wcht., Hlm., Nis., Saut., Stl., Schmt., Bey., Schls., Stgm., Mior., Ko.	444
657	gm. Konstr.	Emmerich	„	2	„	Emm., Hlm., Lngr., Mior., Saut., Schmt., Stgm., Stl., Bey., Fhrm., Hod., Wcht.	445
658	Gleich.	„	XVIII₂, 132	1	R.	Emm., End, Fhrm., Lngr., Mior., Schms., Stl.	498
659	arithm.	Brockmann	„	1	„	Hod., Lngr., Stgm., Stl.	„
660	Reihenth.	Schlömilch	„	1	„	Emm., Schmt., Schms., Sim.	499
661	„	Weinmeister	„	2	„	Bey., End, Fhrm., Hod., Lngr., Nis., Schms., Sim., Stl., Wnm., Emm., Siev., Schmt.	500
	(s. die Bemerkung in Jahrg. XIX, Heft 1, S. 32.)						
662	gm.	Szimányi	„	2	gm. u. R.	Brm., Bey., Emm., Fhrm., Nis., Stgm., Stl., Ssm., End, Hod., Lngr., Schmt., Siev.	501
663	„	Sporer	„	1	„	Bey., Emm., Fhrm., Nis., Spo., Schmt.	502
664	„	Schlömilch	„	3	„	Ad., Brm., Bey., Emm., Hlm., Ko., Lngr., Mior., Rlf., Wcht., Sim., Stl., Taub., Trm., Hod., Stgm., Klw., Nis., Schmt.	„
665	Broc. Krs.	Stoll	XVIII₂, 132	2	gm. u. R.	Emm., Fhrm., Stgm., Stl.	503
666	gm.	Kober	XVIII₂, 133	1	gm.	Bey., Emm., Fhrm., Hlm., Hod., Ko., Lngr., Mior., Stgm., Taub., Wcht., Schmt.	501
667	stereom.	Emmerich	„	2	R.	Brm., Emm., Fhrm., Hod., Bey., Lngr., Schmt., Stl.	„
668	„	v. Schaewen	„	1	gm. u. R.	Brm., Emm., Hod., Lngr., Stgm., Schw., Fhrm., Schmt.	592

Nr. der Aufgabe	Gattung d. Aufg.	Aufgaben-steller.	Band Heft Seite der Aufgabe	Der Auflösungen			Seite d. Aufl.
				Zahl	Art	Verfasser	
669	arithm.	Szimányi	XVIII₂, 197	3	R.	Sim., Stl., Emm., Fhrm., Wcht., Dre., Mein., Mior., Nis., Szm.	593
670	sphär. Trig.	Emmerich	"	2	"	Fhrm., Mein., Emm., Fhrm., Stl., Hod.	594
671	stercom.	Thieme	"	1	gm.	Brm., Dre., Emm., End, Fhrm., Mior., Nis., Stgm., Stl., Vllh., Wcht., Zg.	"
672	"	Schlömilch	"	ohne Lösung, siehe jedoch 595			
673	"	Weinmeister	"	3	gm. u. R.	Dre., Mior., Ra., Stgm., Vllh., Wcht., Wnm., Mein., Emm., Hod.	595
674	gm.	Simon	XVIII₃, 198	1	gm.	Brm., Dre., Emm., Mein., Mior., Nis., Sim., Stgm., Vllh., Hod., Mey.	597
675	"	Sporer	"	1	"	Brm., Emm., Fhrm., Gla., Mein., Mior., Spo., Stgm., Vllh., Brckm., Hod.	"
676	Brocard-scher Kreis	Emmerich	"	ohne Lösung, siehe jedoch 598			
677	Brocard-scher Kreis	Artzt	"	3	gm. u. R.	Ar., Emm., Fhrm., Mein., Stgm.	598
678	Brocard-scher Kreis	Fuhrmann	"	2	gm.	"	600

Abkürzungen der Namen der Mitarbeiter am Aufg.-Repert.

Ad. = Adami
Ar. = Artzt
Bau = Baur
Brm. = Bermann
Byl. = Beyel
Bey. = Beyens
Bld. = Blind
Brckm. = Brockmann
Bckg. = Bücking
Dre. = Drees
Emm. = Emmerich
End. = End
Fschr. = v. Fischer-Benzon
Flschr. = Fleischhauer
Fhrm. = Fuhrmann
Gkmp. = Gallenkamp
Gla. = Glaser
Hg. = Haag
Hal. = Haluschka
Hlm. = Helm
Hod. = Hodum
Hlzm. = Holzmüller
Ide = Ide
Jmr. = v. Jettmar
Khl. = Kiehl
Klw. = Klewe
Ko. = Kober
Kok. = Kokott
Kky. = Kukujay
Lngr. = Lengauer
Lbth. = Liebetruth
Lck. = Lucke
Lhm. = v. Lühmann
Luk. = Lukácsi
Mein. = Meinel
Mr. = Meyer-Halle
Mey. = Meyer-Dresden
Mior. = v. Miorini
Nis. = Niseteo
Pgr. = Piepgras
Ra. = Raschig
Rlf. = Rulf
Sdtl. = Sadtler
Saut. = Sauter
Schw. = v. Schaewen
Schlg. = Schlegel
Schl. = Schlömilch
Schmt. = Schmidt-Spremberg
Schmz. = Schmitz
Schlz. = Schulze
Schmch. = Schumacher
Sie. = Sievers
Sim. = Simon
Spo. = Sporer
Stm. = Stammer
Stgm. = Stegemann
Stl. = Stoll
Szm. = Szimányi
Taub. = Tauberth
Th. = Thieme
Trm. = Treumann
Unb. = Unbekannt
Va. = Valta
Vllh. = Vollhering
Wcht. = Wachter
Web. = Weber
Wdm. = Weidenmüller
Wnm. = Weinmeister
Wlf. = Woelfer
Zg. = Züge

In Summa 70.

E. Lehrmittel.

II. Litterarische Berichte.

A) Recensionen und Anzeigen.*)

1) Mathematik.

a) Allgemeines (Compendien, Sammelwerke, Geschichte u. dergl.).

b) Arithmetik.

c) Geometrie.

*) Die Rezensenten sind in Parenthese beigesetzt.

d) Geschichtliches.

2) Naturwissenschaften.

a) Allgemeines vacat.

b) Physik.

c) Chemie.

d) Naturbeschreibung (Naturgeschichte).

α) Zoologie.

β) Botanik.

γ) Mineralogie (mit Geognosie und Geologie).

e) Geographie.

α) allgemeine.

Alphabetisches Rezensionen-Verzeichnis zu diesem Bande.

(Vergl. die Fufsnote zu dem ähnl. 1. Verzeichnis Bd. XV, S. XVI.)

Verfasser	Abgekürzter Titel des Werks	Angezeigt von	Anf.-Seite der Anzeige.
Augustin	Käferbuch	Ludwig	521
Bardey	Anleitung zur Aufl. von Gleichungen	H.	521
„	Quadrat. Gleichungen. 2. Aufl.	H.	523
Berlepsch	Alpen. 5. Aufl.	„	211
Blater	Multiplikations- u. Divisions-Tafeln	Günther	208
„	Tafeln der Viertelquadrate etc.	Günther	448
Cauchy	Algebraische Analysis (Itzigsohn)	H.	206
Dammer	Chemisches Handwörterbuch	Vogel	366
Diekmann	Geometrische Propädeutik	v. Fischer-Benzon	364
Erler	Kegelschnitte (synthetisch)	H	523
Fiedler	Analyt. Geometrie. 5. Aufl.	„	521
Frankenbach	Trigonometrie	Günther	134
Frischauf	Kugelfunktionen	„	286
Gallien	Lehrbuch der Mathematik	H.	209
Gandtner-Junghans	Geometr. Aufgabensammlung I. 2. Aufl. II. 3. „	„	208
Geistbeck	Weltverkehr	Schmitz	135
Gerstendörfer	In's Erzgebirge; eine Donaufahrt	H.	455
Günther	Geophysik	Bermann	40
Hoffmann (Gust.)	Geometr. Analysis (Aufgaben-Samml.)	v. Fischer-B.	362
Holle	Botanischer Leitfaden	Ludwig	295
Holzmüller	Stereometrisches Zeichnen	H.	515
Jacob-Jacobson	Geometr. geschichtl. merkw. Aufgabensammlung	„	396
Jordan	Astronomische Zeit- und Ortsbestimmung	Günther	283

B) Programmschau.

C) Bibliographie.

(Ref. Dr. Ackermann in Cassel.)

III. Pädagogische Zeitung.

A) Berichte von Versammlungen (bezw. Sitzungen) und über Jubiläen und Feste.

B) Abdrücke von Aufsätzen aus Zeitschriften und Zeitungen, welche besondere Lehrgegenstände in den höhern Schulen behandeln, mit besonderer Berücksichtigung des Wettstreits zwischen Formal- und Real-Gymnasien.

C) Verschiedenes.

D) Personal-Nachrichten (Nekrologe, Ernennungen etc.)

E) Frage- und Antwortkasten.

F) Berichtigungen.

G) Bekanntmachungen.

H) Geschäftliches.

Briefkasten.

Alphabetisches Verzeichnis der Mitarbeiter an diesem Bande.

(Ohne die Mitarbeiter am Aufgaben-Repertorium.)

Name	Wohnort	Name	Wohnort
Ackermann	Cassel	**Rapp**	Ulm
Bermann	Liegnitz	**Rhode** (†)	Lübben
Franke	Schleusingen	**Richter**	Wandsbeck
v. Fischer-Benzon	Kiel	**Schlegel**	Hagen
Günther	München	**Schlömilch**	Dresden
Handl	Czernowitz	**Schmidt**	Stuttgart
Hauck	Berlin	**Schmitz**	Neuburg a. D.
Hefs	München	**Schubring**	Erfurt
Hodum	Stafsfurt	**Simon**	Berlin
Holzmüller	Hagen	**Stammer**	Düsseldorf
Höfler	Wien	**Stegemann**	Prenzlau
Kircher	Meiningen	**Suur**	Ülzen
Kahle	Göttingen	**Tiebe**	Stettin
Liebetruth	Zerbst	**Thieme**	Posen
Lucke	Zerbst	**Troschel**	Berlin
Ludwig	Greiz	**Vogel**	Memmingen
Meyer	Halle a. S.	**Vogt**	Breslau
Meyer	Freiburg, Schl.	**Weinmeister**	Tharand
Morgenstern	Göttingen	**Wertheim**	Frankfurt a. M.
Müller	Fulda	**Wimmenauer**	Moers
Proescholdt	Meiningen.	**Worpitzky**	Berlin
		(Y.)	(Z.)

Figuren-Verzeichnis.

Netz, Oberfläche und Kubikinhalt des Cylinderstutzes und der Kugel.

Von Dr. Alois Höfler,
Professor am k. k. Theresianischen Gymnasium in Wien.

(Mit 10 Fig. i. T.)

Die im Folgenden gestellten und gelösten Aufgaben stehen zu einander insofern in Beziehung, als sie einerseits gröfstenteils Anwendungen von Eigenschaften der **„Sinuskurve“**, namentlich von deren Flächeninhalt bilden — während anderseits die Berechnung dieses Inhaltes selbst, sowie die der Mantelfläche und des Kubikinhaltes des Cylinderstutzes und der Oberfläche eines unter III. näher zu besprechenden Kugelnetzes verschiedene Anwendungen des **„Cavalierischen Principes“** darstellen.

Letzteres Princip sagt bekanntlich, dafs zwei $\left\{\begin{matrix}\text{Körper}\\ \text{Flächen}\end{matrix}\right\}$ A_1 und A_2 gleichen Inhalt haben, wenn jede beliebige aus einer Schar paralleler $\left\{\begin{matrix}\text{Ebenen}\\ \text{Geraden}\end{matrix}\right\}$ in A_1 und A_2 gleich grofse Schnitte erzeugt. Dieses Princip läfst sich dahin erweitern, dafs sich die Inhalte von A_1 und A_2 verhalten wie $1 : m$, wenn sich die Gröfsen der zugehörigen Schnitte wie $1 : m$ verhalten; ferner, dafs sich die Inhalte von A_1 und A_2 wie $1 : m \cdot n$ verhalten, wenn überdies die Schnitte in A_2 durchweg n-mal so weit voneinander abstehen, als die zugehörigen in A_1. Ist dabei $n = \frac{1}{m}$, d. h. sind die Schnitte in A_2 ebenso vielmal so klein (so grofs), als sie weiter (weniger weit) voneinander abstehen als in A_1, so sind die Inhalte von A_1 und A_2 wieder gleich; dies gilt auch dann noch, wenn m und n von Schichte zu Schichte veränderlich sind, falls nur immer $m \cdot n = 1$ — eine

Erweiterung des Principes, von der wir in § 2 Anwendung zu machen haben werden.*)

Im Hinblicke auf die didaktische Verwendung, welche ich in dieser kleinen Arbeit wünsche, und über welche am Schlusse noch einige Bemerkungen folgen mögen, sind die Begriffsbestimmungen und Entwickelungen so gegeben, daſs bloſs planimetrische und stereometrische Kenntnisse vorausgesetzt, dagegen weder goniometrische Symbole (bis auf § 8 und einige der Zusätze) noch Kurvengleichungen verwendet werden. Zur raschen Orientierung des Lehrers aber sind diese, sowie diejenigen Integrationen u. dgl., welche für das im Texte Gesagte den kürzesten Ausdruck bieten, in den Anmerkungen unter dem Texte beigegeben.

I.

§ 1. Als **„einfache Sinuskurve"** bezeichnen wir eine Kurve AmB (Fig. 1), deren allgemeiner Punkt m die Eigenschaft hat, daſs wenn AMD ein Kreis vom Radius 1 ist, und Ap = dem Bogen $\widehat{AM}$ genommen wird, die auf Ap Senkrechte pm gleich der auf OA senkrechten Halbsehne („Sinusstrecke") PM ist. — In der

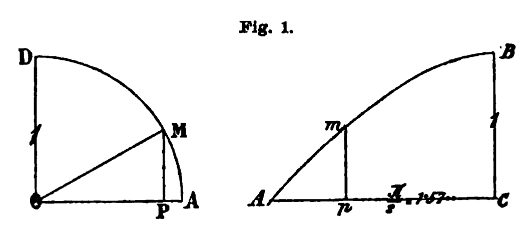


Fig. 1.

*) Der analytische Ausdruck des Cavalierischen Principes in seiner einfachsten Form besteht darin, daſs wenn

$$f(x) = F(x), \text{ auch } \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx;$$

ferner für die Erweiterung des Principes darin, daſs wenn

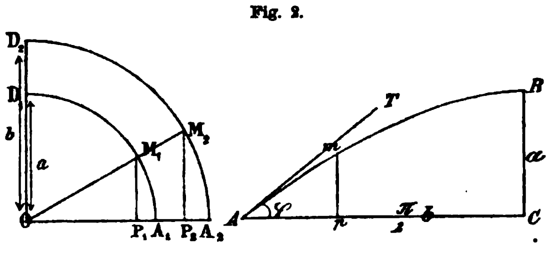
$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = A_1 \text{ ist, } \int_{x_0}^{x} m f(x)\cdot n\,dx = mn\cdot A_1$$

wird — wobei $f(x)$ und $F(x)$ die Maſszahlen von $\left\{\begin{matrix}\text{Flächen}\\ \text{Längen}\end{matrix}\right\}$, dx die Maſszahl ihres Abstandes, m und n unbenannte Zahlen bedeuten, die entweder von x unabhängig, oder jede für sich derart von x abhängig sind, daſs ihr Produkt wieder konstant (— in dem oben zuletzt erwähnten Falle = 1) ist.

einfachen Sinuskurve ist die „Höhe“ $CB = 1$, die „Basis“ $AC = \frac{\pi}{2} = 1{,}57..$ (also nahezu gleich $1^1/_2$).

Als **„allgemeine Sinuskurve“** bezeichnen wir eine Kurve AmB (Fig. 2), deren allgemeiner Punkt m die Eigenschaft hat, dafs wenn $A_1M_1D_1$ ein Kreis vom Radius a und $A_2M_2D_2$ ein Kreis vom Radius b ist, zu $Ap = \widehat{A_2M_2}$ die Senkrechte $pm = P_1M_1$ gehört. — In der allgemeinen Sinuskurve ist die „Höhe“ $CB = a$, die „Basis“ $AC = \frac{\pi}{2}b$.

Fig. 2.



Werden unendlich viele Kurventeile, welche mit AmB (Fig. 2) kongruent sind, so aneinander gefügt, dafs die nächste Fortsetzung über B hinaus in Bezug auf BC symmetrisch, die nächste Fortsetzung über A hinaus in Bezug auf A centrisch zu AmB liegt, u. s. f. (vgl. Fig. 4, S. 5), so entsteht eine **unbegrenzte Sinuskurve***) oder „Wellenlinie“, von welcher der Kurventeil AmB ein „Quadrant“ ist.

Nach diesen Definitionen lassen sich beliebig viele Punkte von Sinuskurven oder Wellenlinien **konstruieren**, und durch freie Verbindung dieser Punkte erhält man in beliebiger Annäherung jene Kurven selbst. Besonders empfiehlt es sich, denjenigen Punkt p zu benützen, für welchen $Ap = \frac{1}{3}AC$ und $pm = \frac{1}{2}CB$ ist (wie sich daraus ergiebt, dafs, sobald $\sphericalangle AOM = 30^0$, das Dreieck POM die Hälfte eines gleichseitigen ist).

---

*) Die Gleichungen der Sinuskurven sind

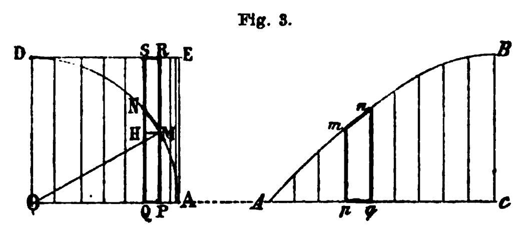
für die einfache: $y = \sin x$,

für die allgemeine: $y = a \sin \frac{x}{b}$,

aus welcher letzteren speciell für $\frac{x}{b} = \frac{\pi}{2}$ folgt: $x = \frac{\pi}{2}b$, $y = a$.

§ 2. Um nun zunächst den **Flächeninhalt** der einfachen Sinuskurve zu finden, denken wir uns sowohl den Kreisquadranten AD (Fig. 3), als auch die ebensolange Basis AC der Sinuskurve in die nämliche Anzahl gleicher Teile geteilt, so dafs z. B. $pq =$ MN. Durch die Teilungspunkte legen wir die auf AC, resp. AO, Senkrechten pm,

Fig. 3.



qn.... und PR = QS = ⋯ = OA = 1. — War nun die Zahl der Teile so grofs genommen worden, dafs annähernd der Streifen $mpqn$ als Rechteck von der Höhe mp und der Basis pq betrachtet werden darf, so ist sein Flächeninhalt **gleich** dem des Streifens RPQS. Denn bezeichnen wir den Exponenten des Verhältnisses MP : MO mit y,*) so ist einerseits gemäfs der in § 1 gegebenen Definition der Sinuskurve auch $mp : CB = y$ (oder, weil $CB = 1$, auch $mp = y$), anderseits wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MPO und MHN auch MH : MN $= y$; und somit ist in dem Streifen $mpqn$ die Dimension mp y-mal so klein, zugleich aber die Dimension pq y-mal so grofs als die entsprechenden Dimensionen des Streifens RPQS. — Da nun dies für alle Streifen gilt, und die Streifen des Quadrates AODE zusammen den Flächeninhalt $\overline{AO}^2 = 1$ besitzen, so ist nach dem eingangs angeführten erweiterten Cavalierischen Principe

*) y ist hienach sin $\widehat{AM}$. — Der Grundgedanke der obigen Quadratur der Sinuskurve ist der, dafs einerseits die Längen der in gleichen Abständen aufeinander folgenden Ordinaten der Sinuskurve, wie auch anderseits die Projektionen der aufeinander folgenden gleichen Bogenelemente des Kreises — und somit auch die Breiten der zu diesen Bogenelementen gehörigen Streifen des dem Kreisquadranten umschriebenen Quadrates nach dem „Sinusgesetze“ zunehmen. — In Integralen lautet die Quadratur der Sinuskurven:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}b} a \sin \frac{x}{b}\,dx = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \xi\,d\xi = ab.$$

auch der Flächeninhalt der einfachen Sinuskurve gleich 1 Flächeneinheit.

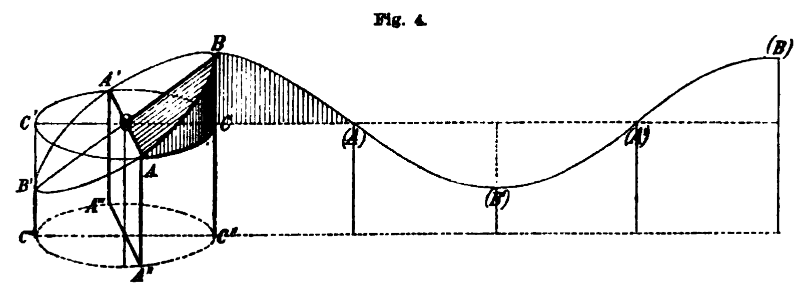
Da ferner die Dimensionen der allgemeinen Sinuskurve a-mal, resp. b-mal so grofs sind, als die der einfachen, so folgt, dafs der Flächeninhalt der allgemeinen Sinuskurve gleich ist $a \cdot b$ Flächeneinheiten.

Über den „Winkel an der Spitze der Sinuskurve" siehe § 8 Seite 13.

II.

§ 3. Durch einen geraden Kreiscylinder (Fig. 4) sei ein zur Axe senkrechter Schnitt $A''C''A'''C'''$ und ein zur Axe schiefer Schnitt $ABA'B'$ gelegt; der durch diese beiden Ebenen und den zwischen ihnen liegenden Teil des Cylindermantels be-

Fig. 4.



grenzte Körper heifse kurz **„Cylinderstutz"**. Sind der senkrechte Schnitt $ACA'C'$ und der schiefe Schnitt $ABA'B'$ so gelegt, dafs ihre Mittelpunkte O zusammenfallen, so werden durch diese beiden Ebenen, den zu ihnen senkrechten Axenschnitt $BB'C''C'$ und den zwischen ihnen liegenden Teil des Cylindermantels vier kongruente, resp. symmetrische Körper begrenzt, welche in Ermangelung eines kürzeren und bezeichnenderen Namens „Cylinderstutz-Quadranten" heifsen mögen; ein solcher ist $ABCOA$ (Fig. 4, S. 5 und Fig. 5, S. 7). Sein „Radius" $OA = OC$ sei $= b$, seine „Höhe" $CB = a$.

Es läfst sich zunächst zeigen, dafs die krumme **Begrenzung** des in eine Ebene aufgerollten Mantels des Cylinderstutzes die **allgemeine Sinuskurve** mit der Basis $\frac{\pi}{2} b$ und der Höhe a ist; d. h. zwischen der Länge von Ap und pm besteht die Beziehung, dafs wenn die Punkte A, p, C, B in Fig. 5 zur Deckung gebracht werden mit den gleich bezeichneten

Punkten der Fig. 2 (Seite 3), sich auch die allgemeinen Punkte *m* und *m* dieser Figuren decken. Gemäfs der Entstehung der Sinuskurve in Fig. 2 ist nämlich die $mp = M_1P_1$ im Verhältnisse $a:b$ kleiner als die M_2P_2, und ebenso auch wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke mpP und BCO in Fig. 5 mp im Verhältnisse $a:b$ kleiner als die pP; diese pP ist aber wegen der Kongruenz, die zwischen dem Kreisquadranten ApC, resp. dem Bogen Ap (Fig. 5) und dem Quadranten $A_2M_2D_2$, resp. dem Bogen A_2M_2 (Fig. 2) besteht, gleich der Senkrechten M_2P_2, woraus die Gleichheit der Senkrechten mp und mp in Fig. 2 und 5 folgt.*)

Das **Netz** eines Cylinderstutzes vom Radius b und der Axenlänge h, bei welchem die längste Seitenlinie $h + a$, die kürzeste $h - a$ sein soll, wird hienach konstruiert, indem man die Seite $2b\pi$ des abgewickelt gedachten Mantels in 4 Teile je $= \frac{\pi}{2} b$ teilt, und über diesen Teilen als Basis Sinuskurven von der Höhe a so konstruiert, dafs die vier Kurven zusammen eine „Wellenlinie“ mit zwei halben „Bergen“ und einem „Thal“ bilden. Im zusammengeklebten Netze bilden dann diese Ränder eine ebene Kurve (Ellipse).

---

*) Ist die Länge des (als Kreisbogen oder als geradgestreckt gedachten) $Ap = x$, die von $pm = y$ (Fig. 5), so ist

$$pm : Pp = a : b, \text{ woraus: } pm = \frac{a}{b} Pp.$$

Ferner:
$$Pp = Op \sin \frac{\widehat{Ap}}{Op} = b \sin \frac{x}{b}$$

und daher
$$pm = \frac{a}{b} \cdot b \sin \frac{x}{b} = a \sin \frac{x}{b},$$

also
$$y = a \sin \frac{x}{b}$$

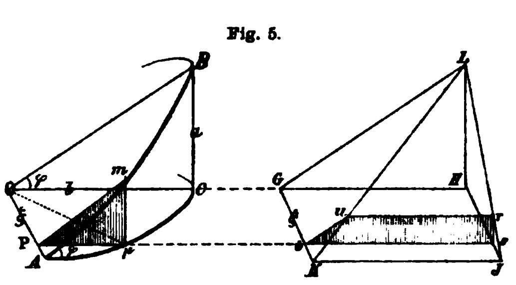
d. i. wieder die in Anm. zu § 1 aufgestellte Gleichung der Sinuskurve (Wellenlinie), worin beim Mantel des Cylinderstutz-Quadranten für x die Werte von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$, dagegen beim Mantel des ganzen Cylinderstutzes die von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ zu nehmen sind.

Die Beziehungen des schiefen Schnittes eines geraden Kreiscylinders zur Wellenlinie verwendet Helmholtz (Theorie der Tonempfindungen IV. Auflage, 1877, S. 141) zu einer hübschen Veranschaulichung der Lissajous'schen Kurven.

§ 4. Der **Flächeninhalt** des Stückes ABC des Cylindermantels ist auf Grund von § 2 einfach $= a \cdot b$, d. h. gleich dem doppelten Inhalt des Dreieckes OCB.

§ 5. Um den **Kubikinhalt** des Cylinderstutz-Quadranten $ABCOA$ zu ermitteln, vergleichen wir letzteren mit einer quadratischen Pyramide $GHIKL$ (Fig. 5) von der Basiskante b und der Höhe a, in welcher der Fufspunkt der Höhe in die Ecke H fällt. Diese Pyramide denken wir uns so aufgestellt, dafs die Kante GH in die Verlängerung der OC fällt, ferner GK gleichstimmig parallel mit OA, und die Höhe HL gleichstimmig parallel mit CB ist. Eine in einem beliebigen Abstande $OP = \xi$ von der Ebene OCB zu dieser parallele Ebene schneidet den Körper $ABCOA$ in dem Dreiecke Ppm, und hinreichend erweitert die Pyramide in dem Trapeze $rstu$. Die Flächeninhalte Δ und T dieser Figuren sind gegeben durch:

Fig. 5.



$$\Delta = \frac{1}{2} Pp \cdot pm,$$

worin $Pp = \sqrt{b^2 - \xi^2}$ und $pm = \frac{a}{b} Pp = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \xi^2}$,

weshalb $\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - \xi^2} \cdot \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \xi^2} = \frac{1}{2} \frac{a}{b} (b^2 - \xi^2)$.

Ferner: $$T = \frac{1}{2} (st + ru) \cdot rs,$$

worin $st = b$, $ru = \xi$ (wie sich am leichtesten ergibt, wenn man sich durch ru einen Schnitt parallel zur Basis $GHIK$ geführt denkt, der auch quadratisch sein wird, und worin die zur Kante GK parallele Seite $= \xi$ wäre); endlich $rs = \frac{a}{b} (b - \xi)$ aus der Proportion $Is : rs = IH : LH$ oder $(b - \xi) : rs = b : a$. Daher ist

$$T = \frac{1}{2} (b + \xi) \cdot \frac{a}{b} (b - \xi) = \frac{1}{2} \frac{a}{b} (b^2 - \xi^2).$$

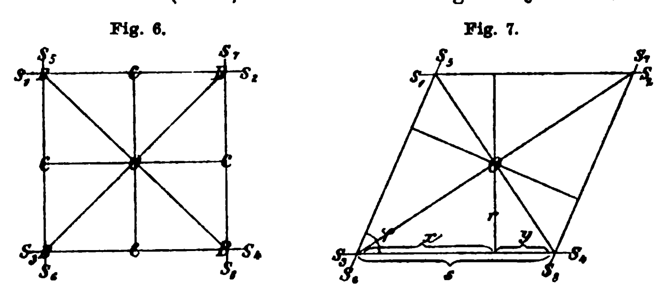
Es sind somit die Schnitte Δ und T flächengleich; und weil dies wegen des beliebig anzunehmenden ξ für alle paral-

lelen Schnitte gilt, so haben nach dem eingangs angeführten Cavalierischen Prinzipe in seiner einfachsten Form die beiden Körper gleichen Kubikinhalt. Den der Pyramide können wir direkt berechnen, er ist $\frac{1}{3} b^2 \cdot a$; und somit ist auch der Kubikinhalt des Cylinderstutz-Quadranten $= \frac{1}{3} ab^2$, d. i. gleich dem Drittel des ihm umbeschriebenen quadratischen Prisma.*)

Es verdient bemerkt zu werden, dafs sowohl die Mantelfläche als der Kubikinhalt des Cylinderstutz-Quadranten frei von dem Faktor π sind, was bei der Krümmung desselben auf den ersten Blick überraschen mag — übrigens nur ein Anologon zu den bekannten Theoremen von der *„lunula Hippokratis"*, der Quadratur der Parabel u. dgl. bildet.

Zusatz. Die auf die Mantelfläche und den Kubikinhalt des ganzen Cylinderstutzes bezüglichen Aufgaben lassen sich auch ohne Kenntnis der Resultate von §§ 4 und 5 lösen, da die oberhalb und unterhalb des Schnittes $ACA'C'$ liegenden Teile der Mantelfläche und des Rauminhaltes infolge ihrer Kongruenz sich ausgleichen.

Nützlich ist dagegen obige Kubatur für die Lösung der Aufgabe: Wie grofs ist der Raum J, den zwei grade Kreiscylinder vom Radius r mit einander rechtwinkelig schneidenden Axen gemeinsam haben? (Reidt, Stereometrische Aufgaben § 32. Nr. 1339).



Es seien in Fig. 6 $S_1 S_2$, $S_3 S_4$, $S_5 S_6$, $S_7 S_8$ die Linien, in welchen die die Axen beider Cylinder enthaltenden Mittelebene des Körpers J die Mantelflächen der Cylinder schneidet; das durch sie eingeschlossene Quadrat

*) In Integralform lautet die obige Kubatur unter Beibehaltung der Bedeutung von Δ, ξ, a, b:

$$K = \int_0^b \Delta d\xi = \frac{1}{2} \frac{a}{b} \int_0^b (b^2 - \xi^2)\, d\xi = \frac{1}{2} \frac{a}{b} \left[b^3 - \frac{b^3}{3} \right] = \frac{1}{3} ab^2.$$

heiſse E. Legen wir senkrecht auf E vier Ebenen, welche die Eckenhalbmesser BB von E und seine Seitenhalbmesser CC (d. h. die Cylinderaxen) enthalten: so zerfällt J in 16 Cylinderstutz-Quadranten, in denen $a = b = r$. Somit ist $J = 16 \cdot \frac{1}{3} r^2 \cdot r = \frac{16}{3} r^3$, d. i. $= \frac{2}{3}$ eines Würfels von der Seite $2r$.

Letzteres Resultat liefert das Cavalieri'sche Prinzip auch direkt, indem ein zu E im Abstande ξ parallel geführter Schnitt in J ein Quadrat bildet, dessen halbe Seite man unschwer $= \sqrt{r^2 - \xi^2}$ findet, und dessen Fläche somit $= 4r^2 - 4\xi^2$ ist. Dieses Resultat leitet uns an, als Vergleichungskörper einen Würfel von der Seite $2r$ zu wählen, aus welchem eine Doppelpyramide herausgeschnitten ist, deren Scheitel im Würfelcentrum liegt, und deren Basen die zu E parallelen Würfelflächen sind. Der Inhalt dieses Vergleichungskörpers ergiebt sich $= (2r)^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} (2r)^2 \cdot r = \frac{16}{3} r^3$. (Letztere Methode bildet ein Analogon zu der bekannten Methode, den Inhalt der Kugel durch Vergleichung mit einem Cylinder *minus* einem Kegel zu bestimmen.)

Erweitert man schlieſslich obige Aufgabe dahin, daſs die beiden Cylinderaxen nicht aufeinander senkrecht stehen, sondern miteinander den Winkel φ (Fig. 7) bilden, so ist der Schnitt E nicht mehr ein Quadrat, sondern ein Rhombus mit der Seite $s = 2r \cdot \operatorname{cosec} \varphi$. — Deshalb ist auch der Inhalt des Raumes J jetzt $\operatorname{cosec} \varphi$ mal so groſs als früher, also $J = \frac{16}{3} r^3 \operatorname{cosec} \varphi$. — Man kann dies wieder entweder durch die letzterwähnte direkte Anwendung des Cavalierischen Prinzipes finden, wobei auch der im Abstande ξ von E geführte Schnitt $\operatorname{cosec} \varphi$ mal gröſser ist, als früher; — oder man bedenkt, daſs von den früher betrachteten 16 Cylinderstutz-Quadranten jetzt acht die Höhe x (Fig. 7), acht die Höhe y haben, wonach

$$J = 8 \cdot \frac{1}{3} r^2 x + 8 \cdot \frac{1}{3} r^2 y = \frac{8}{3} r^2 (x + y) = \frac{8}{3} r^2 s$$

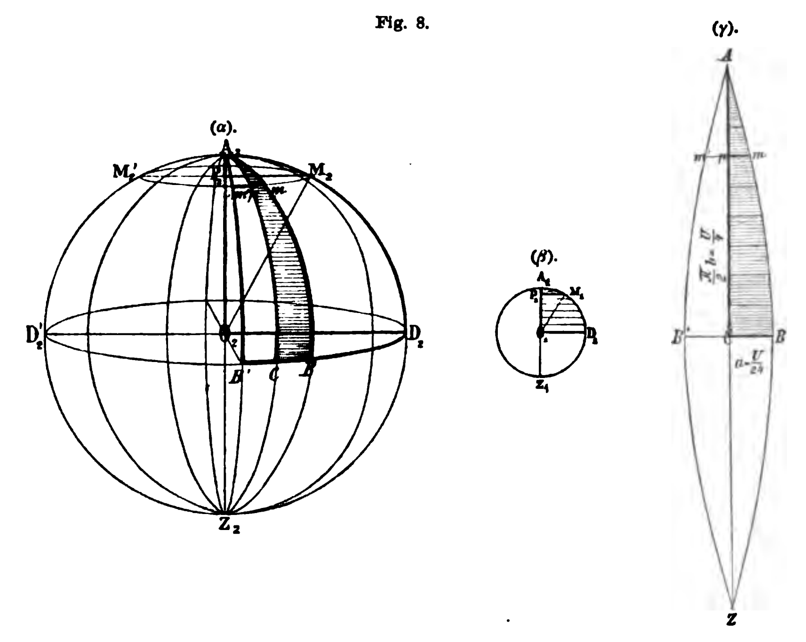
$$= \frac{8}{3} r^2 \cdot 2r \operatorname{cosec} \varphi = \frac{16}{3} r^3 \operatorname{cosec} \varphi.$$

III.

§ 6. Die Konstruktion eines ebenen **Kugelnetzes** ist wegen der doppelten Krümmung der Kugelfläche nur in Annäherungen möglich, indem nur die Krümmung nach einer Dimension durch Biegen des Netzes beim Zusammensetzen verwirklicht, die Krümmung nach der zweiten Dimension aber vernachlässigt wird. — Sehr verbreitet ist dasjenige Verfahren der Bildung eines annähernden Kugelnetzes, welches die Kugeloberfläche durch

eine Anzahl gleichweit abstehender „Meridiane“ (z. B. $A_2 m\ BZ_2$, $A_2 m'\ B'Z_2$ etc., Fig. 8, α) in Kugelzweiecke zerlegt, und diese

Fig. 8.



sodann mit Vernachlässigung der Krümmung nach der Dimension der „Breitekreise“ ($M_2 mpm' M_2'$, $D_2 BCB' D_2'$ etc.) in die Ebene ausgebreitet denkt, wobei jedes Zweieck die Form einer von zwei symmetrischen Kurven $AmBZ$ und $Am'B'Z$ begrenzten Lanzette (Fig. 8, γ) erhält, deren „Länge“ $AZ = \frac{U}{2}$, und deren „Breite“ $BB' = \frac{U}{n}$ sein mufs, wenn der Umfang des gröfsten Kreises der Kugel U werden und die Zahl der Zweiecke n (z. B. 12) sein soll.

Es bleibt nun noch die Natur der **Begrenzungskurve** AmB, resp. ABZ festzustellen. — Es findet sich diesbezüglich in mehreren Lehrbüchern ohne nähere Motivierung der durch die drei Punkte A, B, Z gehende und somit vollkommen bestimmte Kreisbogen als Begrenzung angewendet. Dafs sich nun dies aber keineswegs von selbst versteht, und dafs namentlich nicht etwa schon deshalb, weil jene Begrenzungslinie an der Kugel selbst einen Kreisbogen — nämlich einen Meridian

— bildet, sie auch im Netze einem Kreise angehören müsse, läfst sich u. A. durch den Hinweis auf den schiefabgeschnittenen Cylinder ins Gedächtnis rufen, indem sich hier die Grenzellipse beim Abrollen des Mantels in eine ganz heterogene, nämlich eine Sinuskurve verwandelt. — Um aber überhaupt etwas Bestimmtes über die Natur der Kurve AmB aussagen zu können, mufs vor Allem festgestellt werden, in welcher Weise man sich die (nur im Sinne einer Annährung statthafte) Ersetzung der den Breitekreisen angehörigen Bögen (z. B. mpm') durch Gerade vollzogen denken will? Hierüber dürfte es nun kaum eine näher liegende Feststellung geben, als die, dafs man die Mittellinie (Symmetrale) A_2pC des Zweiecks zu einer Geraden ApC ausstreckt, und in jedem Punkte p dieser Geraden nach beiden Seiten hin je die halbe Länge des durch p gehenden Breitekreis-Bogens mpm' als Senkrechte aufträgt. — Unter dieser Voraussetzung läfst sich sofort zeigen, dafs die Begrenzung des in die Ebene ausgebreiteten Kugelzweiecks wieder eine Sinuskurve von der Basis $AC = \frac{\pi}{2} b = \frac{U}{4}$ und der Höhe $CB = a = \frac{U}{2n}$ sei, wobei b der Radius der Kugel, U ihr Umfang ist.

Der Beweis für diese Behauptung besteht darin, dafs sich 1) der ganze Umfang des durch p gehenden Breitekreises $M_2pM'_2$ zum Umfang des Äquators $D_2CD'_2$ verhält wie der Radius M_2P_2 zum Radius $D_2O_2 = b$. Da nun 2) sowohl mp, als auch BC die $2n^{\text{ten}}$ Teile des durch p gehenden Breitekreises, resp. des Äquators sind, so werden sie sich ebenfalls verhalten wie $M_2P_2 : D_2O_2$, — oder wie die Strecken $M_1P_1 : D_1O_1$, welche in einem Kreise mit dem Radius $a = \frac{U}{2n}$ (Fig. 8, β) den entsprechend bezeichneten Strecken im Kreise mit dem Radius b ähnlich liegen: wodurch nach § 1 die allgemeine Sinuskurve mit der Höhe a und der Basis $\frac{\pi}{2} b$ definiert ist.*)

---

*) Um den Beweis durch Aufstellung der Gleichung der Begrenzungskurve zu geben, setzen wir, wie in der Anmerkung zu § 3 (S. 6), die Länge des Bogens $A_2p = x$, die Länge des Bogens $pm = y$. Nun ist

$$pm = \frac{P_2M_2 2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n} O_2M_2 \sin \frac{\widehat{A_2M_2}}{O_2M_2}$$

§. 7. Das praktische Verfahren für die **Konstruktion** des Netzes einer Kugel vom Umfange U (d. i. vom Radius $\frac{U}{2\pi}$) aus z. B. 12 Zweiecken gestaltet sich nach § 6 und § 1 so: 1) Man zeichnet einen Kreis vom Durchmesser $\frac{U}{12}$, d. i. vom Halbmesser $\frac{U}{24}$, teilt den vierten Teil seines Umfanges in gleiche Teile (am bequemsten und ausreichend genau 9 an der Zahl, entsprechend je 10 Bogengraden, Fig. 8, β) und fällt aus den Teilungspunkten Senkrechte auf den ersten (letzten) Halbmesser des Viertelkreises. 2) Man teilt eine Strecke von der Länge $\frac{U}{4}$ in ebensoviele (9) Teile als den Viertelkreis, und errichtet in den Teilungspunkten der Strecke senkrecht auf sie der Reihe nach die Senkrechten des Viertelkreises. 3) Durch freie Verbindung der so erhaltenen Endpunkte der Senkrechten erhält man Kurven, deren vier zu einer Lanzettform zusammengesetzt ein Zweieck liefern (Fig. 8, γ); 12 der letzteren zusammengefügt bilden dann eine Fläche, die wir der Kürze wegen im Folgenden „Netzkugel", und zwar eine vom Umfang U aus 12 Zweiecken, nennen wollen.

§ 8. Bisher ist bei Bestimmung der Begrenzung der Zweiecke nur auf die Eine Bedingung Rücksicht genommen worden, dafs die Breite der Zweiecke an den verschiedenen Stellen der Gröfse der entsprechenden Breitekreise gemäfs sei. Für die Brauchbarkeit des Netzes aber sind noch die beiden Umstände entscheidend, in welcher Annäherung die einzelnen Zweiecke beim Zusammenfügen 1) den vollen Winkel 2π um den Pol der Netzkugel herum ausfüllen, und 2) in ihrer

---

und hierin ist

$$O_2M_2 \sin \frac{\widehat{A_2M_2}}{O_2M_2} = O_2M_2 \sin \frac{\widehat{Ap}}{A_2O_2} = b \sin \frac{x}{b};$$

somit $$pm = \frac{\pi}{n} \cdot b \sin \frac{x}{b}$$

und $$y = a \sin \frac{x}{b}$$

— also wieder die Gleichung wie in § 1. — Am kürzesten läfst sich der Grund für die Verwendung der Sinuskurve für das Kugelnetz dahin aussprechen, dafs sich die Radien, Umfänge und daher auch **homologe Bögen** der Breitekreise verhalten wie die **Sinus der Poldistanzen.**

Krümmung nach der Dimension der Meridiane wirklich mit der Krümmung der Kugel selbst übereinstimmen?

Bezüglich der beiden Fragen ist es wichtig, den „Winkel an der Spitze der Sinuskurve“, d. h. den Winkel φ, den die im Punkte A der Sinuskurve an letztere gezogene Tangente AT (vgl. Fig. 2, S. 3) mit deren Basis bildet, zu vergleichen mit dem Winkel ψ, unter welchem sich an einer wirklichen Kugel von $2n$ aequidistanten Meridianen je zwei benachbarte, resp. deren Ebenen schneiden. Für letzteren Winkel erhält man, da $2n \, . \, \psi = 2\pi$ sein sollen, den Wert

$$\psi = \frac{\pi}{n};$$

und speziell für $n = 12$ ist $\psi = 15^0$.

Dagegen finden wir die Gröfse φ am anschaulichsten durch die Bemerkung, dafs sich nach § 3 die Sinuskurve von der Basis $\frac{\pi}{2} b$ und der Höhe a so an einen Kreiscylinder vom Radius b legen läfst (Fig. 5, S. 7), dafs die Ebene der Ellipse, in welche hierbei die Sinuskurve übergeht, mit der Ebene des durch die Basis gebildeten Kreises einen Kantenwinkel einschliefst, der ebenfalls φ ist: denn im Punkte A stehen die unendlich nahe angrenzenden Stücke beider Kurven auf der Kante OA senkrecht. Die Gröfse dieses Kantenwinkels bestimmt sich auf Grund dieser Beziehung nach dem Dreiecke OCB (Fig. 5) durch tang $\varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{a}{b}$; und es ist demnach auch der Winkel φ an der Spitze der Sinuskurve von der Höhe a und der Basis $\frac{\pi}{2} b$ gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \text{*)}.$$

---

*) Direkt erhält man diese Beziehung aus der Kurvengleichung $y = a \sin \frac{x}{b}$; nämlich: $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b} \cos \frac{x}{b}$, woraus für $x = 0$ folgt $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$. — Für die einfache Sinuskurve, bei der $a = b = 1$, ist hiernach $\varphi = 45^0$. — Man findet diese Beziehung auch unmittelbar auf Grund der in § 1 definierten Entstehungsweise der Sinuskurve, nämlich durch die Bemerkung, dafs unendlich kleine Bögen ihren Halbsehnen (Sinus) gleich sind, und dafs daher die ersten Abscissen der einfachen Sinuskurve mit ihren Ordinaten gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke bilden,

Für jene besonderen Sinuskurven, welche die n Zweiecke des Kugelnetzes begrenzen, ergiebt sich infolge der Relation $2na = 2\pi b$ oder $a = \frac{\pi}{n} b$ der Wert

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{n}.$$

Man sieht hieraus, dafs φ nur ein Näherungswert, und zwar kleiner ist als das genaue ψ, da erst die goniometrische Tangente von φ den nämlichen Wert hat wie ψ. Die Annäherung von φ an ψ wird aber um so genauer, je gröfser n, d. h. je schmaler jede Lanzette des Kugelnetzes genommen wird.

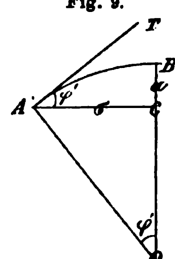
Für $n = 12$ wird $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{12}$, woraus $\varphi = 14^0\,40'\,15''$ — sodafs also der Fehler $\psi - \varphi = 0^0\,19'\,45''$, welcher für jede Lanzette doppelt und daher für das ganze Kugelnetz 24mal genommen $7{,}9^0$ — allgemein $2n\left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}\right]$ — giebt. Soviel also fehlt unserem Kugelnetz zur Ausfüllung des vollen Winkels um den Pol herum.

Führt man die analogen Rechnungen für die zu Beginn des § 6 erwähnten, durch Kreisbögen begrenzten Zweiecke aus*), so erhält man für $n = 12$, $\varphi' = 18^0\,55'\,28''$, wobei der

in welchen der gesuchte Winkel $\varphi = 45^0$ vorkommt. Diesen Dreiecken entsprechen ferner in der allgemeinen Sinuscurve rechtwinkelige Dreiecke mit den Katheten b und a (da laut Definition die Abscissen, resp. Ordinaten der allgemeinen Sinuskurve zu denen der einfachen durchweg in dem Verhältnisse $b:1$, resp. $a:1$ stehen) und so gelangt man auch wieder durch die letzteren elementaren und anschaulichen Betrachtungen zur Beziehung $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$.

*) In einem Kreisbogen (Fig. 9), dessen halbe Sehne $AC = \sigma$, und dessen Pfeil $CB = a$ ist, ist der gesuchte Winkel $\varphi' = TAC = COA$ gegeben durch die Gleichung

Fig. 9.



$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{AC}{CO} = \frac{2a\sigma}{\sigma^2 - a^2}.$$

Soll hierin $\sigma = \frac{U}{4}$, $a = \frac{U}{2n}$ werden, so erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{4n}{n^2 - 4}.$$

Für $n = 12$ wird $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{12}{35}$, woraus sich obiger Wert ergiebt. —

Fehler $\varphi' - \psi =$ fast 4^0, welcher 24mal genommen rund 94^0, also über einen Rechten beträgt!

§ 9. Im Zusammenhange mit der Frage nach dem Schliefsen des Netzes hinsichtlich der Spitzen steht die nach der Krümmung der einzelnen Zweiecke beim Aneinanderfügen ihrer Ränder. Für Letzteres ist die Bedingung charakteristisch, dafs diese Ränder ebene Kurven bilden müssen, weil beide Zweiecke in Bezug auf diese Kurven symmetrisch zu liegen kommen sollen. — Erinnern wir uns nun, dafs nach § 3, wenn der Ebene einer Sinuskurve die Krümmung eines Kreiscylinders

---

Für die Frage, welches der beiden Kugelnetze theoretisch berechtigter ist (— über praktische Ausführbarkeit des einen und Unausführbarkeit des anderen folgen einige Bemerkungen am Schlusse, Seite 21), ist es von Interesse, welcher Grenze sich die Summen Φ, resp. Φ' aller Winkel an der Spitze der Zweiecke nähern, wenn man die Anzahl n der Zweiecke unendlich wachsen läfst.

Beim Sinuskurven-Netz ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{n}$, daher $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}$ und somit $\Phi = \lim_{n=\infty} 2n \,.\, \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n} = 2\pi$ — wie man durch die der Form $\infty \,.\, 0$ entsprechenden Differentiationen nach n findet. Auch durch elementare, aber allerdings nicht ganz einwurfsfreie Rechnung erhält man dasselbe Resultat, indem man für $n = \infty$ sogleich $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$ nimmt; dann ist

$$\Phi = \lim 2n\varphi = \lim 2n \cdot \frac{\pi}{n} = 2\pi.$$

Beim Kreisbogen-Netz dagegen ist

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{4n}{n^2 - 4}, \text{ daher } \varphi' = \operatorname{arctg}\frac{4n}{n^2 - 4}$$

und somit
$$\Phi' = \lim_{n=\infty} 2n \,.\, \operatorname{arctg}\frac{4n}{n^2 - 4} = 8,$$

wie sich wiederum durch die Differentiation, oder übereinstimmend aus der minder exakten Ersetzung von $\operatorname{arctg}\frac{4n}{n^2-4}$ durch $\frac{4n}{n^2-4}$ selbst ergiebt, wobei

$$\Phi' = \lim 2n \cdot \frac{4n}{n^2 - 4} = \lim \frac{8n^2}{n^2 - 4} = \lim \frac{8}{1 - \frac{4}{n^2}} = 8.$$

Von diesen Werten stimmt der für $\Phi = 2\pi$ mit der vorauszusehenden Eigenschaft, dafs unsere „Netzkugel“ für $n = \infty$ eine wirkliche Kugel wird, während das Kreisbogen-Netz auch bei unendlich vielen Lanzetten noch ein Unding bleibt, wie der Überschufs $8 - 2\pi = 8 - 6{,}28\cdot\cdot = 1{,}72$, d. i. 27,4 % Fehler beim Schliefsen selbst noch des theoretisch vollkommensten Netzes dieser Art zeigt!

erteilt wird, in welchem die Ebene des nunmehr von der Basis der Sinuskurve gebildeten Kreises senkrecht steht auf der Cylinderaxe, die Sinuskurve eine ebene Kurve (eine Schnittellipse des Cylinders) bildet — so dürfen wir jetzt umgekehrt sagen: damit die Ränder zweier aneinderstofsender Zweiecke in die nämliche Ebene fallen, mufs ihre Mittellinie die Krümmung eines **Kreises** erhalten. Und somit: Jedes Zweieck der Netzkugel ist nach der Dimension des Meridianes ebenso gekrümmt wie die wirkliche Kugel.*)

---

*) Direkt erhält man dieses Resultat folgendermafsen: Wir legen die gekrümmte Fläche des Zweieckes so in ein rechtwinkeliges Coordinatensystem $\Xi H Z$ (Fig. 10), dafs die Spitze in den Anfangspunkt A, die Mittellinie ApC in die ΞZ-Ebene, und die Ordinaten y der Sinuskurve parallel zur H-Axe zu liegen kommen. Es ist dann die Gleichung $\zeta = f(\xi)$ der Kurve ApC aus den Bedingungen zu ermitteln, dafs zwischen der Geraden $pm = y$ und der Krummen $Ap = x$ einerseits noch immer die Relation $y = a \sin \frac{x}{b}$ bestehen soll, worin $a = \frac{b\pi}{n}$, und dafs anderseits alle Punkte m der Kurve AmB in einer Ebene liegen sollen, welche die Ξ-Axe enthält und mit der ΞZ-Ebene einen Winkel einschliefst, der mit Rücksicht darauf, dafs er der $2n^{\text{te}}$ Teil des vollen Kantenwinkels um die Ξ-Axe herum sein soll, $\psi = \frac{\pi}{n}$ sein müfste, welchem Werte aber im Sinne der bereits oben besprochenen Annäherung auch der Winkel φ an der Spitze der Sinuskurve entspricht, für welchen $\operatorname{t}\varphi = \frac{\pi}{n}$ ist. — Die Gleichung der genannten Ebene ist dann mit Zulassung dieser Annäherung:

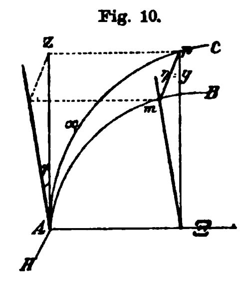


Fig. 10.

$$\eta = \zeta \,.\, \operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{n}\zeta; \text{ und wegen } \eta = y \text{ ist weiter}$$

$$\frac{\pi}{n}\zeta = \frac{b\pi}{n}\sin\frac{x}{b} \quad \text{oder} \quad \zeta = b \sin\frac{x}{b} \;(1).$$

Anderseits besteht zwischen ξ, ζ und x die Relation

$$x = \int_0^{\xi} d\xi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} \qquad (2),$$

da x jetzt die Länge des von $\xi = 0$ gezählten Bogens der Kurve $\xi = f(\zeta)$ ist. Um aus (1) und (2) die Gröfse x zu eliminieren und die verlangte Relation zwischen ζ und ξ zu erhalten, entwickeln wir aus (1):

Zusatz. Die Ergebnisse der §§ 8 und 9 geben uns nunmehr ein genaues Bild von der Art der Annäherung, mit der die in sich widersprechende Aufgabe, ein ebenes Netz zu einer Kugel zusammenzufügen, von unserem Sinuskurven-Netz dadurch gelöst wird, daſs man je eine der einander widersprechenden Bedingungen auf Kosten der übrigen nur annähernd erfüllt. — Giebt man nämlich jedem Zweiecke genau die Breite $\frac{U}{12}$, genau die Begrenzung durch Sinuskurven und genau die Krümmung des Kreises, und fügt die 12 gekrümmten Zweiecke aneinander, so stehen die Ebenen des ersten und des letzten Randes um den oben erwähnten Winkel von $2n\left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}\right] = 7{,}9^0$ von einander ab. Man könnte nun diesen Abgang dadurch zu ersetzen suchen, daſs man den Sinuskurven jedes Zweieckes nicht die Höhe $a = \frac{U}{24}$, sondern eine etwas gröſsere Höhe a' giebt, deren Wert sich daraus bestimmt, daſs wir statt φ jetzt $\psi = 15^0$ setzen. Dann ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a'}{b},\ a' = b\,.\operatorname{tg}\psi = \frac{U}{2\pi}\cdot\operatorname{tg}15^0 = \frac{U}{23{,}47\,..}$$

Es müſste also jedes Zweieck sowohl an den dem Äquator wie an allen übrigen den Breitekreisen entsprechenden Stellen im Verhältnisse 24 : 23,47 breiter gemacht werden, damit das Netz vollständig schlieſse ohne Änderung der richtigen Krümmung der Meridiane und der verhältnismäſsigen Länge der Breitekreise. Diese modifizierte Netzkugel hätte dann aber nur mehr nach der Dimension der Meridiane genau den Umfang U,

---

$$x = b\arcsin\frac{\zeta}{b},\quad dx = \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\left(\frac{\zeta}{b}\right)^2}}$$

und durch Gleichsetzung mit dem Differential der Gleichung (2):

$$d\xi\sqrt{1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\left(\frac{\zeta}{b}\right)^2}},$$

welche Gleichung nach $\frac{d\zeta}{d\xi}$ aufgelöst, giebt:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\sqrt{b^2-\zeta^2}}{\zeta}\ \text{oder}\ \xi = \int\frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{b^2-\zeta^2}} = -\sqrt{b^2-\zeta^2}+C.$$

Bestimmen wir den Wert der Integrationskonstante $C = b$ gemäſs dem Wertepaare $\xi = 0$, $\zeta = 0$, so erhält man die Relation

$$(\xi - b)^2 + \zeta^2 = b^2,$$

d. i. die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser b, der die Z-Axe im Anfangspunkte tangiert Dieser Kreis ist dann die Leitlinie derjenigen Cylinderfläche, zu welcher die einzelnen Zweiecke beim Zusammensetzen sich krümmen — übereinstimmend mit den oben gegebenen Folgerungen aus den Eigenschaften des schief abgeschnittenen Cylindermantels.

die Äquatorlänge aber wäre $\frac{24}{23,47} U = 1,023\, U$. — Statt der genauen Gröfse des Umfanges kann man aber auch die eine oder die andere der beiden übrigen von oben genannten Bedingungen opfern, um das Schliefsen des Netzes zu erreichen; z. B. die genaue Sinuskurvenform, indem man die Winkel φ an den Spitzen von $14^0\,40'\,15''$ auf 15^0 ergänzt, und die Abweichung gegen die Mitte des Zweiecks hin verschwinden macht. Behält man dagegen das Netz ganz ungeändert, so wird beim Aneinanderfügen des ersten und letzten Randes die bis dahin genau kreisförmige Krümmung etwas geändert, indem sich am Pole der „Netzkugel" eine (allerdings sehr schwache) Spitze bildet.

§ 10. Wie grofs ist die Oberfläche der „Netzkugel"? — Da sie aus n Zweiecken, und jedes der letzteren aus 4 Sinuskurven von der Höhe $a = \frac{U}{2n}$ und der Basis $\frac{\pi}{2} b = \frac{U}{4}$ besteht, so ist nach § 2 der Flächeninhalt F der Netzkugel

$$F = 4n \,.\, ab = 4n \cdot \frac{U}{2n} \cdot \frac{U}{2\pi} = \frac{U^2}{\pi} = \frac{(2b\pi)^2}{\pi} = 4b^2\pi;$$

d. h. die Oberfläche der Netzkugel vom Radius b ist genau gleich der Oberfläche einer wirklichen Kugel vom Radius b. Und zwar gilt dies unabhängig von der Anzahl der Zweiecke.

Dieses Resultat mufs auf den ersten Blick sehr überraschen, wenn man blofs daran festhält, dafs die Netzkugel sich nur um so genauer an die wirkliche Kugel annähert, je gröfser n ist. Der innere Grund des bewiesenen Resultates liegt in der Anwendbarkeit des Cavalierischen Prinzipes auf die Grundeigenschaft, welche wir dem Netze gegeben haben: dieser gemäfs wird nämlich, wenn man neben der Netzkugel eine wirkliche Kugel vom gleichen Radius so aufstellt, dafs der Äquator beider in dieselbe Ebene fällt, eine dem Äquator parallele Ebene die Kugel in einem Breitekreis, die Netzkugel in einem Polygon von n Seiten schneiden, deren Umfänge einander gleich sind, und zwar unabhängig von der Seitenzahl n dieser Polygone. — Damit übrigens diese Berufung auf das Cavalierische Prinzip stichhaltig sei, müssen die von der nämlichen Schnittebene getroffenen Oberflächenelemente beider Körper die nämliche Neigung gegen jene Schnittebene haben. Dies ist aber nach § 9 wirklich der Fall; genau allerdings nur, so lange jedes Zweieck für sich dieselbe Krümmung wie die Kugel besitzt, was

nach § 8, S. 14 beim Aneinanderfügen aller n derartig gekrümmten Zweiecke zur Folge hat, dafs zwischen der Ebene des ersten und letzten Randes ein Winkelabstand von

$$2n\left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}\right], \text{ d. i.} = 7{,}9^0 \text{ für } n = 12$$

bleibt, und dafs somit auch die den Breitekreisen umfangsgleichen Polygone von n Seiten nicht geschlossen sind. Da aber letzterer Umstand die Anwendung des Cavalierischen Prinzipes nicht hindert, so darf die obige Ableitung der Oberfläche $F = 4b^2\pi$ der längs eines Randes offen gebliebenen Netzkugel zugleich als eine vollkommen strenge Ableitung der Oberflächenformel für die wirkliche Kugel gelten.

Übrigens läfst sich der Grundgedanke*) unserer Methode die Oberfläche der Kugel blos mit Hülfe der Quadratur der Sinuskurve und des Cavalierischen Prinzipes zu berechnen, auch ganz unabhängig von der Einführung eines Kugelnetzes folgendermafsen darstellen: Man lege an die Kugel eine cylindrische Fläche so, dafs ein Meridian der Kugel ihre Leitlinie ist, und trage von den verschiedenen Punkten der letzteren aus längs der Seitenlinien des Cylinders nach ein und derselben Seite hin die ganze Länge der Umfänge der durch jene Punkte gehenden Breitekreise auf. Wird dann der Cylindermantel in eine Ebene ausgebreitet, so bilden jene Längen die Ordinaten einer Sinuskurve von der Basis $\frac{\pi}{2}b = \frac{U}{4}$ und der Höhe $a = U$, deren doppelter Flächeninhalt $2ab = 2 \,.\, U \,.\, \frac{U}{2\pi} = 4b^2\pi$ gleich dem der Kugel ist.

---

*) Dieser Grundgedanke läfst sich in Integralen so wiedergeben: Ist der Bogenabstand eines Breitekreises vom Pole $= x$, die Länge des Breitekreises $= y$, so ist die zwischen zwei unendlich benachbarten Breitekreisen liegende Fläche, unbeschadet ihrer einem Kegelmantel sich nähernden Krümmung, gleich der Fläche des Rechteckes $y\,dx$ und daher

$$F = \int_0^{\frac{U}{2}} y\,dx$$

Nennen wir wieder den Radius der Kugel b, die Poldistanz ξ,

so ist $$F = \int_0^{b\pi} 2b\pi \sin\xi \,.\, d\,(b\,\xi) = 2b^2\pi\int_0^{\pi}\sin\xi\,d\xi = 4b^2\pi.$$

§ 11. Wie grofs ist der **Kubikinhalt** der Netzkugel? Da nach § 8 jedes Zweieck, wenn seine Mittellinie zu einem Halbkreise gekrümmt worden ist, zusammen mit den Ebenen beider Ränder einen Raum einschliefst, der aus 4 Cylinderstutz-Quadranten von der Gestalt des Körpers $ABCOA$ in Fig. 5 besteht, und letzterer Körper nach § 5 den Kubikinhalt $k = \frac{1}{3} ab^2$ besitzt, so ist für die Kugel, wo $a = \frac{U}{2n} = \frac{b\pi}{n}$ ist

$$K = 4n \cdot \frac{1}{3} \frac{b\pi}{n} \cdot b^2 = \frac{4}{3} b^3\pi;$$

d. h. der Kubikinhalt der Netzkugel vom Radius b ist gleich dem Kubikinhalte der wirklichen Kugel vom Radius b, und zwar wieder unabhängig von n. Auch dieses Resultat gilt, wie das analoge für die Oberfläche, nur so lange genau, als das Netz bis auf den Winkelabstand $2n\left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}\right]$ ($= 7{,}9^0$ für $n = 12$) zwischen der Ebene des ersten und letzten Randes offen bleibt. Während aber dieser Umstand die Berechnung der Oberfläche nicht hinderte, müssen wir uns jetzt, um für die Berechnung des Kubikinhaltes einen allseitig geschlossenen Raum zu haben, aufser den gekrümmten Zweiecken auch die genannten beiden Ränder-Ebenen als Begrenzungen des Körpers denken. Lassen wir diese, wie es beim vollständigen Schliefsen der „Netzkugel" geschieht, in Eine Ebene zusammenfallen, so gilt obige Inhaltsformel nur mehr annähernd; genau aber wieder, wenn $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$ wird, d. h. für $n = \infty$.

Zum Schlusse einige Worte über die didaktische Verwendung vorstehender Aufgaben.

Am meisten dürfte die Konstruktion des Kugelnetzes, welche in § 7 in solcher Form angegeben wurde, dafs sie nur die Kenntnis der bereits auf der Unterstufe des geometrischen Unterrichts geläufigsten Ausdrücke und Operationen voraussetzt, einem praktischen Bedürfnisse dieses Unterrichtes entgegenkommen. — Allgemein zugestanden ist ja, dafs die Vorteile, welche im stereometrischen Anschauungsunterrichte das Anfertigen der Netze dem Interesse und dem Verständnisse des Schülers bringt, kaum zu hoch angeschlagen werden können. Aber billigerweise

darf der Schüler dann verlangen, dafs das Netz beim Zusammenfügen auch um so genauer „klappt“, je mehr Sorgfalt und Geschick er darauf verwendet hat. Das Kreisbogen-Netz ist aber nach § 8 so völlig unfähig diesen Anforderungen auch nur halbwegs zu entsprechen — der Schüler sieht, wenn er das Zusammenfügen des Netzes wirklich versucht, buchstäblich Theorie und Praxis um mehr als 90° divergieren, was weder seinen Respekt vor der Theorie noch seine Freude an der Praxis erhöhen kann — dafs es mir zweifelhaft erscheint, ob denn die Verfasser derjenigen Leitfäden für geometrischen Anschauungsunterricht, welche manchmal recht umständlich die Konstruktion dieses Netzes lehren, ein Anfertigen desselben durch den Schüler wirklich gewünscht haben? Wenn aber nicht, so vermag ich den Zweck derartiger Unterweisungen, die ja theoretisch ohnedies jedes Haltes entbehren, in keiner Weise einzusehen. Der Fehler von rund 8° dagegen, welchen das Sinuskurven-Netz aufweist, dürfte kaum so grofs sein, als die durch das Konstruieren, Ausschneiden und Kleben unvermeidlichen, und wird daher dem Anfänger überhaupt kaum auffallen, jedesfalls aber kein Hindernis für das Schliefsen des Netzes bilden (zumal diese 8° auf 360° fehlen, während die 94° des Kreisbogen-Netzes ein Überschufs über 360° sind, was also im Konflikt mit Euklid XI. 21. einen körperlichen Winkel mit einer Seitensumme von 454° verlangt!) — Mag es aber auch vielleicht einzelnen Fachgenossen scheinen, als sei die Rücksicht auf die geometrische „Handfertigkeits“-Praxis des Anfängers nicht gar so wichtig — Herbert Spencer (Education) wäre hierüber allerdings nicht ihrer Ansicht — so wird doch umsomehr zugestanden werden, dafs diejenigen geometrischen „Spielereien“ den Vorzug vor andern verdienen, an welche sich späterhin wichtige Einsichten der wissenschaftlichen — abstrakten wie angewandten — Geometrie schliefsen können. Dies ist aber beim Sinuskurven-Netz reichlich der Fall; eine wie vielseitige Rolle spielt nicht allein schon die ihm zu Grunde liegende Thatsache der Zunahme der Breitekreise mit dem Sinus der Poldistanz (oder Abnahme mit dem Cosinus der Breite) in den herkömmlichen Aufgaben zur Trigonometrie, in der mathematischen Geographie, der Physik u. s. f.

Fast ebenso naheliegend als die Frage nach einem Netz der Kugel ist die nach dem Netze des schiefabgeschnittenen Cylinders (§ 3), für dessen Konstruktion sich die Anweisung leicht ebenso in lauter schon dem Anfänger geläufigen Ausdrücken formulieren läfst, wie die des § 7 für die Kugel. Auch hier wird der Anfänger aus der wirklichen Anfertigung mancherlei Anregung gewinnen, namentlich für ein erstes Bekanntwerden mit den Eigenschaften der Ellipse (welches, nebenbei bemerkt, aus mehreren Gründen viel entsprechender an den schiefen Cylinderschnitt, als an die gewöhnliche Brennpunkt-Definition geknüpft werden könnte).

In Anbetracht des Zieles, welches der Unterstufe des geometrischen Unterrichtes gesteckt ist, genügt es natürlich, wenn beide Netzkonstruktionen (ebenso wie bisher das Kreisbogen-Netz der Kugel) dem Schüler ohne vorausgehende Deduktion gezeigt werden und ihre Verifikation ganz wie eine empirisch erwartete Thatsache allein durch den Erfolg finden — nämlich durch das Zustandekommen der gewünschten Körper beim Zusammenfügen des Netzes. Auch ohne dafs also über die eigentliche Begründung der Konstruktion zwischen Lehrer und Schüler etwas gesprochen wird, wäre es aber bei der Art, wie geometrische Einsichten sich spontan einzustellen pflegen, gar nicht unwahrscheinlich, dafs dem für seine Arbeit sich wirklich interessierenden Knaben einfach schon während der intensiven Beschäftigung mit den anschaulich vorliegenden geometrischen Thatsachen (nämlich hier den Mafsbeziehungen am Netze und ihrem im unmittelbaren Sinne des Wortes „genetischen“ Übergang in die entsprechenden Mafsbeziehungen an der Kugel und dem Cylindermantel) ein Licht über den wahren Grund dieser Beziehungen aufgehe — wenn auch noch nicht in der Form eines planmäfsigen „Beweises“.

Auf der Oberstufe dürften dann diese Beweise, wie die meisten übrigen Aufgaben dieser kleinen Arbeit ein brauchbares Übungsmaterial abgeben. Als Grundaufgaben, von welchen die übrigen Anwendungen sind (die durch Determination und Kombination noch beliebig vervielfältigt werden könnten), sind die Quadratur der Sinuskurve (§ 2) und die Kubatur des Cylinderstutz-Quadranten (§ 4) zu betrachten. Auch für

die Theorie willkommen dürfte die in § 10 mitgeteilte Methode der Berechnung der Kugeloberfläche sein, da sie ganz unabhängig von der gewöhnlichen ist, welche sich auf die der Rotationsflächen gründet und nicht wie letztere eine ganze Reihe stereometrischer Sätze zu Voraussetzungen hat.

Da die Aufgaben im ganzen solche sind, welche einerseits mehrere Partieen des herkömmlichen stereometrischen Lehrstoffes unter Gesichtspunkte bringen, die von dem gewöhnlichen Lehrgange etwas abseits liegen, und anderseits durchweg den Begriff des „Sinus“, aber nicht schon in der spezifisch goniometrischen, sondern in blofs planimetrischer Form verwerten, so dürften sie am besten um die Zeit des Abschlusses der Stereometrie und des Beginnes der Goniometrie*) zur Behandlung kommen. Sie bilden eine Verbindung von Rechnung und Übung in räumlicher Anschauung, wobei an die erstere überall nur sehr einfache, an letztere ziemlich vielseitige Anforderungen gestellt werden.

Wenn nun dies schon im Allgemeinen als das richtige Verhältnis gelten dürfte, dafs nämlich auch in den rechnenden Partieen der Geometrie nie die Raumanschauung hinter die Rechnung zurücktritt, so entsprechen dieser Forderung gerade diejenigen beiden geometrischen Hülfsmittel, deren durchgängige Verwendung, wie eingangs erwähnt, das einigende Band zwischen den einzelnen Paragraphen dieser Arbeit bildet, in vorzüglichem Mafse, und verdienten deshalb gerade in den

---

*) Auch die Näherungsrechnungen in § 8, Anm. und § 10 liefsen sich als Beispiele dafür benützen, dafs und in welchem Sinne das Gebiet der mathematischen Annäherungen keineswegs ein Gebiet der Willkür ist, wie es (— nach den ungläubigen Gesichtern zu schliefsen, mit welchen unsere Abiturienten die in Physik so häufig unvermeidlichen Annäherungsrechnungen ansehen) dem über diese Dinge nicht Aufgeklärten meistens scheint. — Endlich bieten auch die in den Anmerkungen beigegebenen überall höchst einfachen Differentiationen und Integrationen für solche vorgeschrittenere Schüler, welche ihr Privatfleifs an die Anfänge der Infinitesimalrechnung geführt hat, lehrreiche, weil einer konkreten Anschauung noch immer naheliegende Übungen; sodafs für solche strebsame Anfänger die ganze kleine Arbeit allenfalls eine Privatlektüre bilden könnte, welche gerade dem tieferen Verständnisse einiger wichtigen Partieen des in der Schule offiziell Behandelten zu gute käme.

Mittelschulen wohl eine etwas vielseitigere Beachtung und Benutzung, als es bisher üblich war*).

Erstens nämlich darf das **Cavalierische Prinzip** als eine der vielseitigsten und geistvollsten Methoden zur Bestimmung von Inhalten, nicht nur der Körper (bei denen sich allerdings das Bedürfnis nach ihm am meisten geltend macht), sondern auch der Flächen, bezeichnet werden. Es ist einerseits häufig die weitaus unmittelbarste, anschaulichste Art der Inhaltsvergleichung, und macht anderseits den Schüler mit derjenigen Grundanschauung vom Summieren unendlich vieler, unendlich kleiner Gröfsen bekannt, die das Wesen der Integralrechnung ausmacht, welche wir ja faktisch so häufig im Geometrie- wie im Physikunterrichte schon der Mittelschule anzuwenden nicht umhin können, wenn wir auch auf ihre Terminologie verzichten müssen.

*) In den „Instruktionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich", welche dem neuen Lehrplane vom 26. Mai 1884 beigegeben sind, und von welchen der die Mathematik betreffende Abschnitt seitens der Fachlehrer als einer der wertvollsten anerkannt wird, ist beider Momente ausdrücklich gedacht:

S. 227 (der offiziellen Ausgabe): „Mit Rücksicht darauf, dafs die gröfste Ökonomie in der Verwendung der zugemessenen Unterrichtszeit geboten ist, ist zu raten, der Vergleichung der Volumina die Methode von Cavaleri zu Grunde zu legen; sie ist aus demselben Grunde wegen der grossen Abkürzung die sie im Vortrage zuläfst, schon in viele Lehrbücher aufgenommen . ."

S. 234: „ . . Ohne vorerst auf die Theorie der Geraden näher einzugehen, verfolge der Unterricht das allgemeine Problem der graphischen Darstellung für mannigfaltige aber einfache Formen von Gleichungen . . Als Beispiele für transcendente Kurven wähle man die Gleichungen $y = \log x$, $y = \sin x$; der einfache Anblick ihrer Abbildungen zeigt in anschaulicherer und bestimmterer Weise den Verlauf und die Änderungen dieser Funktionen, als es das eingehendste Studium einer Logarithmen- oder einer trigonometrischen Tafel thun könnte. Um die Allgemeinheit dieser Methode deutlich hervortreten zu lassen, bringe man noch das eine oder andere physikalische Gesetz zur graphischen Darstellung und berücksichtige auch empirische Funktionen, z. B. durch Darstellung der Mortalitäts- oder Temperaturkurven. Abgesehen von dem Werte, den diese Übungen für die Auffassung der folgenden Lehren haben, wird der Schüler mit einer Methode vertraut, welche selbst auf nicht streng mathematischem Gebiete ihre Anwendung hat, wenn es sich darum handelt, den allgemeinen Charakter eines Gesetzes deutlich aufzufassen, welches in einer Reihe genauer Beobachtungsresultate irgend einer Art herrscht."

Zweitens ist es kaum zuviel gesagt, wenn man das Vertrautsein mit den Eigenschaften der **Sinuskurve** für eine der fruchtbarsten unter allen geometrischen Einzelerkenntnissen erklärt; und zwar dies aus einem spezielleren und aus einem allgemeineren Grunde. Der allgemeine ist der, dafs es überhaupt kein besseres Mittel giebt, den Schüler mit den Eigenschaften der verschiedenen Funktionen der Elementarmathematik vertraut zu machen, als indem man ihn anhaltend und vielseitig mit ihren „graphischen Darstellungen" beschäftigt; wie dies schon wiederholt in dieser Zeitschrift zur Sprache gekommen ist. Wie wohl nun meines Wissens von diesen modernen Auffassungen bisher immer erst noch sehr wenig in die Praxis des mathematischen Unterrichtes unserer Mittelschulen Eingang gefunden hat, stehe ich doch nicht an, meine Überzeugung dahin auszusprechen, dafs das Vertrautwerden mit dem Funktionsbegriff, d. h. die Gewöhnung, die Gebilde der Elementar-Arithmetik und die goniometrischen Funktionen ganz ausdrücklich sub specie des „**Funktions**"-Begriffes zu betrachten und zu beherrschen, das natürliche Ziel des ganzen mathematischen Mittelschulunterrichts bilden sollte; eine Thesis, auf deren Beweis ich allerdings an dieser Stelle nicht eingehen kann, da er eine Analyse des ganzen mathematischen Unterrichtes der drei oder vier letzten Schuljahre bieten müfste. — Unter jenen Funktionen sind es nun wieder (neben dem Logarithmus) die goniometrischen, welche zu einer derartigen Behandlung am meisten auffordern; der Wust von Sätzen über Vorzeichen, Wachsen, Geschwindigkeit des Wachsens, über Periodizität u. s. f. verwandelt sich dann in eine Reihe von Antworten, welche von den graphischen Darstellungen auf blofse Fragen hin einfach abgelesen werden können. Typisch hiefür aber ist die Funktion *sinus*; und allein schon die Rolle, welche sie in den mannigfachsten Aufgaben der Physik spielt, so in der ganzen Schwingungs- und Wellenlehre, dürfte als genügender spezieller Grund gelten, ihre graphische Darstellung, d. h. die Eigenschaften der Sinuskurve oder Wellenlinie ganz besonders gründlich einzuüben. Diese Einübung braucht aber durchaus nicht erst zu beginnen, wenn es an die zusammenhängende Darstellung der

Goniometrie geht, sondern wenn, wie oben vorgeschlagen wurde, der Schüler auf der Unterstufe, beim geometrischen Anschauungsunterrichte in halb spielender Beschäftigung mit geometrischen Gebilden (dem Kugel- und Cylinderstutz-Netz) das eigenartige Bild gerade dieser Kurve sich fest eingeprägt hat, so macht dann beim Goniometrieunterrichte der Oberstufe die Erinnerung an jene Beschäftigung und an die damals etwa sich aufdrängenden Fragen von selbst an einem konkreten Beispiele deutlich, warum man nunmehr der Funktion *„sinus“* so eingehende Aufmerksamkeit schenkt. Es wäre dies eine Art, in die Goniometrie eingeführt zu werden, welche freilich auch die (ebenfalls schon lange vor Beginn des offiziellen „Trigonometrie“-Unterrichtes gelegentlich zu beginnende) Beobachtung anderer, und zwar möglichst mannigfaltiger Beispiele von dem Walten des Sinusgesetzes in geometrischen, physikalischen, astronomischen Erscheinungen u. s. w. heranziehen müfste, dann aber tiefergehende Erfolge erzielen dürfte, als selbst die besten der gegenwärtig üblichen Methoden, welche eine mehr oder minder allgemeine und strenge Definition der Begriffe der einzelnen goniometrischen Funktionen an die Spitze der Goniometrie stellen, wobei aber das Bedürfnis nach diesen Begriffen entweder gar nicht oder doch höchstens durch eine kurze, einseitige Verweisung auf den Zweck der Dreieckauflösung vorbereitet wird.

Mögen diejenigen Herren Fachgenossen, welche in der einen oder anderen von den letzteren prinzipiellen Bemerkungen Gedanken über Ziele und Methoden des mathematischen Unterrichtes anklingen hören, welche sie vielleicht seit langem selbst gehegt haben, es nicht für unangemessen halten, dafs ich diese didaktischen Prinzipien angesichts des sehr bescheidenen und eng umgrenzten Gegenstandes, welchen der Titel dieser Arbeit bezeichnet, zur Sprache bringe. Vielmehr bitte ich den Leser, die Behandlungsweise der paar speziellen Aufgaben dieser Arbeit in erster Linie als eine Illustration des Sinnes zu nehmen, in welchem ich jene Prinzipien, die hier nur angedeutet werden konnten, aufgefafst und bethätigt sehen möchte.

Kleinere Mitteilungen.

Die geometrische Darstellung der Linsenformel.

Von Dr. A. Handl in Czernowitz.

Die von Hrn. Dr. Th. Häbler in Grimma (ds. Ztschr. XVII, 424. (1886) Hft. 4) und von Hrn. d'Ocagne (Journ. de Phys. (2). 4. 554. Beibl. 10. 281) angegebenen geometrischen Darstellungen der Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ sind nur besondere Fälle eines allgemeineren Satzes, der sich etwa in folgender Weise aussprechen läfst:

Sind a, b, c die Stücke, welche eine beliebige Gerade von den beiden Schenkeln und der Halbierungslinie eines beliebigen Winkels (2φ) abschneidet, so besteht zwischen denselben jederzeit die Beziehung: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2\cos\varphi}{c}$.

Der Beweis dieses Satzes ist so einfach, dafs ich mich nicht mit demselben aufzuhalten brauche. Man braucht somit nur $c = 2f\cos\varphi$ zu machen, um bei jeder beliebigen Gröfse des Winkels 2φ die der Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ entsprechenden zusammengehörigen Schenkelabschnitte a und b zu finden. Man überzeugt sich auch leicht, dafs negative Werte der Gröfsen a, b oder f, (entsprechend der Convergenz der einfallenden Strahlen, einem virtuellen Bilde oder einer Zerstreuungslinse) in der Zeichnung als solche Strecken erscheinen, welche nicht auf den ursprünglich angenommenen Linien, sondern auf den Verlängerungen derselben über den Scheitelpunkt hinaus liegen. Die Länge $c = 2f\cos\varphi$ aber wird gefunden, indem man auf den einen Schenkel des Winkels 2φ vom Scheitel aus die Strecke $2f$ aufträgt, und vom anderen Endpunkte derselben die Senkrechte auf die Halbierungslinie zieht. Man ist also in der Wahl der Gröfse des Winkels 2φ keineswegs durch irgend eine Rücksicht auf die mehr oder minder einfache Bestimmung des Schnittpunktes der Halbierungslinie beschränkt, wie es den Anschein hat, wenn man die Sätze von d'Ocagne und Häbler für sich allein betrachtet.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch auf eine andere Darstellungsweise aufmerksam machen, welche einen klaren Überblick über den ganzen Verlauf der conjugierten Bildweiten (a und b) gestattet, und auf der Verwendung der Formel $x \cdot y = f^2$ [Joh. Müller, d. Z. IV. 279] beruht. Um dabei den von Hrn. K. L. Bauer [d. Z. VI. 367] gegen Müllers Darstellung erhobenen Einwänden auszuweichen, sagen wir, wie folgt:

Die Gültigkeit der Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ vorausgesetzt, setzen wir zunächst $a = mf$ und $b = nf$, d. h. wir wählen die Brennweite zum Maſse der Längen a und b. Dann wird $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$. Setzt man ferner $m = x + 1$, und $n = y + 1$, so ergiebt sich leicht, daſs $xy = 1$ sein muſs. Die Werte von x und y sind also die Koordinaten der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt. Legen wir aber durch den Scheitel des negativen Astes der Hyperbel, d. i. durch den Punkt $x = -1, y = -1$ zwei neue den Asymptoten der Hyperbel parallele Achsen, so sind die von diesen Achsen aus gemessenen Koordinaten der Hyperbelpunkte die conjugierten Bildweiten m und n. Die dazu nötige Hyperbel $xy = 1$ findet man u. a. im „graphisch mechanischen Apparate zur Auflösung numerischer Gleichungen“ von Prof. Dr. C. Reuschle*) im Maſsstabe $2^{cm} = 1$ mit Genauigkeit gezeichnet.

Hat man es mit Zerstreuungslinsen zu thun, so findet man aus der Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$ zunächst $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = -1$, und wenn man $m = x - 1$, $n = y - 1$ setzt, wieder $xy = 1$. Man hat also die Werte von m und n von einem anderen Achsensysteme aus zu messen, welches durch den Scheitel des positiven Hyperbelastes ($x = 1, y = 1$) geht.

Nachschrift.

Seit der Einsendung der vorstehenden Mitteilung an die Redaktion d. Z. erschien im Novemberhefte der Zeitschr. f. Instrumentenkunde, VI, 396 ein mit Ln. gezeichnetes Referat über d'Ocagnes Arbeit, welches noch einen anderen einfachen Weg angiebt, auf welchem die zusammengehörigen Werte von a, b, f, durch Zeichnung gefunden werden können. Der Vollständigkeit wegen sei hier darauf verwiesen; ferner auch auf die von Herrn Realschulrektor W. Neu in Neuburg a./D. in der Zeitschr. z. Förderung des physik. Unterr. 1885, S. 2 beschriebene mechanische Vorrichtung zur an-

---

*) Ds. Z. XVI. 610. Nebenbei sei bemerkt, daſs das Bedenken bezüglich der Anwendung einer Gelatinetafel in diesem Apparate, welches ich gelegentlich der Anzeige desselben in der Wiener Ztschr. f. d. Realschulwesen, XI. 434 ausgesprochen habe, seither behoben ist.

schaulichen Darstellung der konjugierten Punkte. Eine für Schulzwecke besonders geeignete bildliche Darstellung der Lagen der konjugierten Bildpunkte hoffe ich demnächst veröffentlichen zu können.

Sprech- und Diskussions-Saal.

Entgegnung auf die „Erwiderung" des Hrn. Oberl. Dr. Weidenmüller. Jahrg. XVII., 510 u. flg.

Von Dr. C. Müller in Fulda.

Eine eingehende Erwiderung auf die Entgegnung des Herrn Oberl. Dr. Weidenmüller-Marburg in Heft 7 d. Zeitschrift halte ich für überflüssig, da der in Frage stehende Vortrag nunmehr in jenem Hefte abgedruckt ist.*) Übrigens hatte ich schon bei Einsendung meines ersten Artikels, wenn ich nicht sehr irre, den Wunsch geäufsert, dafs der Vortrag sofort abgedrukt würde. Jedenfalls aber hegte der Herr Herausgeber, wie ich mich sicher erinnere, eine dahin zielende Absicht, deren Ausführung wohl nur aus zufälligen Gründen unterblieben ist.**)

Die Herren Fachgenossen werden nun leicht die Vorzüge bezw. Mängel beider Ansichten herausfinden, namentlich werden sie entscheiden können, ob meine Abhandlung mehrfach Ansichten bekämpft, die gar nicht oder wenigstens nicht so ohne weiteres von Hr. Weidenmüller ausgesprochen worden sind.

Hinzufügen will ich nur noch, dafs ich als Schüler und Lehrer längere Zeit Mineraliensammlungen zu verwalten gehabt habe, als Herr W. anzunehmen scheint.***)

---

*) S. 541 u. f. D. Red.

**) Der Abdruck wär eher nicht möglich. D. Red.

***) Wir wollen hiermit diesen Meinungsstreit, der von dem Art. des Hrn. Dr. Müller Hft. 5, S. 331 seinen Ausgang nahm, in da. Z. abschliefsen. D. Red.

Zum Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Prof. Dr. LIEBER-Stettin unter Mitwirkung von C. MÜSEBECK-Waren.

A. Auflösungen.

596. (Gestellt von Bermann XVII_4, 287.) Wie grofs ist die Summe der als Produkte aufgefafsten Amben und Ternen der n ersten natürlichen Zahlen und zwar der betreffenden Kombinationen a) ohne b) mit Wiederholung.

1. Auflösung. Die Summe der Amben ohne Wiederholung sei S_2, der mit Wiederholung S'_2. Da nun $\left(\sum n\right)^2 = \sum n^2 + 2S_2$, so ist $2S_2 = \left(\sum n\right)^2 - \sum n^2 = \binom{n+1}{2}^2 - \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$ $= \binom{n+1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right)$ oder $S_2 = \binom{n+1}{3}\frac{3n+2}{4}$. Ferner ist $S'_2 = S_2 + \sum n^2 = \binom{n+2}{3}\frac{3n+1}{4}$. — Die Summe der Ternen ohne Wiederholung sei S_3, der mit Wiederholung S'_3. Da $\left(\sum n\right)^3$ $= \sum n^3 + 3\sum x^2y + 6S_3$, wo $\sum x^2y$ die Summe aller möglichen Produkte von der Form x^2y aus den Zahlen 1 bis n bedeutet, jedoch so, dafs x und y stets verschiedene Werte haben; und da $\sum x^2y = \sum n^2 \sum n - \sum n^3$ ist, so ist $\left(\sum n\right)^3 = 3\sum n^2 \sum n$ $- 2\sum n^3 + 6S_3$. Setzt man $\left(\sum n\right)^3 = \binom{n+1}{2}^3$; $\sum n^3 = \binom{n+1}{2}^2$; $\sum n = \binom{n+1}{2}$ und $\sum n^2 = \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$, so erhält man nach einigen Reduktionen $S_3 = \binom{n+1}{4}\binom{n+1}{2}$. Ferner ist $S'_3 = S_3$ $+ \sum n^3 + \sum x^2y = \binom{n+3}{4}\binom{n+1}{2}$

BLIND (Köln). BÖCKING (Colmar). EMMERICH (Mülheim a. d. R.). KOKOTT (Ratibor). MEINEL (Fürth). SIEVERS (Frankenberg i. S.). STOLL (Bensheim).

2. Auflösung. Die Summe der Ambenprodukte S ist gleich $1(1 + 2 + \cdots n) + 2(3 + 4 + \cdots n) + \cdots (n-2)((n-1) + n)$

$+(n-1)n=\frac{1}{2}[(n+2)(n-1)+2(n+3)(n-2)+\cdots(n-2)$ $(n+(n-1))(n-(n-2))+(n-1)(n+n)(n-(n-1))]$ $=\frac{1}{2}[(n^2+n-1^2\cdot 2)+(2n^2+2n-2^2\cdot 3)+\cdots((n-1)n^2$ $+(n-1)n-(n-1)^2 n)]=\frac{n^2(n^2-1)}{4}-(1+6+18+40$ $+75)=\frac{n^2(n-1)}{4}-A$. Die Differenzreihen von A sind a) 5, 12, 22, 35, ... b) 7, 10, 13, .. c) 3, 3, ...; also $A=(n-1)$ $+\binom{n-1}{2}5+\binom{n-1}{3}7+\binom{n-1}{4}3$, also $S=\binom{n+1}{3}\frac{3n+2}{4}$. Analog lassen sich die übrigen Formeln entwickeln.

Vollhering (Bautzen).

3. Auflösung. Als allgemeines Glied der Summe S_2 ergiebt sich, wie man sofort aus der Summe der Glieder, die den Faktor n gemeinsam haben, ersieht: $\frac{k^2(k-1)}{2}$, so dafs $S_2=\frac{1}{2}\left[\sum_2^n k^3-\sum_2^n k^2\right]$ $=\binom{n+1}{3}\frac{3n+2}{4}$. Analog ergiebt sich als allgemeines Glied von S'_2: $\frac{k^2(k+1)}{2}$, von S_3: $\frac{k^2(k-1)(k-2)(3k-1)}{4!}$ und von S'_3: $\frac{k^2(k+1)(k+2)(3k+1)}{4!}$, woraus sich die in der 1. Aufl. angegebenen Formeln durch Bestimmung der einzelnen Summen ableiten lassen.

Beermann (Liegnitz). End (Würzburg). Nisteo (Zara).

Anmerkung. Die Lösung dieser Aufgabe folgt unmittelbar aus den No. 372, XV, 439 und No. 505, XVI, 592 entwickelten Rekursionsformeln. Vergleiche auch XVII_6, 440 Anmerkung.

Fuhrmann (Königsberg i. Pr.). Schlömilch. Stoll.

(597—598.) (Gestellt von Szimányi XVII_4, 287.) Jemand legt n Jahre hindurch am Anfange eines jeden Jahres verschiedene Beträge in ein Geldinstitut. Zu welcher Summe wachsen die gesamten Einlagen bei $p\%$ Zinseszins nach Ablauf des $n$ten Jahres an, die erste Einlage s Mark vorausgesetzt,

597. Wenn jede folgende Einlage um den $r$ten Teil der vorangehenden und a Mark gröfser ist?

Auflösung. Es werde $1+\frac{1}{r}=\varrho$ und $1+\frac{p}{100}=q$ gesetzt. Die Einlagen zu Anfang der n Jahre sind dann: s, $s\varrho+a$, $s\varrho^2+a\varrho+a$, $\cdots s\varrho^{n-1}+a\varrho^{n-2}+\cdots a\varrho+a$ oder s, $s\varrho+\frac{a(\varrho-1)}{\varrho-1}$, $s\varrho^2+\frac{a(\varrho^2-1)}{\varrho-1}$, $\cdots s\varrho^{n-1}+\frac{a(\varrho^n-1)}{\varrho-1}$. Die gesuchte Summe ist demnach $S+T-V$, wo

$$S=s(q^n+\varrho q^{n-1}+\cdots \varrho^{n-1}q)=\frac{sq(\varrho^n-q^n)}{\varrho-q};$$

$$T = \frac{a}{\varrho - 1}\left(\varrho q^{n-1} + \varrho^2 q^{n-2} + \cdots \varrho^n q\right) = \frac{a\varrho q\,(\varrho^{n-1} - q^{n-1})}{(\varrho - 1)(\varrho - q)}$$

$$\text{und } V = \frac{a}{\varrho - 1}\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots q\right) = \frac{aq\,(q^{n-1} - 1)}{(\varrho - 1)(q - 1)}.$$

Bermann. Böcking. Emmerich. End. Fuhrmann Hodum (Stassfurt). Meinel. Sievers. Stoll. Szimányi (Trenchin).

598. Wenn die zweite Einlage $s + \frac{s}{r} + a$, die dritte um den $r$ten Teil der zweiten Einlage $+ 2a$ Mark gröfser war u. s. w.; die $n$te Einlage um den $r$ten Teil der $(n-1)$ten Einlage $+ (n-1)a$ Mark gröfser war?

Auflösung. Wird wieder $1 + \frac{1}{r} = \varrho$ und $1 + \frac{p}{100} = q$ gesetzt, so sind die successiven Einlagen zu Anfang der n Jahre s, $s\varrho + a$, $s\varrho^2 + a(\varrho + 2)$, $s\varrho^3 + a(\varrho^2 + 2\varrho + 3) \cdots\cdot s\varrho^{n-1} + a(\varrho^{n-2} + 2\varrho^{n-3} \cdots + (n-1))$. Da nun $x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \cdots n = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ ist, so sind die betreffenden Einlagen $s, s\varrho + a\frac{\varrho^2 - 2\varrho + 1}{(\varrho - 1)^2}, s\varrho^2 + a\frac{\varrho^3 - 3\varrho + 2}{(\varrho - 1)^2}, s\varrho^3 + a\frac{\varrho^4 - 4\varrho + 3}{(\varrho - 1)^2}, \cdots s\varrho^{n-1} + a\frac{\varrho^n - n\varrho + (n-1)}{(\varrho - 1)^2}$. Die gesuchte Summe ist demnach $= S + T - V + U$, wo

$$S = sq^n + s\varrho q^{n-1} + \cdots\cdot s\varrho^{n-1}q = \frac{sq\,(\varrho^n - q^n)}{\varrho - q};$$

$$T = a\varrho^2 q^{n-1} + a\varrho^3 q^{n-2} + \cdots a\varrho^n q = \frac{a\varrho^2 q\,(\varrho^{n-1} - q^{n-1})}{(\varrho - 1)^2(\varrho - q)};$$

$$V = \frac{2a\varrho q^{n-1} + 3a\varrho q^{n-2} \cdots\cdot + na\varrho q}{(\varrho - 1)^2} = \frac{a\varrho q\,(2q^{n-2} + 3q^{n-3} \cdots + n)}{(\varrho - 1)^2}$$

$$= \frac{a\varrho q}{(\varrho - 1)^2}\left[\frac{q^{n+1} - (n+1)q + n}{(q-1)^2} - q^{n-1}\right] = \frac{a\varrho q(2q^n - q^{n-1} - (n+1)q + n)}{(\varrho - 1)^2(q-1)^2};$$

$$U = \frac{aq\,(q^{n-2} + 2q^{n-3} \cdots + (n-1))}{(\varrho - 1)^2} = \frac{aq\,(q^n - nq + (n-1))}{(\varrho - 1)^2(q-1)^2}$$

Bermann. Emmerich. End. Fuhrmann. Hodum. Meinel. Sievers. Stoll. Szimányi

599. (Gestellt von Haag XVII$_4$, 287.) Wieviel Würfel, deren Kante gleich $\frac{1}{n}$ a) der Halbachse eines Oktaeders b) der Achse eines Tetraeders ist, lassen sich im ersten Fall in ein Oktaeder, im zweiten in ein Tetraeder beschreiben?

Auflösung. a) Betrachtet man ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel gleich den Halbachsen des Oktaeders sind, so sieht man, dafs sich die ersten Würfel bei $n = 4$ konstruieren lassen und zwar entstehen $8 \cdot 4 = 32$ Würfel. Ähnlich

findet man durch Zeichnung, dafs bei $n = 5, 6, 7$ resp. $8 \cdot 10 = 80$; $8 \cdot 20 = 160$; $8 \cdot 35 = 280$ Würfel entstehen. Nun sind 4, 10, 20, 35,.. die zweite, dritte, vierte, fünfte figurierte Zahl dritter Ordnung; da die $(n - 2)$te figurierte Zahl dritter Ordnung $\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ ist, so ist die Anzahl der eingeschriebenen Würfel $\frac{4}{3}(n-2)(n-1)n = 8\binom{n}{3}$. BÜCKING. EMMERICH. HAAG (Rottweil).

b) Man findet leicht durch Zeichnung, dafs sich in der ersten Reihe $n - 2$, in der zweiten $2(n-3) + (n-4)$, in der dritten $3(n-4) + 2(n-5)$ u. s. w. Würfel befinden müssen; mithin wird die Summe der Würfel dargestellt durch $(n-2) + 2(n-3) + (n-4) + 3(n-4) + 2(n-5) + 4(n-5) + 3(n-6) + \cdots (n-3)2 + (n-4)1 + n - 2 = p + 2(p-1) + 4(p-2) + 6(p-3) + \cdots 2(p-1)(p-(p-1))$, wo $n - 2 = p$ gesetzt ist. Dieser Ausdruck ist gleich $p + 2p + 4p + \cdots (2p-2)p - (2 + 8 + 18 + \cdots 2(p-1)^2) = p + 2p(1 + 2 + \cdots p - 1) - 2(1 + 4 + 9 + \cdots (p-1)^2) = p\frac{p^2+2}{3} = \frac{(n-2)(n^2-4n+6)}{3}$

HAAG.

600. (Gestellt von Holzmüller XVII_4, 288.) Legt man durch zwei Punkte je drei beliebige Gerade, zählt die durch den einen gehenden als 1te, 3te, und 5te, die durch den anderen gehenden als 2te, 4te, 6te, bezeichnet ferner den Schnittpunkt der 1ten und 2ten mit I, den der 2ten und 3ten mit II,... den der 6ten und 1ten mit VI, so gehen die Verbindungslinien $\overline{\text{I IV}}$, $\overline{\text{II V}}$, $\overline{\text{III VI}}$ durch einen Punkt.

Der Beweis dieses Satzes, welcher ein Specialfall des Satzes von Brianchon ist, ist bereits bekannt, weshalb hier nur auf die betreffenden Werke aufmerksam gemacht wird. Vergleiche Steiner. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. S. 92. — Steiner-Schroeter. Theorie der Kegelschnitte §§ 20, 21. S. 81 u. flgd. — Fuhrmann. Einleitung in die neuere Geometrie S. 26. Satz 18. — Fiedler. Darstellende Geometrie § 18 (Erste Auflage.) Ein analytisch-geometrischer Beweis findet sich in Plücker, Analytisch geometrische Entwickelungen I. S. 70.

BEYENS. BÜCKING. EMMERICH. FUHRMANN. HOLZMÜLLER (Hagen). KOBER (Schollwitz). MEINEL. SCHMIDT (Spremberg). SIEVERS. STAMMER (Düsseldorf). STOLL. THIEME (Posen).

601. (Gestellt von Schlömilch XVII_4, 288). Aus den Seiten $a < b < c < d$ sei ein Sehnenviereck konstruiert, dessen Fläche E sei; ist nun d nicht nur $> c$, sondern auch $> c + b - a$, so läfst sich aus den Seiten $d - a$, $d - b$, $d - c$, ein Dreieck bilden, dessen Fläche F sei; es ist nun $F^2 = \left(\frac{d}{m} - 1\right)(abcd - E^2)$, wo $m = \frac{a + b + c + d}{4}$ ist.

Beweis. Nach einer bekannten Formel ist $16E^2 = ((c+d) - (a-b))((c+d)+(a-b))((a+b)-(c-d))((a+b)+(c-d)) = 8abcd + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + \cdots c^2d^2) - (a^4 + \cdots d^4)$. Ferner ist $16F^2 = (3d - (a+b+c))(d+a-b-c)(d-a+b-c)(d-a-b+c)$ und daher $\frac{16\,m}{d-m}F^2 = (d+a+(b+c))(d+a-b+c)(d-a+(b-c))(d-a-(b-c)) = 8abcd - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + \cdots\cdot c^2d^2) + (a^4 + \cdots d^4)$. Folglich $16E^2 + \frac{16m}{d-m}F^2 = 16abcd$ und hieraus $F^2 = \left(\frac{d}{m} - 1\right)(abcd - E^2)$

BERMANN. EMMERICH. FUHRMANN. HELM (Liegnitz). MEIXEL. SCHLÖMILCH. SCHMIDT. SIEVERS. STEGEMANN (Prenzlau). STOLL.

602. (Gestellt von Sporer XVII_4, 288 — Verallgemeinerung von Nr. 547 XVII_4, 286). Haben zwei Kegelschnitte dieselbe Leitlinie, so liegen deren vier gemeinsame Punkte auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungslinie der zur Leitlinie gehörenden Brennpunkte liegt.

Beweis. A und B seien zwei der vier Schnittpunkte, A_1, B_1 die Fuſspunkte der von A und B auf die gemeinschaftliche Leitlinie gefällten Lote F_1 und F_2 die zu der Leitlinie gehörenden Brennpunkte der beiden Kegelschnitte. Dann ist $AA_1 : AF_1 = BB_1 : BF_1$ und $AA_1 : AF_2 = BB_1 : BF_2$; mithin $AF_1 : AF_2 = BF_1 : BF_2$. Daher liegen A und B auf dem Apollonischen Kreise, dessen Mittelpunkt auf F_1F_2 liegt und der F_1F_2 im Verhältnis $AF_1 : AF_2$ harmonisch teilt. Vergleicht man A mit einem der anderen Schnittpunkte, so ergiebt sich dasselbe Resultat.

BEYENS. BERMANN. BÜCKING. EMMERICH. FUHRMANN. HODUM. KOBER. MEIXEL. SCHMIDT. SIEVERS. SPORER (Weingarten). STEGEMANN. STOLL.

603. (Gestellt von Sporer XVII_4, 288.) Haben zwei Kegelschnitte denselben Brennpunkt F, so liegen die vier Schnittpunkte zweimal zu zwei mit dem Schnittpunkt der beiden zu dem Brennpunkt gehörenden Leitlinien L_1 und L_2 in gerader Linie.

Beweis. Von den Schnittpunkten A und B seien auf L_1 die Senkrechten AA_1 und BB_1, und auf L_2 die Senkrechten AA_2 und BB_2 gefällt; dann ist $AA_1 : AF = BB_1 : BF$ und $AA_2 : AF = BB_2 : BF$ mithin $AA_1 : AA_2 = BB_1 : BB_2$. Daher liegen A und B mit dem Durchnittspunkte von L_1 und L_2 auf der Geraden, welche $\sphericalangle\,(L_1L_2)$ so teilt, daſs das Verhältnis der Leitlinien ein bestimmtes ist. Dasselbe gilt für die beiden anderen Schnittpunkte C und D.

BEYENS. BERMANN. BÜCKING. EMMERICH. FUHRMANN. HODUM. KOBER. MEIXEL. SCHMIDT. SIEVERS. SPORER. STEGEMANN. STOLL.

Anmerkung. AB und CD sind im Bezug auf L_1 und L_2 harmonisch konjugiert. STEGEMANN. STOLL.

Sätze über den Brocard'schen Kreis.

604. (Gestellt von Stoll XVII_4, 288.) a) E ist Schwerpunkt des Dreiecks $RH'N$; daher liegen R, E, W in gerader Linie und es ist $RE = 2\,WE$. b) Die Punkte R, S und S' liegen in gerader Linie.

a) Beweis. Da $HR = HN$ und $EH : EH' = 1:2$, so ist E der Schwerpunkt des Dreiecks $RH'N$ und $RE = 2\,WE$, da W die Mitte von NH' ist. Mithin liegen R, E, W in einer geraden Linie.
EMMERICH. FUHRMANN. STOLL.

b) 1. Beweis. H_a sei der Mittelpunkt von BC und A'_5 der Spiegelpunkt von A' in Bezug auf BC. Es ist $A\,(A'\,A'_5\,H_a\,H')$ harmonisch, also $A\,(DS'\,EH')$ harmonisch, da AA'_5 durch S geht. Da A, D, S', E, H' und N auf der Hyperbel Γ liegen, so ist $N(D\,S'\,E\,H')$ harmonisch. Nun ist HH' die Polare von K in Bezug auf die Hyperbel Γ, also sind KH' und KE die Tangenten von K an die Hyperbel, denn HH' schneidet die Hyperbel in E. Mithin ist auch $E\,(D\,S'\,E\,H')$ oder $E\,(S\,S'\,K\,H)$ harmonisch. Da noch $S\,D'\,K\,H$ harmonisch sind, so geht ES' durch D'. Die Diagonale $D'E$ des Vierseits HD', HI, DS, DD' mit den Ecken H, D, E, D', S, I mufs durch DH und SI harmonisch geteilt werden. Da aber $N(H\,S'\,E\,D')$ harmonisch ist, so mufs S' der zweite Teilpunkt sein, da der eine auf NH liegt. Die Diagonale SI geht also durch S'. Ist also SIR eine Gerade, so ist es auch $SS'R$. Dreieck HDD' wird durch SI geschnitten und der Schnittpunkt von HD und SI sei X, dann ist $\frac{HX}{DX}\cdot\frac{DI}{ID'}\cdot\frac{D'S}{SH} = 1$, $DI : ID' = DH' : HD' = ND : NH = \cos\vartheta + \cos 3\vartheta : \cos\vartheta$, also $DI : ID' = 2\cos 2\vartheta : 1$; $DS : SH = \sin 2\vartheta^2 : 2\cos\vartheta^2 \cos 2\vartheta = 2\sin\vartheta^2 : \cos 2\vartheta$, also $\frac{HX}{DX} = \frac{1}{4\sin\vartheta^2}$. Da nun $HR : DR = \cos\vartheta : \cos\vartheta - \cos 3\vartheta = 1 : 4\sin\vartheta^2$, so fallen X und R zusammen und SIR ist eine Gerade.
EMMERICH. FUHRMANN.

2. Beweis. Aus den Gleichungen der Senkrechten, die auf AN in A und auf BN in B errichtet sind, findet man die Koordinaten von R, welche der Gleichung von SS' genügen. STOLL.

Anmerkung. $SI\,S'R$ liegen harmonisch. FUHRMANN.

605. (Gestellt von Stoll XVII_4, 288.) a) Die Punkte D, F, Z' (F Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises) liegen in gerader Linie und es ist $DF = 3\,FZ'$. b) Die Punkte N, S', F liegen in gerader Linie.

a) 1. Beweis. $Z'E = \frac{1}{3}H'D$, $FE = \frac{1}{3}FH'$ und $\sphericalangle FEZ' = FH'D$, mithin $\triangle Z'FE \sim H'FD$, also $\sphericalangle Z'FE = H'FD$ und $DF = 3\,FZ'$.
FUHRMANN. STEGEMANN. STOLL.

2. Beweis. Die Determinante aus den Koordinaten von D, F und Z' gebildet verschwindet, mithin liegen D, F, Z' in einer Geraden. Sonst wie 1. Beweis. EMMERICH.

b) 1. Beweis. In Nr. 604, b) 1. Bew. war gezeigt, dafs $N(DS'EH')$, also auch $N(HS'EH')$ harmonisch sind. Da auch $N(HFEH')$ harmonisch ist, so ist NS' und NF derselbe Strahl, also $NS'F$ eine Gerade. FUHRMANN.

2. Beweis. EZN ist eine Gerade. Ferner bilden NE, ZH', ED' und $H'N$ ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen $D'H$ und $H'H$ sich in H schneiden und dessen dritte Diagonale NS' ist, weil $D'E$ und $H'Z$ sich in S' schneiden. Diese trifft HH' in dem zu H in Bezug auf H', E konjugiert harmonischen Punkt, d. h. in F. STEGEMANN.

3. Beweis. Aus den Koordinaten von N und F findet man die Gleichung von NF, welcher die Koordinaten von S' genügen. EMMERICH. STOLL.

B. Neue Aufgaben.

648. Welche mittlere lineare Geschwindigkeit (v) besitzt ein bestimmter Punkt in der Peripherie eines kreisrunden, gleichmäfsig schnell in gerader Richtung auf einer Ebene fortrollenden Rades von da ab, wo dieser Punkt die Ebene berührt bis dahin, wo das Rad die erste Viertel-, die zweite Viertel-, und die volle Umdrehung gemacht hat, wenn die Radhöhe $= h$ und die Zeit seiner Umdrehung $= t$ ist? FLEISCHHAUER (Gotha).

649. Es soll der Inhalt eines Prismatoids aus seiner Höhe und zwei näher zu bestimmenden ebenen Schnittfiguren angegeben werden, wenn letztere auf verschiedenen Seiten des Mittelschnitts und ihm im gleichen Abstande parallel gelegen sind. WEINMEISTER (Tharand).

650. Gegeben ist ein Prismatoid mit den Grundflächen k und g, dem Mittelschnitt m, und der Höhe h; man soll eine der Grundfläche parallele Ebene legen a) so dafs dieselbe eine Schicht abschneidet, welche so grofs ist wie das über der Schnittfigur stehende gleich hohe Prisma. b) welche den Körper und die Höhe in demselben Verhältnis teilt. WEINMEISTER (Tharand).

651. Aufgabe aus der beschreibenden Geometrie. a) die Projektionen einer geraden Linie zu bestimmen, welche mit den Projektionsebenen die Winkel α und β bildet und von einem durch seine Projektionen gegebenen Punkt den Abstand e hat b) die Spuren einer Ebene zu bestimmen, welche mit den Projektionsebenen I und II die Winkel α und β bildet und von einem gegebenen Punkt P den Abstand e hat. PIRPORAS (Mülheim a. d. Ruhr).

652. In eine gegebene Ellipse soll ein gleichseitiges Sehnensechseck konstruiert werden, wovon zwei Gegenseiten a) parallel zur grofsen Achse, b) parallel zur kleinen Achse liegen. Um eine gegebene Ellipse soll ein gleichseitiges Tangentensechseck konstruiert werden, wovon zwei Gegenseiten a) parallel zur grofsen Achse, b) parallel zur kleinen Achse liegen. SCHLÖMILCH

653. Durch die rechtwinkligen Koordinaten $OA = a$, $AB = b$ ist ein Punkt B bestimmt und über OB als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben; wird nun diejenige gleichseitige Hyperbel konstruiert, welche durch B geht und die Koordinatenachsen zu Asymptoten hat, so schneiden sich Kreis und Hyperbel in einem Punkte D, dessen Koordinaten sind: $OC = \sqrt[3]{ab^2}$ und $CD = \sqrt[3]{a^2b}$.

Kukujay (Mikolcs).

654. Sind irgend zwei aufeinander senkrecht stehende Strecken AC und BD gegeben und konstruieren wir ein Rechteck so, daſs das eine Parallelenpaar durch A und C, das andere durch B und D geht, so hat das Rechteck eine feste Form, indem sich dessen Seiten wie $AC : BD$ verhalten, seine Mittelpunkte auf einem Kreise liegen und seine Diagonalen durch zwei feste Punkte P und Q dieses Kreises gehen. Sind D und E Halbierungspunkte von AC und BD, so ist DE Durchmesser dieses Kreises und $PQ \perp DE$. — Ist insbesondere D Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so wird der Kreis zum Feuerbachschen Kreise des Dreiecks und die Umkreise der Rechtecke gehen durch den Schnittpunkt O von AC und BD und die Punkte P und Q werden zu Höhenfuſspunkten. Sporer (Weingarten).

655. (Im Anschluſs an Nr. 399—407, XV, 359.) Man konstruiere über den Seiten eines Dreiecks ABC die gleichseitigen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1, deren Mittelpunkte A_2, B_2, C_2 seien. Dann schneiden sich AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkte P_1, AA_2, BB_2, CC_2 in einem Punkte P_2. Dies ist bekannt. Daran schlieſsen sich noch folgende Eigenschaften: a) M, P_1, P_2 liegen in einer Geraden (M Mittelpunkt des Umkreises) b) ABC und $A_1B_1C_1$ haben dieselbe Kollineationsachse wie ABC und $A_2B_2C_2$. c) Diese Kollineationsachse ist senkrecht zu MP_1P_2 d) P_2 ist Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises zu $A_1B_1C_1$ e) Der Winkelgegenpunkt von P_1 im Dreieck $A_2B_2C_2$ ist M. Fuhrmann (Königsberg i. Pr.).

656. Die Fuſspunkte der Lote, welche von zwei Ecken eines Dreiecks auf die Halbierungslinien ihrer Winkel gefällt sind, liegen in der der dritten Ecke entsprechenden Berührungssehne des eingeschriebenen Kreises. Kober (Schollwitz).

657. Einen Kreis zu zeichnen, so daſs die Tangenten von zwei gegebenen Punkten P und Q ein Viereck $ABCD$ umschlieſsen, dessen Winkel denen eines gegebenen Vierecks $abcd$ gleich sind.

Emmerich (Mühlheim a. d. R.).

C. Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften.

Sätze und Aufgaben über Kegelschnitte.

(Die mit † versehenen Auflösungen sind von den Herren Aufgaben-Redakteuren hinzugefügt.)

309. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus $\sphericalangle \gamma$ und den beiden Strecken $CD = d$ und $CE = e$, welche von C ausgehend AB im Verhältnis $m : n : p$ teilen.

1. Analysis.† $A'B' \parallel AB$ werde von CD und CE in D' und E', welche auf $A'B'$ bestimmt sind, getroffen. Ein Ort für C ist der Bogen über $A'B'$ mit dem Peripheriewinkel γ. Ferner kennt man vom $\triangle D'E'C$ die Seite $D'E'$ und das Verhältnis $CD' : CE' = d : e$, daher ist ein zweiter Ort für C der Apollonische Kreis. $\triangle ABC$ ist also der Gestalt nach bestimmt.

2. Analysis. Die Parallele durch E zu DC treffe CB in F und AC in H. Dann ist $EF : d = p : p + n$ und $EH : d = m + n : m$, also sind EF und EH bestimmt. Ein Ort für C ist der Kreis über FH mit dem Peripheriewinkel $180^0 - \gamma$, der zweite Ort der Kreis mit e um E. D ist bestimmt durch $CD \parallel HE$ und $CD = d$.

Mathesis.

310. Ein Dreieck zu konstruieren aus $h_c = CD$, $t_c = CE$ und $a - b : c = m : n$.

1. Analysis. $\triangle CDE$ bestimmt und Punkt F, wenn man CE über E um CE bis F verlängert. Ferner ist $a - b = \frac{mc}{n}$ und $a^2 - b^2 = 2\,DE \cdot c$; folglich $a + b = \frac{n}{m} \cdot 2\,DE$; also kennt man vom $\triangle CFB : CF$, $BC + BF$ und einen Ort für die Spitze B (Vergl. Lieber und v. Lühmann, Geom. Konstr.-Aufg. § 66, a)

2. Analysis. In No. 272, Anm. XVI, 505 ist bewiesen, dafs der um E mit $\frac{a-b}{2}$ beschriebene Kreis die über AC und BC als Durchmesser beschriebenen Kreise berührt und zwar liegen die Berührungspunkte auf der Halbierungslinie von $\sphericalangle \gamma$. Hiernach läfst sich ein $\triangle A'B'C'$ konstruieren, welches sich mit ABC in Bezug auf den Ähnlichkeitspunkt E in Ähnlichkeitslage befindet. Trägt man auf ED von E aus $EA' = n$ ab, dann ist der über $A'C'$ beschriebene Kreis dadurch bestimmt, dafs er durch A' geht, dafs sein Mittelpunkt auf einer durch die Mitte von EA' zu CE gezogenen Parallelen liegt und dafs er den mit m um E beschriebenen Kreis berührt.

Mathesis.

311. Gegeben ist $\triangle ABC$; man soll ein anderes gegebenes $\triangle A'B'C$ so mit seinem Eckpunkt C auf den Eckpunkt C des ersten Dreiecks legen, dafs sich $\triangle CAA' : CBB' = m : n$ verhält.

Analysis.† $\triangle A'B'C$ liege ganz innerhalb des Dreiecks ABC. Fällt man $AF \perp CA'$ und $BG \perp CB'$, so ist $CA' \cdot AF : CB' \cdot BG = m : n$ oder $AF : BG = m \cdot CB' : n \cdot CA'$. Dreht man nun $\triangle CB'B$ in die Lage CDE, so dafs CB' auf CA' zu liegen kommt und fällt $EH \perp CA'$, so ist $EH = BG$. Wird nun $\sphericalangle ACA'$ mit x, $\sphericalangle BCB'$ mit y, $\sphericalangle ACB$ mit γ und $\sphericalangle A'CB'$ mit γ' bezeichnet, so ist $x + \gamma' + y = \gamma$, also $x + y = ACE = \gamma - \gamma'$; mithin Punkt E bestimmt und AE; AE treffe CH in L, so ist $AL : EL = AF : EH = m \cdot CB' : n \cdot CA'$; also CL bestimmt u. s. w.

Tidsskrift.

312. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, welches dem gegebenen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ähnlich ist und mit dem in denselben Kreis beschriebenen Dreieck $A'B'C'$ perspektivisch ist.

Analysis. Da die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch sind, so müssen sich AA', BB', CC' in einem Punkte P schneiden. Liegt P innerhalb des Kreises, so ist $\sphericalangle A'PB' = AB'P + PAB' = \gamma + C'$; daher ist der Kreis über $A'B'$ mit dem Peripheriewinkel $\gamma + C'$ ein Ort für P. Da $\sphericalangle A'PC' = PA'C + PCA' = \beta + B'$, so ist der Kreis über $A'C'$ mit dem Peripheriewinkel $\beta + B'$ ein zweiter Ort für P. — Liegt P außerhalb des Kreises, so sind die betreffenden Winkel $C' - \gamma$ und $B' - \beta$. Mathesis.

313. Ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren aus den Projektionen M, N, P, Q des Diagonalenschnittpunktes E auf die Seiten AB, BC, CD, DA.

Analysis. AB und CD mögen sich in F (AD zwischen F und BC), AD und BC in G (CD zwischen G und AB) schneiden. $AMEQ$, $BMEN$, $CNEP$, $DPEQ$ sind Sehnenvierecke. Nun ist $\sphericalangle AFD = CAB - ACF = EQM - ENP$ und $\sphericalangle AFD = BDC - FBD = EQP - ENM$. Durch Addition beider erhält man $\sphericalangle AFD = \frac{PQM - PNM}{2}$, also $\sphericalangle F$ bekannt. Vom $\triangle MPF$ kennt man also die Seite MP und den gegenüberliegenden Winkel F, also ist der Kreis um $MFPE$ bestimmt. Ebenso kennt man vom $\triangle QNG$ eine Seite NQ und den gegenüberliegenden Winkel $G = \frac{NPQ - NMQ}{2}$, also ist der Kreis um $QENG$ bestimmt; E ist der Durchschnittspunkt beider Kreise u. s. w. Mathesis.

Druckfehler-Berichtigung.

XVII$_1$, 38. In Nr. 522 letzte Zeile muſs es heiſsen Nr. 400 (XV$_5$, 359 und XVI$_1$, 18).

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

(Bis 31. XII. 1886.)

Auflösungen sind eingegangen von: Drees-Oldenburg 626. 629. 634; Emmerich 617. 618. 620. 621. 623—625. 627—629. 632—636; End-Würzburg 627a—c. 628; Fuhrmann 626. 628. 629. 631—636; Hodum-Staſsfurt 610. 612. 617—624. 626—629. 631. 633. 634; v. Morini-Bielitz 627—629; Niseteo-Zara 612. 618. 628; Schlegel-Hagen 626; Schmidt 616—624; Sievers-Frankenberg 616—618. 620. 621. 626—629. 634; Stegemann-Prenzlau 626. 628. 631. 632. 634—636; Stoll-Bensheim 627—629. 631. 632; Valta-München 626. 628. 629. 633. 634.

Neue Aufgaben: Weidenmüller (2), Drasch (4), v. Jettmar (3), Valta (1) und anonym K. S. in U. O. [Ungar. Ostra] (1).

NB. Man sehe noch den Briefkasten der Redaktion.

Litterarische Berichte.

A) Rezensionen.

GÜNTHER, SIEGMUND Dr., (früher Professor am Gymnasium zu Ansbach, gegenwärtig ordentlicher Professor an der technischen Hochschule zu München), Lehrbuch der Physik und physikalischen Geographie. 2 Bde. Stuttgart bei Ferdinand Enke. Bd. I. VI u. 480 S., mit 77 in den Text gedruckten Abbildungen. 1884. Geh. 10 *M.* Bd. II. XII u. 672 S. mit 118 Abbildungen. 1885. Geh. 15 *M.**)

Der allseitigen Anerkennung, welche diesem bedeutenden Werke sofort nach seinem Erscheinen zu teil geworden ist, kann auch der Referent sich aus voller Überzeugung anschliefsen.

Für jeden, der sich mit der astronomischen Erdkunde eingehender beschäftigen will, dürfte es fortan als Lehrbuch, noch mehr aber als Repertorium des ganzen bisher erworbenen Wissensschatzes und der gesamten Litteratur dieses Gebietes unentbehrlich sein. Zum vollen Verständnis desselben ist allerdings ein das Elementare übersteigendes Mafs mathematischer Kenntnisse unerläfslich, da in ihm „der mathematischen Entwickelung ein gröfserer Spielraum gewährt worden ist als in anderen gleichartigen Lehrbüchern."**) — Keiner Lehrerbibliothek aber sollte das vortreffliche Werk fehlen. — Man mufs die Sach- und Quellenkenntnis, sowie die Ausdauer bewundern, die es dem schon durch seine früheren Leistungen auf diesem wie auf dem rein mathematischen Gebiete rühmlichst bekannten Herrn Verfasser ermöglicht haben — trotz des erschwerenden Umstandes, dafs er bis vor Kurzem in einer abgelegenen Provinzialstadt wohnte —, in sachgemäfser Anordnung und klarer Ausdrucks-

---

*) Die Ursache der auffälligen Verspätung dieser Besprechung ist folgende: Bald nach dem Erscheinen dieses ausgezeichneten Werkes erhielt ein Mitarbeiter dasselbe zur Berichterstattung. Derselbe verschob die Besprechung bis zum Erscheinen des 2. Bandes. Dieser wurde ihm später auch vom Verleger zugesandt. Gleichwohl lehnte jener Herr im Herbst ds. Js. (1886), also zwei Jahre darauf, die Besprechung unter Zurücksendung der zwei Bände an die Verlagshandlung ab. Den Grund dieses Verfahrens kennen wir nicht. Den Namen d. Herrn teilt auf Verlangen mit Die Redaktion.

**) S. Vorrede zu Bd. I.

weise den gesamten Inhalt dieses so aufserordentlich umfangreichen Gebietes übersichtlich darzulegen, bei jedem einzelnen Gegenstande die bezüglichen Ansichten der Forscher und Fachmänner in ihrem historischen Entwickelungsgange vorzuführen, den relativen Wert dieser Ansichten abzuwägen, ein zusammenfassendes Urteil über sie abzugeben und jedem einzelnen Kapitel die betreffenden Litteraturnachweise in einer solchen Vollständigkeit beizufügen, wie sie wenigstens für dieses Gebiet noch nie aufgestellt worden sind. Unerwähnt darf es auch nicht bleiben, dafs überall da, wo der Herr Verfasser seiner eigenen Ansicht Ausdruck giebt, dies ohne verletzende Polemik und mit einer Zurückhaltung geschieht, welche als von einem wissenschaftlich so wohl bewährten und anerkannten Manne geübt, einen sehr günstigen Eindruck macht; nirgends stellt er seine persönliche Meinung in den Vordergrund.

Vollständig frei von Versehen ist das Buch nicht; doch kommen sie im Verhältnis zum Umfange desselben nur in verschwindend kleiner Zahl vor und können seinen Wert nicht beeinträchtigen.

Die Vorrede zum ersten Bande des den Herren Favaro und Marinelli, Professoren an der Universität Padua, gewidmeten Werkes äufsert sich über Plan und Anlage des Ganzen. Hiernach umfafst dieser Band die Lehre von der Erde als Weltkörper und die Geophysik im engeren Sinne oder die Lehre von der inneren Beschaffenheit der Erde*), der zweite Band die physikalische Erdkunde oder den Teil der letzteren, dessen Betrachtungsgegenstand die Oberfläche unseres Planeten bildet; doch statuiert der Verfasser keinen wesentlichen Unterschied zwischen Geophysik und physikalischer Erdkunde, deren Grenzlinien vielmehr „in ununterbrochenem gegenseitigen Ineinanderfliefsen begriffen" seien.

Aus der Vorrede zum zweiten Bande sei hier nur der Äufserung des Herrn Verfassers gedacht, dafs er lediglich um der Vorstellungsweise des Festlandsbewohners verständlicher zu sein, statt der von E. Süfs eingeführten üblichen Terminologie der Strandlinienverschiebungen sich der entgegengesetzten Bezeichnungsweise bediene, also das Wachsen des Festlandes als positive, sein Abnehmen als negative Verschiebung bezeichne. Die Süfs-Penksche Ausdrucksweise entspricht den bezüglichen Ansichten dieser berühmten Geologen**), die lediglich von Bewegungen des Meeres (nicht aber von solchen des Festlandes) wissen wollen, welche Penk „aus dem Wechsel der auf das flüssige Element nach den Gesetzen der Gravitation einwirkenden Eisbedeckung des Festlandes" erklärt. Der Herr Verfasser ist, wenn auch nicht ganz ohne Vorbehalt, doch im Wesentlichen mit dieser Theorie einverstanden; umsomehr, glaubt Referent, hätte es für ihn zur Anwendung einer Bezeichnung, welche der ein-

*) Cfr. Einleitung Bd. I S. 30.
**) Cfr. Bd. II S. 455 u. 456.

mal üblich gewordenen entgegengesetzt ist, eines stärkeren Beweggrundes als des oben von ihm angegebenen bedurft — zumal seinem Publikum gegenüber, von dem er sogar eine nicht ganz unerhebliche Kenntnis der höheren Analysis voraussetzen mufs, dem er also auch in dieser Hinsicht schon etwas mehr zumuten könnte.

Der erste Band enthält aufser Vorrede, Inhaltsverzeichnis und Namenregister eine geschichtlich-literarische Einleitung (35 S.) und drei gröfsere Abteilungen, der zweite vier weitere Abteilungen.

Die Einleitung bietet einen Überblick über den Anteil der bedeutenderen Kulturvölker aller Zeiten an der Ausbildung der kosmisch-physischen Erdkunde und bespricht weiterhin das Verhältnis der vergleichenden Erdkunde und der Landeskunde zur physischen Geographie, sowie die Grundsätze, nach denen der vorliegende Wissensstoff verarbeitet wurde.

Die erste Abteilung (92 S.) behandelt in drei Kapiteln die kosmische Stellung der Erde: die kosmogonischen Hypothesen, insbesondere die Kant-Laplacesche (16 S.), die physische Beschaffenheit der Planeten und Kometen, die Meteoriten und das Zodiakallicht (44 S.), unsere beiden Nachbarplaneten Venus und Mars (mit den beiden Miniaturmonden des letzteren), den Erdmond und die Frage nach der Bewohnbarkeit der Himmelskörper (32 S.); die zweite (169 S.) in fünf Kapiteln die allgemeinen mathematischen und physikalischen Verhältnisse des Erdkörpers: die Erde als Kugel und Rotationssphäroid (Gradmessungen) (25 S.), die Attraktionserscheinungen (namentlich die Pendelschwingungen) und ihre Anwendung zur Bestimmung der Gestalt und mittleren Dichtigkeit der Erde (auch Jollys Wägungsmethode) (37 S.), das Geoid (18 S.), die Bewegungen der Erde (Foucaultscher Versuch), Präzession, Nutation, Fortbewegung der Sonne mit ihrem System im Weltraume (61 S.), die Graphik im Dienste der physischen Erdkunde (Kartenprojektionen, Linien gleicher Höhen, Flächenmessung) (28 S.).

Die Angabe auf S. 257, dafs bei der Präzession der Mond weit weniger energisch einwirke als die Sonne, ist nicht richtig. Wie schon Newton (Principia. Prop. 39. Probl. 20) gesagt hat, wirken die beiden Himmelskörper hier in demselben Verhältnis ein, wie bei den Gezeiten, d. h. der kleine Mond über doppelt so stark als die mächtige Sonne.*)

Die dritte Abteilung (108 S.) behandelt in vier Kapiteln die eigentliche Geophysik und die dynamische Geologie: Bodenwärme und innere Erdwärme (14 S.), Zustand des Erdinnern (14 S.), die Vulkane und ihre Thätigkeit (41 S.), die Erdbeben (39 S.).

Die vierte Abteilung (66 S.) bespricht in vier Kapiteln die magnetischen und elektrischen Erdkräfte: Magnetismus und Elektri-

---

*) Cfr. diese Zeitschrift Jahrg. 1871, S. 314—322, wo Referent dieses Thema in elementarer Weise behandelt hat.

zität in den oberflächlichen Erdschichten (8 S.), den Erdmagnetismus und seine Theorie (37 S.), die Polarlichter (21 S.).

Die fünfte Abteilung, Atmosphärologie, ist die reichhaltigste (241 S.). In zehn Kapiteln erörtert sie: die allgemeinen Eigenschaften der Atmosphäre (25 S.), die meteorologischen Beobachtungs- und Berechnungsmethoden (einschliefslich der barometrischen und thermometrischen Höhenmessung) (30 S.), die meteorologische Optik (Strahlenbrechung, Dämmerung, Luftspiegelung, Regenbogen) (40 S.), atmosphärische Elektrizität und Gewitter (15 S.), die kosmische Meteorologie (Mond und Sonne nebst den Sonnenflecken als meteorologische Faktoren) (11 S.), die dynamische Meteorologie (Barometerschwankungen, geographische Verteilung des Luftdrucks, Luftbewegung auf der rotirenden Erde und Buys-Ballotsches Gesetz, Hageltheorien) (46 S.), allgemeine Klimatologie (Einflufs der Feuchtigkeit, Bewölkung, Bewaldung, der Winde; Land- und Seeklima) (24 S.), spezielle Klimatologie (die Wärmezonen, geographische Verteilung des Regens und der Winde) (21 S.), säkulare Schwankungen des Klimas (Eiszeit) (16 S.), angewandte Meteorologie (Wetterprognose) (13 S.).

Die Figur 32 auf S. 124 ist, wie sofort auffällt, unrichtig. Infolgedessen hat sich auch in den Text die — leider noch durch gesperrten Druck hervorgehobene — irrtümliche Folgerung eingeschlichen, dafs die Refraktion die Zenithdistanzen vergröfsere!

Die sechste Abteilung, Ozeanographie und ozeanische Physik (134 S.), betrachtet in sechs Kapiteln: das Meerwasser (16 S.), die Physiographie der Meeresbecken (Küstengliederung, Meerestiefe, Meeresboden) (26 S.), Temperatur und Salzgehalt des Meeres (21 S.), Wellenbewegung, Ebbe und Flut (30 S.), Meeresströmungen (24 S.), Meereseis (17 S.)

Die siebente Abteilung (55 S.): „Dynamische Wechselbeziehungen zwischen Meer und Land“ handelt in drei Kapiteln von den dauernden Schwankungen des Meeresspiegels (16 S.), der Küstenbildung (Strandwälle, Fjorde, Lagunen, Deltas) (25 S.), von den Inseln und Korallenriffen (14 S.).

Die achte Abteilung: „Das Festland mit seiner Süfswasserbedeckung“ (150 S.), aus fünf Kapiteln bestehend, bespricht die geogonischen Ansichten und die Geognosie (Petrographie und Petrefaktenkunde (18 S.), die Orographie und ihr Verhältnis zur Geognosie (18 S.), die Schnee- und Eisverhältnisse der Hochgebirge (Schneegrenze, Gletscher) (35 S.), die stehenden und fliefsenden Gewässer (44 S.) und die allgemeine Morphologie der Erdoberfläche (35 S.)

Die neunte Abteilung endlich (der Anhang) (9 S.) handelt von der Anthropo-, Tier- und Pflanzengeographie.

Diese kurze Übersicht mag genügen, um einen Begriff von der Reichhaltigkeit des Werkes zu gewähren. Auf dem in Rede stehen-

den Gebiete dürfte es wohl kaum einen Gegenstand geben, der hier nicht seine Erörterung, kaum eine Frage aufgeworfen werden können, die, insofern eine solche beim Erscheinen des Buches überhaupt möglich war, hier nicht ihre Beantwortung fände.

Aufser den in den beiden betreffenden Verzeichnissen angegebenen Fehlern sind dem Referenten noch folgende aufgefallen: Bd. I S. 101 Z. 4 fehlen hinter „Durchganges" die Worte „durch das Perihel," ibid. Z. 11 müssen die drei Zahlen 0,36 etc. in der umgekehrten Reihenfolge stehen, S. 102 Z. 11 ist „Sonnenstrahlen" nicht verständlich. Soll es vielleicht „die vom Mars reflektierten Sonnenstrahlen" bedeuten? Bd. II S. 325 Z. 12 $l \cdot \mu \sqrt{F} : K$ st. $\mu F : \sqrt{K}$.

Druck und Ausstattung des Werkes sind vorzüglich.

Liegnitz. Dr. O. Bermann.

Pfeifer, Dr. Fr. Xav. (k. Lycealprof. i. Dillingen, Baiern), **Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst.** Mit vielen Hundert Nachweisungen und 13 Lichtdrucktafeln. Augsburg, Verlag des Litter. Instituts von Dr. M. Huttler (ohne Jahreszahl). 230 S. gr. 8⁰. Pr. ℳ 8.

Die Leser ds. Z. werden sich erinnern, dafs der Verfasser des vorgenannten Buches in Jahrgang XV (1884), S. 325 u. f. auf Anregung des Ludwigschen Artikels („Einige wichtigere Abschnitte aus der mathem. Botanik" Jahrg. XV [1883], S. 161. 241. 321) ihnen den interessanten Aufsatz „die Proportion des goldenen Schnittes an den Blättern und Stengeln der Pflanzen" darbot. In jener Abhandlung ist (S. 326) auch das Instrument skizziert, dessen sich Hr. Dr. Pfeifer bei seinen Untersuchungen bediente und von welchem er dem Referenten freundlichst ein Exemplar zur Verfügung stellte. Hr. Dr. Pf. hat nun seine Untersuchungen fortgesetzt und aus diesen Studien ist als Frucht das in der Überschrift genannte Buch erwachsen. Dasselbe ist dem bekannten Werke von Zeising*) zwar ähnlich, geht aber doch in vielen Punkten über dasselbe hinaus und unterscheidet sich von demselben auch besonders dadurch, dafs Pf. seine Resultate auf eine weit gröfsere Anzahl von Untersuchungen (Beobachtungen und genaue Messungen) gründet, als Zeising. Der Ernst und die Gewissenhaftigkeit, mit der unser Verfasser seine Aufgabe behandelt, ist schon daraus zu erkennen, dafs er seine Untersuchungen auf fast alle Gebiete der Natur und Kunst ausdehnt.

---

*) Zeising (Prof. d. Philosophie in München 1858—1876), Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers. Leipzig 1854 b. Weigel. Man sehe über dieses Werk auch Günthers Art. in Schlöm. Zeitschr. Bd. 21 und Kosmos Bd. III, p. 201 u. f. Die Schriften dieses Forschers sind in Pfeifers Werke S. 62 in dem Abschnitt über die Geschichte des g. S. angeführt.

In der Natur untersuchte er das Gebiet der Zoologie (d. Conchylien, Gliedertiere, der Somatik d. menschl. Körpers) und vorzugsweise das der Botanik in Beziehung auf den g. S. Welchen Fleifs Verf. auf das letztere Kapitel verwendet hat, mag der Leser daraus erkennen, dafs er im Ganzen 337 oder (um uns nicht einer „mafslosen Zahlenschärfe" schuldig zu machen) rund 300 Pflanzenobjekte (darunter 71 Phanerogamen, 107 Farrenkräuter, 80 Tannenzapfen) mit dem oben erwähnten Zirkel gemessen und Teile von 31 Pflanzen auf schönen Tafeln abgebildet hat. Zu bedauern ist, dafs Verf. seine Untersuchungen nicht auch auf die Krystallographie ausdehnte, da Untersuchungen und glückliche Resultate derselben in diesem Gebiete wegen der strengen Gesetzmäfsigkeit in den Dimensionen der Untersuchungsobjekte die Zwecke des Verf. ungleich mehr gefördert haben dürften, als jene im Gebiete der Astronomie.

Im Gebiete der Kunst werden Streifzüge in die Baukunst, Tonkunst, Plastik und Malerei unternommen.

Soviel zuvörderst, um dem Leser einen allgemeinen Umrifs von des Verfassers Arbeit zu geben. Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes dürfte es sich aber empfehlen, den Inhalt des Werkes etwas ausführlicher, als es wohl sonst bei Rezensionen geschieht, anzugeben, um dann später an der Hand dieser Inhaltsangabe über einige Punkte unsere Ansicht eingehender auszusprechen.

Das Ganze zerfällt in einen

A) Allgemeinen Teil (70 S.), einen
B) Speziellen Teil (S. 72—211) und in
C) Schlufsreflexionen (S. 211—229).

Der allgemeine Teil enthält folgende Abschnitte: 1) Kurze Erklärung der Begriffe: Verhältnis, Proportion, Progression, Reihe. 2) Von der Proportion des goldenen Schnittes insbesondere. 3) Nachweis der Berechtigung und Notwendigkeit den „Begriff des goldenen Schnittes" vom Schnitte selbst zu trennen und jenen Begriff weiter als gewöhnlich geschieht zu fassen durch Losschälung desselben von allen unwesentlichen Elementen. Verf. fügt hieran Bemerkungen, über Bezeichnungsweise der erklärten Proportion und ihrer Glieder in d. vorl. Schrift nämlich *Major* = M, *Minor* = m, *Ganzes* = G, Proportion = P. — 4) Übersicht über die möglichen Lageverhältnisse der Glieder der Prop. d. g. S. — 5) Von den Konstruktionen des g. S. i. allgemeinen (Einteilung ders.) — 6) Erste Klasse von Konstruktionen des goldenen Schnittes, wobei die proportionalen Strecken *Major* und *Minor* unmittelbar aufeinanderfolgen, resp. zusammenhängen. Hierher gehören a) die in der Elementargeometrie üblichen Konstruktionen, woran sich schliefst die Fortentwicklung der Prop. d. g. S. zur Progression; sodann b) Konstruktionen und Formen des g. S., welche in der Geometrie nicht besonders behandelt zu werden pflegen, aber in der Natur vorkommen. Verf. entwickelt hier einen Satz (S. 15), der — wie er selbst zu-

giebt — nur eine Konsequenz aus dem allgemeinen Satze über die Parallelen im Dreieck ist. Nun geht Verf. über auf 7) die zweite Klasse der Erscheinungsformen und Konstruktionen der Prop. des g. S., in welchen die proportionalen Glieder nicht unmittelbar aufeinanderfolgen, sondern durch Zwischenglieder getrennt sind (S. 19). Er kommt so 8) zur Zusammenfassung der verschiedenen Konstruktionen und Erscheinungsformen der Prop. des g. S. in Reihen. Es folgt 9) der Nachweis einer merkwürdigen Korrespondenz zwischen den Reihen der Erscheinungsformen des g. S. in der Natur und einer Reihe regulärer Polygone (S. 28). 10) Die Darstellung des g. S. in Zahlen. Verf. entwickelt hier die Gleichung $x^2 = a\,(a - x)$, worin a das Ganze, x den *Major* und also $a - x$ den *Minor* bedeutet, er erhält das Resultat $x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$, unterläſst es aber, es zu vereinfachen und zu diskutieren. — Den Schluſs des allgem. Teils bildet 11) die Geschichte des g. S. in ihren Hauptmomenten, eine sehr dankenswerte Zugabe.

Der specielle Teil beginnt S. 71. Hier weist Verf. den g. S. in Natur und Kunst nach. Zuerst im Planetensystem, dann im Pflanzenreich. Der leztere ist der ausgiebigste Teil, wie schon eingangs bemerkt. Hier wird auch der Zusammenhang des g. S. mit der Laméschen Reihe erklärt. S. 149 beginnen die Untersuchungen im Tierreich, wo besonders die Conchylien Untersuchungsobjekte bilden, sodann die Insekten (S. 169),*) die Wirbeltiere (S. 182), Fische, Vögel (Eier), die menschlichen Gliedmaſsen (Zeising). Interessant sind noch die Analogieen, die Verf. gefunden haben will zwischen den Gliedern der Finger und den musikalischen Intervallen (S. 188), z. B. die zwei vordern Phalangen des Goldfingers (S. 187) haben das Verhältnis 30 : 15 = 2 : 1 = d. i. das Verhältnis des Grundtons zur tieferen Oktave. Die mittlere und die Grundphalange verhalten sich wie 45 : 30 (= Quinte). Die Grundphalangen und die Mittelhandknochen = 60 : 45 = 4 : 3 (Quart).

Nun geht der Verf. über zur Kunst und hier berücksichtigt er besonders die Architektur (S. 191). Der goldene Schnitt wird an den kirchlichen Bauwerken, sowohl im Innern als im Äuſsern, nachgewiesen. Auch das Material wird erwähnt, z. B. die Solnhofener Platten. Hierauf kommt die Musik an die Reihe (S. 206). Die Lamésche Reihe und die Verhältnisse des g. S. in der Musik werden in Beziehung gesetzt, wobei Verf. auf Helmholtz Werk Tonempfindungen, 3. Aufl., fuſst.**) Endlich kommt die Malerei und Plastik an die Reihe (S. 208).

---

*) Bezügl. des g. Schn. in der Insektenwelt (S. 169—181) vergl. man den nachträgl. kleinen Artikel des Verf. im vorigen XVII. Jahrgang Heft 6, S. 425 etc.

**) Vergl. hiermit den bezügl. Art. des Verf. im vorigen (XVII.) Jahrg. ds. Z. Heft 7, S. 482 u. f.

Der Verf. beendet sein Werk mit C) Schlufsreflexionen. Eine eingehendere Besprechung des Werkes müssen wir uns wegen Mangel an Raum in d. H. leider für das nächste Heft aufsparen. Nur um die Anzeige des interessanten Werkes nicht noch länger aufzuschieben, haben wir einstweilen unsern Lesern den Inhalt desselben mitgeteilt. Wir werden sodann im Anschlufs an unsere eigene Besprechung auch die einiger anderen Rezensenten mitteilen. (Fortsetzung folgt.)

B. Programmschau.

Mathematische und physikalische Programme des Königreichs Bayern. (Schuljahr 1885—86.)

Referent: Prof. Dr. S. Günther.*)

1. Ansbach. Gymnasium. *Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürers.* Von Professor Dr. S. Günther. 30 S. 1 Tafel.

Es handelt sich hier um eine Reihe angenäherter Konstruktionen, welche der grofse Künstler in seinem bekannten Lehrbuch angegeben hat, und zwar mit dem vollen Bewufstsein, dafs diese Lösungen nicht in aller Strenge richtig seien. Behandelt sind folgende Aufgaben: Verzeichnung des Fünfecks auf gegebener Seite mit konstanter Zirkelöffnung, des regulären Siebenecks, Neunecks, Elfecks, Dreizehnecks, Trisektion des Winkels, Verwandlung eines Dreiecks in ein gleichgrofses Quadrat, Kreisquadratur $\left(\pi = \frac{25}{8}\right)$ und Würfelverdoppelung. Der hierbei jeweilig erreichte Genauigkeitsgrad wird mittelst trigonometrischer Rechnung geprüft.

2. Augsburg. Kreisrealschule. *Über den Einflufs der Stromdichte auf den Leitungswiderstand von Drähten.* Von Reallehrer J. Götz. 38 S.

Dem Verfasser hatte sich bei einer anderweiten Versuchsreihe die Wahrnehmung aufgedrängt, dafs sich der Widerstand eines längere Zeit hindurch vom galvanischen Strome durchflossenen Drahtes allgemach verminderte, wenn schon nicht in sehr erheblichem Mafse. Eine Umschau in der Litteratur ergab keine Auskunft über diese Thatsache, ja einzelne Physiker hatten sogar eher die gegenteilige Bemerkung gemacht. Aus den Versuchen L. Webers schien zu folgen, dafs bedeutende Stromdichten erhöhend, geringe vermindernd auf den Drahtwiderstand einwirkten. Der Verfasser unternahm deshalb neue Messungen mit Hilfe einer Wheatstoneschen Brücke und eines Spiegelgalvanometers von Edelmann. Wenn W den Widerstand des Versuchsdrahtes, $(W + r)$ denjenigen des Vergleichsdrahtes (aus Neusilber), n die Anzahl von mm der Skale, um welche der Kontakt behufs Herstellung der Gleichgewichtslage aus der Mitte verschoben werden mufste, wenn ferner w eine Vergröfserung des Widerstandes und p die nunmehr notwendige Verschiebung bezeichnet, so gilt die Gleichung

$$\frac{w}{W} = \frac{n}{250} + \left(1 + \frac{n}{250}\right)\left(1 + \frac{p-n}{250}\right) \cdot \frac{p-n}{250},$$

nach welcher zu rechnen war; für ein sehr kleines p vereinfacht sich die-

*) Mit dem nachstehenden Referate legt der Verfasser die Berichterstattung über die bayerischen Schulprogramme nieder, nachdem er sich derselben gerade ein volles Jahrzehnt hindurch unterzogen hat. Er hofft jedoch zuversichtlich, dass diese Programmschau deshalb nicht etwa künftig wegfallen, sondern auch in den folgenden Jahren einen integrierenden Bestandteil der „Z. f. math. u. naturw. Unterr.“ ausmachen wird.

selbe noch bedeutend. Gegen Temperaturerhöhungen und daraus entspringende Widerstandsveränderungen schützte man sich durch Umrühren des Wassers in dem den Draht enthaltenden Bade. Geprüft wurden nun verschiedene hartgezogene Kupferdrähte und Neusilberdrähte; die ermittelten Zahlen werden in extenso mitgeteilt. Die weichen Neusilberdrähte verhielten sich sehr neutral, die harten weichen in ihrem Verhalten kaum von den entsprechenden Kupferdrähten ab. Bei diesen letzteren aber sinkt der Widerstand anfänglich, erreicht bei höheren Stromdichten den Anfangswert und geht bei weiterer Steigerung über diesen hinaus; die weichen Kupferdrähte erwiesen sich träger, ihre Widerstände blieben zumal im Anfange konstanter. Feste Leiter scheinen durch kräftige durchgeleitete Ströme eine Art von Polarisation zu erleiden.

3. Dillingen. Gymnasium. *Das Barometer und seine Anwendung. Nebst einem Anhang: Die Grundzüge der neueren Witterungslehre.* Von Studienlehrer F. Mayer. 67 S. 1 Tafel.

Die etwas eigentümliche Bestimmung des Gymnasiallehrplans*), daſs auſser Mechanik der starren Körper nichts von Physik gelehrt, wohl aber in Unterprima (III. Gymnasialklasse) eine „Erklärung des Barometers und Thermometers“ gegeben werden soll, hat gewiſs schon manchen Kollegen in Verlegenheit gesetzt. Der eine hilft sich mit summarischer Kürze, der andere sucht bei dieser Gelegenheit ein abgeschlossenes Kapitel der Experimentalphysik einzuschalten, und dieser letzteren Kategorie will die vorliegende Programmabhandlung entgegenkommen. Der Verfasser beginnt mit dem Gesetz der kommunizierenden Röhren, erläutert den Torricellischen Grundversuch und das Wesen des Luftdruckes und tritt dann in eine sehr eingehende Einzelschilderung der verschiedenen Luftschweremesser mit und ohne Flüssigkeit ein. Auch seltener gebrauchte Formen, wie das Glyzerinbarometer, werden nicht vernachlässigt. In der zweiten Abteilung seiner Schrift erörtert der Verfasser die Anwendung des Barometers in der Hypsometrie, indem er auch die verschiedenen an der Halleyschen Formel anzubringenden Korrektionen namhaft macht. Nach einem Exkurs auf die Messung der Höhe unseres Luftkreises durch verschiedene Methoden wendet er sich den periodischen und nichtperiodischen Schwankungen der Quecksilbersäule zu, legt deren Abhängigkeit von den Temperaturverhältnissen dar und entwickelt im Anschluſs daran die Grundzüge der modernen dynamischen Meteorologie; die Bedeutung des Barometers als prognostischen Instrumentes schildert er ohne Übertreibung, ja vielleicht eher allzu skeptisch. Damit beginnt der eigentlich meteorologische Teil: es wird gezeigt, wie wenig Anhalt für die Witterungsprognose aus der Beobachtung der Gestirne entnommen werden kann, wie vielmehr in erster Linie die vom Buys-Ballotschen Gesetze abhängige Wanderung der atmosphärischen Depressionen als Faktor der Wetterbildung zu gelten hat, und wie mit Hilfe der Isobarenkarte eine gesicherte Prognose nebst Sturmwarnungen zu erzielen ist. Das ganze eignet sich sehr wohl zur ersten Einführung in die meteorologische Wissenschaft. An Druckfehlern mangelt es zwar nicht, allein dieselben sind durchweg nicht sinnstörend weil leicht korrigierbar.

4. Eichstätt. Lyzeum. *Die Astronomen, Mathematiker und Physiker der Diözese Eichstätt.* II. Serie. Von Professor F. S. Romstöck. 116 S.

Über den ersten Teil dieser verdienstlichen, wiewohl infolge der gezogenen Grenzen dem Gebrauche einige Schwierigkeiten entgegenstellenden Biographiensammlung haben wir bereits vor zwei Jahren berichtet.**) Auch

*) Da laut No. 6 (s. u.) die bair. Gymnasien „im Beginne einer bewuſsten und kräftigen Reformbewegung stehen“, so ist zu hoffen daſs diese eigentümlichen Bestimmungen recht bald fallen. D. Red.

**) Cfr. Jahrg. XVI, 446. D. Red.

diese zweite Serie bringt sehr viel wichtiges Material, das man sonst nur mühsam beibringen müfste. Freilich ist es vor dem Gebrauche der Schrift nötig, zu wissen, ob ein bestimmter Forscher auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften innerhalb des Bistums Eichstätt geboren oder gestorben oder mindestens während einer Reihe von Jahren wirksam gewesen ist. So begegnet uns z. B. (S. 40) der wohlbekannte Meteorologe van Bebber, geboren am Niederrhein, zur Zeit Sektionschef der deutschen Seewarte in Hamburg, der aber von 1875 bis 1879 die Realschule zu Weifsenburg a/S. als Rektor leitete. Für Bayern macht sich dieser Übelstand weit weniger fühlbar, und so durfte der Verfasser mit Recht in den Rahmen seiner Arbeit sehr viele der tüchtigsten bayerischen Gelehrten hereinziehen. Wir nennen die beiden Apian, deren Leistungen sehr gründlich behandelt sind, die beiden genialen Techniker v. Baader, den Augsburger Mechaniker Brander, der vor hundert Jahren alle Sternwarten mit den Erzeugnissen seiner Werkstätte versah, den Nürnberger Professor Doppelmayr, durch seine Himmelskarten und sein 1730 erschienenes Geschichtswerk zu verdientem Ansehen gelangt, den Chronologen Herwart v. Hohenburg, Keplers Freund, den fruchtbaren Astronomen v. Kordenbusch, den im höchsten Alter noch heute zu München lebenden Nestor der Tonstärkemessung v. Schafhäutl, den Altdorfer Mathematiker Spaeth und den auch um die Geschichte der Mathematik nicht unverdienten Historiker Veesenmeyer. Es sind aber mit Recht auch noch andere Namen berücksichtigt, deren Träger keine Fachmänner im engeren Wortsinne waren, die aber infolge der weit engeren Beziehungen, welche in früherer Zeit die einzelnen Disziplinen unter einander verknüpften, aus ihrem nächsten Studiengebiete gelegentlich einmal in das benachbarte mathematische Gebiet herübergriffen. Darunter sind beispielsweise zwei in den bayerischen Aufklärungskämpfen des XVIII. Jahrhunderts im Vordergrunde stehende Kämpfer zu verzeichnen, Eusebius Amort und Heinrich Braun, da fehlen nicht zwei hervorragende Kapazitäten des Reformationszeitalters, Aventin und Eck. Von dem „Vater der bayerischen Geschichte“ besitzen wir neben astronomischem auch eine sehr interessante Abhandlung über das Fingerrechnen der Alten, Eck aber fand neben seinen vielen anderen Beschäftigungen die Zeit, auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Erdkunde sehr thätig zu sein. Wir führen dies hier speziell deswegen an, weil erst neulich wieder in einem Artikel der „Weserzeitung“ den freilich nicht sehr liebenswürdigen Hauptgegner Luthers als eine Art wissenschaftlicher Null hinzustellen versucht wurde. Davon war er weit entfernt; seine Verdienste als Logiker hat v. Prantl, seine Verdienste als Geograph Michow (in einem auf dem Hamburger Geographentag gehaltenen Vortrage) unumwunden anerkannt. — Wir hoffen, dafs uns Herr Romstöck auch noch mit weiteren Serien später beschenken wird.

5. **Frankenthal.** Lateinschule.*) *Zusammenstellung planimetrischer Lehrsätze und Aufgaben aus dem Gebiete der Kongruenz.* Von Studienlehrer A. Schwanzer. 98 S.

Ausgehend von dem Grundsatze, dafs der Lehrer nicht leicht über genug Übungsmaterial verfügen kann, wird man diese neue Sammlung, die sich allerdings auf die elementaren Teile der ebenen Geometrie beschränkt, nur willkommen heissen können. Dieselbe ist sehr reichhaltig und berücksichtigt, was wir für diese Stufe des Unterrichts durchaus billigen können, mehr die zu beweisenden Lehrsätze als die zu lösenden Aufgaben. Natürlich sind laut Vorwort die vorhandenen Werke von verwandter Tendenz, z. B. Lieber und v. Lühmann, benützt worden, doch scheint der Verfasser auch vieles aus eigenem hinzugethan zu haben. Nur in einem Punkte haben wir ein Bedenken zu äufsern, wir können uns

*) Die „Isolierte Lateinschule“ in Bayern entspricht ziemlich genau dem Progymnasium Norddeutschlands. Erstere kann jedoch höchstens bis Obertertia inklusive reichen.

nämlich nicht recht vorstellen, wie der Schüler ohne Kenntnis der Ähnlichkeitslehre mit einzelnen der vorgelegten Fragen soll zurechtkommen können. So finden wir (S. 47) den Satz, daſs die Höhen eines Dreiecks zugleich die Winkelhalbierenden des Fuſspunktdreiecks sind; uns ist kein Beweis dieses Lehrsatzes bekannt, der nicht von den Proportionen Gebrauch machte. Ebenso scheinen uns viele der „vermischten" Aufgaben im Schluſskapitel die Theorie der Ähnlichkeitspunkte fast mit Notwendigkeit vorauszusetzen. Das Schriftchen ist korrekt gedruckt, nur auf der letzten Seite steht ein unangenehmer Druckfehler: „Gegeben ein gleichseitiges Dreieck mit dem Winkel $\alpha = 120^{\circ}$."

6. **München.** Kreisrealschule. *Der Zeichenunterricht, ein wichtiges Mittel zur aesthetischen und praktischen Bildung des Volkes.* Von Assistent M. Renner. 29 S.

Bringt diese kleine Abhandlung auch keine neuen Gedanken, was ja bei einem so vielfach und allseitig von den berufensten Fachmännern besprochenen Gegenstande schwer halten dürfte, so erörtert sie doch ihr Thema mit Umsicht und Geschmack. Im Anschluſs an gewisse Aufserungen Schillers und W. v. Humboldts über die Notwendigkeit, Begriff und Verständnis des Schönen auch in weitere Volkskreise hineinzutragen, verlangt er den Unterricht im Zeichnen als das zweckdienlichste Mittel, welches die Schönheit der Form zu begreifen lehrt. Zunächst soll das Auge möglichst geschärft werden, was durch das Freihandzeichnen am besten zu erreichen ist; die hier eingestreuten Bemerkungen über die mangelnde Erziehung des Sehorgans an den humanistischen Anstalten sind leider nur allzu berechtigt, doch wäre es unrecht, verkennen zu wollen, daſs gerade unsere bayerischen Gymnasien im Beginne einer bewuſsten und kräftigen Reformbewegung stehen.*) Des weiteren verbreitet sich der Verfasser hauptsächlich über die immer enger zu gestaltenden Beziehungen zwischen Zeichenkunst und Kunsthandwerk; manche seiner Winke sind gewiſs beherzigenswert, obwohl er uns von der Möglichkeit, geschmackbildend auf die groſse Masse des Volkes einzuwirken, eine viel zu optimistische Vorstellung zu hegen scheint.

7. **Nürnberg.** Kreisrealschule. *Die elektrische Leistungsfähigkeit der wässerigen und alkoholischen Lösungen des Phenols und der Oxalsäure in ihrer Abhängigkeit von dem Prozentgehalt, der Temperatur und dem Lösungsmittel.* Von Reallehrer K. Hartwig. 28 S. 1 Tafel.

Die Methode, welche der vorliegenden Experimentaluntersuchung zugrunde liegt, ist dieselbe, welche F. Kohlrausch und Grotrian in Band CLIV. der „Ann. f. Phys. u. Chem." beschrieben haben. Wheatstones Brücke, Wiedemanns Galvanometer und Siemens' Stöpsel-Rheochord bildeten zusammen mit einem nach Kohlrauschs Angaben gefertigten Induktionsapparat und Dynamometer die instrumentelle Basis der Arbeit. Von Interesse für solche, die ähnliche Messungen vorzunehmen beabsichtigen, ist die detaillierte Beschreibung eines konstanten Fehlers, welchen der Verfasser beim Ausschlage der beweglichen Rolle immer wieder bemerkte, aber erst durch Zufall kausal zu erklären vermochte: es fehlte nämlich an einer Isolierung zwischen der festen Rolle und dem Fuſsgestell des Instrumentes. Nachdem der Verfasser sehr eingehend das Verfahren geschildert hat, dessen er sich zur Herstellung der Versuchslösungen bediente, stellt er die ermittelten Werte tabellarisch zusammen und entwirft gleichzeitig eine graphische Tabelle, welche die Abhängigkeit des als Ordinate zu denkenden Leitungsvermögens von dem als Abszisse aufgetragenen Prozentgehalt mittelst einer Kurve zum Ausdruck bringt. Als wichtiges Gesetz ergibt sich hieraus das folgende: Das Leitungsvermögen von Phenollösungen ist proportional dem Gehalt an absolutem Alkohol, wenigstens

*) Man sehe unsere Anm. oben zu No. 3. D. Red.

bis zu der durch die Verhältniszahl 10,97 charakterisierten Grenze der Gewichtsverhältnisse von absolutem Alkohol und Phenollösung. Für die Oxalsäure tritt eine gleich klare Beziehung nicht zutage.

8. **Passau.** Lyzeum. *Die Reduktion der Kohlensäure im pflanzlichen Organismus. Studien und Versuche.* Von Professor Dr. H. Putz. 50 S.

Unter dem Einflusse des Lichtes und bei nicht ungünstigen Temperaturverhältnissen bilden sich in den Chlorophyll enthaltenden Pflanzenzellen bekanntlich Kohlenstoffverbindungen, indem Kohlenstoff aus der Atmosphäre aufgenommen und Sauerstoff an dieselbe abgegeben wird. Der mechanische Vorgang, durch welchen hierbei Wärmeaktion in chemische Energie umgesetzt wird, bedarf jedoch noch sehr der Aufklärung, wie denn auch die Ansichten der Forscher hierüber noch weit von Übereinstimmung entfernt sind. Der Verfasser durchmustert deshalb mit kritischem Blicke die vorhandenene Litteratur und vergleicht die Hypothesen von Senebier, Ingenhoufs, Liebig, Rochleder, Zöller, v. Baeyer, Erlenmeyer, Sachse, Sachs, Pringsheim, Timiriazeff, Loew, Phipson, Kraus u. a. Eine abschliefsende Theorie scheint sich zur Zeit noch nicht begründen zu lassen. Doch ist es wahrscheinlich, dafs die beiden vorhin gekennzeichneten und anscheinend nach Zeit und Raum untrennbaren Prozesse, die Bildung der Reproduktionsprodukte aus der Kohlensäure und die Abscheidung des Sauerstoffs sich innerhalb der Zelle an getrennten Orten vollziehen. Dies deutet darauf hin, dafs man es hier mit einer Elektrolyse zu thun habe. Freilich wäre eine solche nur dann denkar, wenn der Schwingungsvorgang, den wir Licht nennen, sich innerhalb der Zelle in einen elektrischen umsetzte, wenn die mit Chlorophyll ausgestattete Zelle gewissermafsen als ein „photoelektrisches System“ zu gelten hätte. Inwieweit nun von der Existenz solcher Systeme überhaupt die Rede sein kann, ist noch eine offene Frage; die modernen molekulartheoretischen Anschauungen stehen der Annahme, dafs es dergleichen gäbe, nicht im Wege, allein obwohl es an experimentellen Untersuchungen über die Verwandtschaft von Licht und Elektrizität nicht fehlt, so haben dieselben doch bisher noch nicht zu allseitig anerkannten Ergebnissen geführt. Nach des Verfassers Schlufsworten steht hier die Wissenschaft vor einem Doppelproblem: sie hat erstens das Vorhandensein eines galvanischen Stromes in der Pflanzenzelle unter den bekannten Umständen darzuthun und sie hat zweitens im Laboratorium nach stofflichen Kombinationen zu suchen, welche die Zusammensetzung der Zelle möglichst treu nachbilden und thatsächlich eine Bewegungsverwandlung nach Art der beschriebenen durchzuführen gestatten.

C. Bibliographie.

Oktober 1886.

Erziehungs- und Unterrichtswesen.

Mich, Schulr. Sem.-Dir., Allgemeine Erziehungslehre. (98 S.) Troppau, Buchholz. 1,60.

Biese, Oberl. Dr., Grundzüge moderner Humanitätsbildung. Ideale und Normen. (331 S.) Lpz., Friedrich. 8.

Schmidt, Dr., Die Entwickelung des naturgeschichtlichen Unterrichts an höheren Lehranstalten. (52 S.) Berlin, Friedberg & Mode. 1.

Finger, Friedrich Karl Fresenius, Züge zu dem Lebensbilde eines Schulmannes. (36 S.) Frankfurt a/M., Drescher, 0,50.

Lange, Dir. Dr., Über Apperzeption. Eine psychologisch-pädagogische Monographie. (137 S.) Plauen, Neupert. 1,80.

Beumer, Dr. u. Bueck, Die Berufswahl oder was kann die Schule und was das Haus zur Erleichterung einer geeigneten Berufswahl der Jugend thun? (40 S.) Bonn, Straufs. 0,60.

Naufs, Dr., Ansteckende Krankheiten in der Schule. Ärztliche Winke zum Erkennen derselben. Für Lehrer und Väter. (207 S.) Wien, Pichler. 1,60.

Barwinski, Dr., Die Gymnastik als Erziehungs- und Heilmittel. (24 S.) Weimar, Hoffmann. 0,60.

Kummer, Dr., Stimmen über den österr. Gymnasiallehrplan vom 26. Mai 1884. (41 S.) Wien, Gerold. 4.

Landenberger, Schulinsp., Pädagogische Studien. (304 S.) Ludwigsburg, Neubert. 2,80.

Mathematik.

A. Reine Mathematik.

1. Geometrie.

Dietsch, Realschulrekt., Leitfaden der darstellenden Geometrie. (130 S.) Erlangen, Deichert. 2,40.

2. Arithmetik.

†Wallentin, Prof. Dr. Doc., Maturitätsfragen aus der Mathematik. Auflösungen. (192 S.) Wien, Gerold. 3,60.

B. Angewandte Mathematik.

(Astronomie. Geodäsie. Mechanik.)

Meyer, M. Wilh., Kosmische Weltansichten. Astronomische Beobachtungen und Ideen aus neuester Zeit. (323 S.) Berlin, Verein für deutsche Literatur. 5.

Physik.

Behse, Rekt. Dr., Lehrbuch der Physik für höh. Bürgerschulen u. techn. Lehranstalten. (229 S.) Weimar, Voigt. 4,50.

Falb, Das Wetter und der Mond. Eine meteorologische Studie. (84 S.) Wien, Hartleben. 1,50.

Hering, Prof. Dr., Über Newtons Gesetz der Farbenmischung. Prag, Tempsky. 1,50.

Urbanitzky, Dr., Elektrizität und Magnetismus im Altertum. (284 S.) Wien, Hartleben. 4.

Nemayer, Die Laboratorien der Elektrotechnik und deren neuere Hilfsapparate. (231 S.) Ebda. 4.

Mascart, Prof. Dr., Handbuch der statischen Elektrizität. Deutsch von Prof. Dr. Wallentin. 2. Bd. 1. Abt. (391 S.) Wien, Pichler. 9.

Fennel, Die Wagner-Fennelschen Tachymeter des mathem. Instituts von Fennel in Cassel. (43 S.) Berlin, Springer. 2.

Chemie.

Fortschritte der Chemie in 1886. (244 S.) Lpz., Mayer. 4.

Beschreibende Naturwissenschaften.

1. Zoologie.

Leimbach, Dir. Dr., Die Cerambyciden des Harzes. (16 S.) Lpz., Fock. 1.

Knauer, Dr., Aus der Tierwelt. Schilderungen u. allg. Umblicke. Ein naturhist. Lesebuch für Schüler etc. Mit vielen Abb. (186 S.) Freiburg, Herder. 2.

Schulwandtafeln, anatomische. VI. Die Muskeln des Menschen, gez. von Dr. Zilles. Karlsruhe, Bielefeld. 6.

Taschenberg, Doc. Dr., Verz. der Schriften über Zoologie, welche in den periodischen Werken enthalten und von 1861—1880 selbständig erschienen sind. In ca. 12 Lfgn. Lpz., Engelmann. 1 Lfg. 7.
Rothe, Prof. Dr., Vollständiges Verzeichnis der Schmetterlinge Österreich-Ungarns, Deutschlands und der Schweiz. Mit Angabe der Flugzeit, der Nährpflanzen und der Entw.-Zeit der Raupen. (46 S.) Wien, Pichler. 0,80.

2. Botanik.

Flügge, Prof. Dr., Die Mikroorganismen. 2. Aufl. Mit 144 Abb. (692 S.) Lpz., Vogel. 18.
Schiller, Dr., Grundzüge der Cacteenkunde. (123 S.) Breslau, Selbstverlag (Mauritiusstr. 6). 4,50.
Voges, Dr., Das Pflanzenleben des Meeres. (83 S.) Lpz., Frohberg. 1,50.

3. Mineralogie.

Weisbach, Prof. Dr., Tabellen zur Bestimmung der Mineralien mittels äufserer Kennzeichen. (106 S.) Lpz., Felix. 2,50.
Henrich, Oberl., Lehrbuch der Krystallberechnung. Mit zahlr. Beispielen. (300 S.) Stuttg., Enke. 8.
Toula, Prof. Dr., Mineralogische und petrographische Tabellen. (161 S.) Prag, Tempsky. 4.

Geographie.

Löwenberg, Die Entdeckungs- und Forschungsreisen in den beiden Polarzonen. Mit 8 Karten. (152 S.) Lpz., Freytag. 1.
Neuhauss, Dr., Die Hawaii-Inseln. (48 S.) Berlin, Habel. 1.
Bastian, A., Die Kulturländer des alten Amerika. 3. Bd. (600 S.) Mit 6 Taf. Berlin, Weidmann. 9.
Liebenow, Karte von Afrika mit bes. Berücksichtigung der deutschen Kolonien. 1 : 10 000 000. Berlin, Lithogr. Inst. 10.
Kanäle. I. Der Suezkanal von Volkmann. II. Der Nord-Ostseekanal von Sympher. III. Der Panamakanal von Peschek. (32 S.) Berlin, Ernst & Korn. 1.
Wohlgemuth, Die Polarforschung 1882—83. Die österr. Polarstation Jan Mayen. 2. Bd. (232 S.) Wien, Gerold. 16.
Ratzel, Prof. Dr., Völkerkunde. 2. Bd. Die Naturvölker Ozeaniens, Amerikas und Asiens. Mit 391 Abb. etc. (815 S.) Lpz., Bibl. Inst. 14.
Berger, Dr., Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen. I. Die Geographie der Jonier. (145 S.) Lpz., Veit & Co. 4.
Bastian, Ad., Zur Lehre von den geographischen Provinzen. (118 S.) Berlin, Mittler. 2,75.

Neue Auflagen.

1. Mathematik.

Autenheimer, Dir., Elementarbuch der Differential- u. Integralrechnung für höh. Lehranst. 3. Aufl. (522 S.) Weimar, Voigt. 9.
Teichmann u. Grofs, Proff., Vierstellige mathematische Tafeln. 2. Aufl. (20 S.) Stuttg., Wittwer. 0,60.
Seelhof, Flächen- u. Körperberechnung in Lehrsätzen u. Aufgaben etc. 3. Aufl. (106 S.) Bremen, Heinsius. 2.

2. Naturwissenschaften.

Leunis, Dr., Synopsis der 3 Naturreiche. 2. Tl. Botanik. 3. Aufl. Von Prof. Dr. Frank. 3. Bd. Kryptogamen. (675 S.) 10. (Compl. 36).
Willibald, Dr., Die Nester und die Eier der in Deutschland und den angrenzenden Ländern brütenden Vögel. 3. vollst. umg. Aufl. von B. Dürigen. Mit 229 Abb. (179 S.) Lpz., Koch. 3.

Zwick, Dr., Lehrbuch für den Unterricht in der Mineralogie. 2. Aufl. (132 S.) Berlin, Nicolai. 1,60.

——, Lehrbuch für den Unterricht in der Zoologie. 3. Aufl. Ebda. 1, (95 S.) 1. — 2, (192 S.) 1, 80. — 3, (84 S.) 1.

Wilbrandt, Dr., Leitfaden für den methodischen Unterricht in der anorganischen Chemie. 5. Aufl. Mit 59 Abb. (231 S.) Hildesheim, Lax. 3,60.

Geikie, Prof., Geologie. Deutsche Ausgabe besorgt von Prof. O. Schmidt. 3. Aufl. (144 S.) Strafsburg, Trübner. Geb. 0,80.

3. Geographie.

Effert, Rekt., Grundrifs der mathemat. u. physik. Geographie. Für Real- u. Handelsschulen. 2. Aufl. (94 S.) Würzburg, Stahel, 1,10.

Hann, Hochstetter u. Pokorny, Allgemeine Erdkunde. Astronomische u. physikal. Geographie, Geologie u. Biologie. 4. Aufl. Mit 21 farb. Taf. u. 366 Textabb. (767 S.) Lpz., Freytag. 12.

November—Dezember 1886.

Erziehungs- und Unterrichtswesen.

Aus der höheren Bürgerschule. Herausg. von Gottschalck u. Bornemann. I. Ubbelohde, die höhere Bürgerschule. — Lehre u. Leben. (32 S.) Hamburg, Herold. 0,80.

Loewenthal, Prof. Dr., Grundzüge einer Hygiene des Unterrichts. (152 S.) Wiesbaden, Bergmann. 2,40.

Gräve, Rekt., Die Grundsätze der Herbart-Zillerschen Schule für die methodische Durcharbeitung des Unterrichtsstoffes und ihre Würdigung vom Standpunkte der Praxis. (58 S.) Bielefeld, Velhagen & Klasing. 6,60.

Holst, Dr., Die Individualisirung beim Unterrichte in den Gymnasien. Ein Mahnwort an Lehrer und Eltern. (11 S.) Riga, Stieda. 0,80.

Meyer, J. B., Prof., Die Stellung der Philosophie zur Zeit und zum Universitätsstudium. Rektoratsrede. (30 S.) Bonn, Straufs. 1.

Mathematik.

A. Reine Mathematik.

1. Geometrie.

Gallien, Dir., Lehrbuch der Mathematik für höhere Schulen. Planimetrie. (99 S.) Berlin, Weidmann. 2.

Ernst u. Stolte, Dr., Lehrbuch der Geometrie f. Gymn., Realsch. etc. 1. Tl. Planimetrie, nebst einer Sammlung von Aufgaben. (107 S.) Strafsburg, Schultz & Co. 1,50.

Kommerell, Aufgaben aus der deskriptiven Geometrie. Zusammengestellt von Dr. Böklen, (32 S.) Tübingen, Fues. 1.

1. Arithmetik.

Gallien, Dir., Lehrbuch der Mathem. für höh. Schulen. Arithmetik und Algebra. (75 S.) Berlin, Weidmann. 0,80.

Gravelius, 5stell. logar.-trigon. Tafeln für die Dezimalteilung des Quadranten etc. Mit Vorw. von Geh. Reg.-R. Prof. Dr. Foerster. (203 S.) Berlin, Reimer. 6.

Pauli, Anweisungen zur Lösung der Textaufgaben in Bardeys Aufgabensammlung. I. Mit 1 Unbekannten. (228 S.) Rastatt, Greiser. 2,50.

B. Angewandte Mathematik.

(Astronomie. Geodäsie. Mechanik.)

Burmester, Prof. Dr., Lehrbuch der Kinematik. Für Studirende der Technik, Mathem. u. Physik. 1. Bd. Die ebene Bewegung. (560 S.) Lpz., Felix. 34.

Schmidt, Prof. Dr., Die elementare Behandlung des Kreiselproblems. (15 S.) Tübingen, Fues. 0,40.
Müller, Doc. Dr., Das Problem der Kontinuität in Mathem. u. Mechanik. (124 S.) Marburg, Elwert. 3.
Kozenn-Jarz, Mathematische Geographie. (32 S.) Wien, Hölzel. 0,30.

Physik.

Gänge, Dr., Lehrbuch der angewandten Optik in der Chemie. Spektralanalyse, Mikroskopie, Polarisation. Praktische Anleitung zu wissenschaftl. u. techn. Untersuchungen mit Hilfe optischer Instrumente nebst theoret. Erklärung der beobachteten Erscheinungen. (468 S.) Braunschweig, Vieweg. 18.
Lange, Dr., Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffes und ihr voraussichtliches Endergebnis. Ein Beitrag zur histor. Kritik der mechanischen Prinzipien. (141 S.) Lpz., Engelmann. 3.
Meisel, Dirig., Geometrische Optik, eine mathematische Behandlung der einfachsten Erscheinungen auf dem Gebiete der Lehre vom Licht. (171 S.) Halle, Schmidt 6.
Siemens, Geh. Reg.-R. Dr., Das naturwissenschaftliche Zeitalter. Vortrag, geh. in der Naturf.-Vers. Berlin. (20 S.) Berlin, Heymann. 0,80.

Chemie.

Wolff u. Baumann, Tabellen zur Berechnung der organischen Elementaranalyse. (4 S.) Berlin, Springer. 0,80.
Henrici, Gymn.-Prof., Kleiner Grundris der Elementarchemie für Gymnasien u. Realschulen. (88 S.) Lpz., Teubner. 1,20.
Schafft, Dr., Übersichtstafeln zum Unterricht in der anorganischen Chemie u. Mineralogie. Für die Schule etc. (100 S.) Bielefeld, Velhagen & Klasing. 2,60.
Medicus, Prof. Dr., Einleitung in die chemische Analyse. (165 S.) Tübingen, Laupp. 2,80.
Meyer, Loth., Über die neuere Entwickelung der chemischen Atomlehre. (24 S.) Tübingen, Fues. 0,40.

Beschreibende Naturwissenschaften.

1. Zoologie.

Kobelt, Dr., Prodromus faunae molluscorum testaceorum maria europaea inhabitantium. In 4 fasc. Nürnberg, Bauer & Raspe. à 3.
Bau, A., Handbuch für Schmetterlingssammlungen. Beschreibung und Naturgeschichte aller in Deutschland, Österreich und der Schweiz vorkommenden Schmetterlinge. Mit zahlr. Abb. (420 S.) Magdeburg, Creutz. 5.
Weismann, Aug., Über den Rückschritt in der Natur. (30 S.) Freiburg, Mohr. 1.

2. Botanik.

Stadler, Prof. Dr., Beiträge zur Kenntnis der Nektarien und Biologie der Blüthen. Mit 8 Taf. (88 S.) Berlin, Friedländer u. S. 8.
Geyer, die Wassergewächse der Heimat und der Fremde in ihrer Beziehung zum Süßwasseraquarium. (72 S.) Regensburg, Bauhof. 1,50.
Detlefsen, Gymn.-L. Dr., Wie bildet die Pflanze Wurzel, Blatt u. Blüte? Lpz., Freytag. (262 S.) 1.

3. Mineralogie.

Engler, Hofr. Prof. Dr., Das Erdöl von Baku. Geschichte, Gewinnung und Verarbeitung. (81 S.) Stuttgart, Cotta. 2.
Haas, Doc. Dr., Katechismus der Versteinerungskunde. (240 S.) Lpz., Weber. 3.

Geographie.

Wolikoff, Prof. Dr., Die Klimate der Erde. Aus dem Russ. vom Verf. Mit 10 K. u. 18 Diagrammen. (396 S.) Jena, Costenoble. 10.
Laan, Das Kartenzeichnen nach der Normallinienmethode. Mit 24 Skizz. (8 S.) Hannover, Meyer. 0,80.
Bastian, A., Indonesien. 3. Lfg. Sumatra u. Nachbarschaft. (132 S.) Berlin, Dümmler. 7.
Kraufs, Von der Ostsee bis zum Nordkap. In ca. 25 Lfgn. Neutitschein, Hosch. à 0,60.
Lange, Dr., Atlas von Deutschland. 24 Bl. Braunschweig, Westermann. 1,50.
Rein, Prof., Japan. Nach Reisen und Studien etc. 2. Bd. Land- und Forstwirtschaft, Industrie und Handel. Mit 24 Taf., 20 Holzschn. u. 3 K. (678 S.) Lpz., Engelmann. 24.
Diener, Doc. Dr., Libanon. Grundlinien der phys. Geographie etc. von Mittelsyrien. Mit Kart. u. Bild. (412 S.) Wien, Hölder. 16.
Dronke, Realgymn.-Dir. Dr., Lehrbuch der Geographie. Mit zahlr. Fig. u. Kart. 1. Heft. (240 S.) Bonn, Weber. 4.
Gelhorn, Dr., Zur Methodik des geogr. Unterrichts. (34 S.) Lpz., Fock. 1.
Geistbeck, Dr., Methodik des Unterrichts in Geographie etc. (217 S.) Freiburg, Herder. 3.
Nachtigals Reisen in der Sahara und im Sudan. Nach seinem Reisewerk dargestellt von Dr. Fränkel. (401 S.) Lpz., Brockhaus. 5.
Serth, Handels- u. Produktenkarte der Erde. Stuttgart, Maier. 4.

Neue Auflagen.

1. Mathematik.

Matthiessen, Prof. Dr., Schlüssel zur Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der allgem. Arithmetik etc. von E. Heis. Prakt. Leitfaden. 3. Aufl. 2 Bde. (610 S., 546 S.) Köln, Du Mont-Schauberg. 15.
Bardey, Dr. E., Arithmetische Aufgaben, nebst Lehrbuch d. Arithm. etc. 4. Auf. (268 S.) Lpz., Teubner. 2.
——, Methodisch geordnete Aufgabensammlung etc. 13. Aufl. (330 S.) Ebda. 2,70.
Reye, Prof. Dr., Die Geometrie der Lage. Vorträge. 3. Aufl. (248 S.) Lpz., Baumgärtner. 7.
Wöckels Geometrie der Alten in einer Sammlung von 856 Aufg. 13. Aufl. (165 S.) Nürnberg, Korn. 1,80.
Haller v. Hallerstein, Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Aufl. (218 S.) Berlin, Nauck. 4,50.
Houel, Prof. Dr., 5stellige Log.-Tafeln d. Zahlen u. d. trig. Funktionen etc. Neue durchges. Ausg. (118 S.) Paris (Berlin, Cohn.) 2.
Hattendorff, Einleitung in die analytische Geometrie. 3. Ausg. (224 S.) Hannover, Schmorl. 4.
——, Einleitung in die Lehre von den Determinanten. 2. Ausg. (60 S.) Ebda. 1,20.
Kleinpauls, Dr., Anweisung zum praktischen Rechnen. Ein method. Handbuch für den Unterricht im Rechnen. 5. Aufl. von Dr. Mertens. (266 S.) Bremen, Heinsius. 3,50.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Bericht
über die Verhandlungen der „Sektion für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" in der 59. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Berlin. Septbr. 1886.

Referent: Dr. J. Troschel-Berlin.

Der in diesem Jahre nach längerer Pause in der Naturforscherversammlung wieder auftretenden*) „Sektion für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" lag ein reiches Material zur Verhandlung vor. Allerdings wurde ein Teil der Zeit und Kräfte, welche für die Verhandlungen zur Disposition standen, auf Gegenstände verwandt, die nach der Ansicht vieler Teilnehmer eigentlich aufserhalb des Rahmens der Sektion lagen; dahin möchten wir den Vortrag von Schulz-Berlin, „Die Naturwissenschaft im Dienste der Sprachwissenschaft"**) verweisen, der überhaupt in keinem wesentlichen Zusammenhang mit dem Unterricht stand, und auch die lange Diskussionen nach sich ziehenden Vorträge über die Realschulfrage und die Reform der höheren Unterrichtsanstalten. Direktor Schwalbe-Berlin wies in seinem Vortrage nach, wie gering das Mafs griechischer Sprachkenntnisse sei, das zum Verständnis der wissenschaftlichen Terminologie der verschiedenen naturwissenschaftlich-medizinischen Disziplinen unentbehrlich ist, um damit einen der Vorwürfe zu entkräften, welche der Vorbildung der Realgymnasialabiturienten feindlich gegenüberstehen. Der Vortrag von Professor Haeckel-Jena und die sich daran anschliefsende Diskussion über die Reform des höheren Schulwesens eröffneten keine wesentlich neuen Gesichtspunkte und führten nur zu dem Beschlufs, dahin zu wirken, dafs bei der nächsten Naturforscherversammlung der betreffende Gegenstand nicht auf die Sektionssitzung beschränkt, sondern Thema eines in der allgemeinen Sitzung zu haltenden Vortrags werden sollte.

Indem wir von einem ausführlicheren Bericht über diese Vorträge absehen, wenden wir uns zu den zahlreichen Mitteilungen und Demonstrationen, die zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts und seines pädagogischen Wertes teils in methodischer, teils in inhaltlicher Beziehung bestimmt waren.

---

*) Man sehe die Nachschrift der Red. zu diesem Bericht. — Eine Einzeichnungsliste für die Mitglieder lag aus, blieb aber unvollständig. (Ist zu bedauern! D. Red.) Das Tageblatt d. Naturf.-Vers. giebt S. 439 die Zahl der Teilnehmer auf 75 an.

**) Gerade dieser Vortrag müfste u. E. Lehrern d. Naturw. sehr hörenswert und anziehend gewesen sein und wir wünschten gerade diesen Vortrag unsern Fachgenossen und den Gymnasialphilologen in dieser Zeitschr. zugänglich zu machen. D. Red.

Der Vortrag von Scholz-Berlin „Die neuere Geometrie auf den höheren Lehranstalten“ geht darauf aus, der darstellenden Geometrie im Unterrichtsplan auf Kosten der synthetischen einen gröfseren Raum zu gewähren. Nach den gegenwärtig in Kraft stehenden preufs. Lehrplänen sind die Grundzüge der neueren Geometrie in das Pensum der Oberrealschule und des Realgymnasiums aufgenommen; der hiervon der darstellenden Geometrie zufallende Anteil ist nach der Ansicht des Vortragenden ein vergleichsweise zu geringer. Die synthetische Geometrie erfordert, um in ihrer vollen Bedeutung erfafst zu werden und den Schülern den wahren Genufs zu geben, ein weit entwickelteres Anschauungsvermögen, als auf der Schule der Regel nach zu erreichen ist. Die darstellende Geometrie dagegen ist, weil sie von vornherein in der Zeichnung einen Anhalt hat, auch weniger entwickelten Anschauungsvermögen zugänglich, ist vielmehr imstande, dasselbe in hohem Mafse zu entwickeln. Während die synthetische Geometrie wegen ihrer allgemeinen Betrachtungsweise dem Schüler nicht den geistigen Genufs bietet, wie dem reiferen Mathematiker, ist gerade die darstellende Geometrie wegen des steten Überganges vom Bild zum Gegenstand, sowie durch die eigene Thätigkeit der Konstruktion, in hohem Grade geeignet, bei dem Schüler die Freude eigenen Könnens zu erzeugen. Die synthetische Geometrie hat für Nichtmathematiker kein praktisches Interesse, während die reiche Anwendbarkeit der darstellenden Geometrie in Wissenschaft und Leben derselben nach vielen Seiten hin einen eminent praktischen Wert verleiht. Besonders Ärzten, auch Juristen,*) ist es oft von wesentlichem Nutzen, durch Zeichnung eine einmal gewonnene räumliche Anschauung zu fixieren, was demjenigen ein leichtes ist, der sich mit der Darstellungsweise der darstellenden Geometrie vertraut gemacht hat.

Die Möglichkeit für eine noch weitergehende Ausdehnung der auf die darstellende Geometrie zu verwendenden Zeit sieht der Vortragende darin, dafs das Pensum der Elementarmathematik, wie es z. B. in dem Mehlerschen Lehrbuch zusammengestellt ist, leicht auf einen kürzeren Zeitraum reduziert werden kann.

In der sich anschliefsenden Diskussion werden die Vorzüge der darstellenden Geometrie im allgemeinen anerkannt; es wird aber zugleich für nicht glücklich erklärt, den Gegensatz zwischen ihr und der synthetischen Geometrie zuzuschärfen. Beide Disziplinen müssen sich notwendig unterstützen; jene mufs durch diese an Interesse gewinnen. Oberlehrer Flohr-Berlin hat in seiner langjährigen Thätigkeit beobachtet, dafs die Schüler grofse Freude z. B. an der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften gefunden haben, dafs durch die Eröffnung eines weiteren Kreises von Kenntnissen und Wahrheiten der Unterricht an Frische und Leben gewinne. Schulrat Bertram-Berlin findet die Schwierigkeit, welche die synthetische Geometrie den Schülern bietet, namentlich in der jetzt gebräuchlichen Bezeichnungsart; die Begriffe können und sollen durch Zurückgehen auf die Diskussion der zugehörigen Gleichungen leichter zugänglich gemacht werden.

Ein anderes Gebiet des geometrischen Unterrichts, die Stereometrie, behandelt Direktor Krumme-Braunschweig in seinem Vortrag „Über die Berücksichtigung der Krystallographie beim Unterrichte in den ersten Elementen der Stereometrie und Trigonometrie“. Während die Stereometrie den Zweck hat, das räumliche Anschauungsvermögen auszubilden, mufs man dem stereometrischen Unterricht den Vorwurf machen, dafs er nach der Behandlung der allgemeinen geometrischen Eigenschaften der Körper in seinen an sich ziemlich interesselosen Übungsaufgaben wesentlich dem algebraischen Unterricht Stoff bietet. Diesem Mangel will der

*) Noch mehr, meinen wir, den Ästhetikern unter den Philosophen und den Rezensenten im Fache der Kunst (Architektur, Plastik, Malerei), aber auch Geographen, bes. den Reisenden. Vgl. den Vortrag von v. Brunn, Heft 6, S. 461 ff. D. Red.

Vortragende dadurch abhelfen, dafs er die Übungsaufgaben anderen Unterrichtsgegenständen entnimmt, welche sich auch mit räumlichen Anschauungen beschäftigen, und sich auf die Grundlage des geometrischen Zeichnens stützen, namentlich aus der Perspektive, der Astronomie und Krystallographie. Er selbst hat eine Sammlung dahin zielender Aufgaben aus der Stereometrie veröffentlicht.

Einen zweiten Mangel sieht Krumme in der nicht genügenden Verknüpfung des geometrischen Zeichnens mit dem stereometrischen Unterricht. Um wirklich einen geometrischen Zeichenunterricht zu erteilen, fehlen erfahrungsmäfsig dem Lehrer der Mathematik in den meisten Fällen die Vorkenntnisse. Gerade in diesem Punkt leistet die Universität nicht genug, um die Studierenden auf ihren künftigen Beruf vorzubereiten. Es wäre dringend zu raten, dafs die Studierenden der Mathematik sich während eines Teils ihrer Studienzeit auf einer technischen Hochschule aufhielten,*) um sich dem geometrischen Zeichnen zu widmen. Unter dieser Voraussetzung wäre es für die Schüler von grofsem Nutzen, wenn dem Unterricht in der Stereometrie ein praktischer Unterricht in der Perspektive vorausginge. Neben dem besseren Verständnis der räumlichen Verhältnisse in der Stereometrie würde dadurch den Schülern auch der Vorteil gewährt, Kunstgegenstände, besonders Gemälde mit gröfserer Einsicht und mehr Interesse betrachten zu können. In Bezug auf die astronomische Geographie legt Krumme besonderes Gewicht darauf, dafs die Schüler durch mannichfache Übungen daran gewöhnt werden, die verschiedenen Arten der Projektion, die beim Kartenzeichnen vorkommen, zu unterscheiden und durch selbständige Zeichnungen sich anzueignen.

Um zu zeigen, welche unerschöpfliche Quelle von interessanten Aufgaben die Krystallographie bietet,**) erläutert der Vortragende an einfachen Beispielen mehrere Gruppen derselben, die sich auf die Berechnung der verschiedenen an Krystallen vorkommenden Winkel beziehen.

Wenn so den Ausführungen des Vortragenden gemäfs eine Ausdehnung des stereometrischen Lehrstoffes nach dem Gesichtspunkte der praktischen Anwendbarkeit stattfindet, so ist die notwendige Folge, dafs das Mafs der zu behandelnden stereometrischen Sätze in manchen Punkten beschränkt wird; dadurch wird aber der Wert des betreffenden Unterrichts nicht herabgesetzt; es ist z. B. nicht notwendig, bei der Betrachtung der regelmäfsigen Körper über Würfel, Tetraeder und Oktaeder hinauszugehen.

Die drei noch übrigen Vorträge hielten sich in den engeren Grenzen des naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Müller-Berlin wies in seinem Vortrage „Über die Benutzung des Mikroskops im Schulunterrichte“, auf die Errungenschaften der botanischen Wissenschaft seit der Benutzung des Mikroskops hin und schliefst daran die Forderung, dafs dem Schüler die Elemente des anatomischen Baues und des Lebens der Pflanzen durch Demonstration möglichst einfacher Objekte vorgeführt werden. Zur Demonstration des Elementarorgans, der Zelle und ihrer Bestandteile, empfehlen sich besonders die Wurzelhaare von *Hydrocharis Morsus ranae,* zur Betrachtung der Zellverbindung, sowie der Chlorophyllkörper, der Träger der wichtigsten Lebensfunktion, die abgeschnittenen Blätter von *Elodea canadensis;* das erste sichtbare Produkt der Assimilation soll den Schülern in Form von frischer Kartoffelstärke vorgeführt werden.

Nebenbei, bemerkt der Vortragende, ist es insofern für den Lehrer wünschenswert, den Schülern mikroskopische Demonstrationen vorzuführen, weil er sich dadurch bei jenen in ein gewisses Ansehen setzt.

---

*) Ist sehr richtig. Wenn die Universitäten in ihrem passiven Widerstande gegen die berechtigten Forderungen der Mathematiker fortfahren, so wird dieser Vorschlag auch zur Ausführung kommen. D. Red.

**) Hierfür ist in neuester Zeit ein Hilfsmittel erschienen: Henrich, Lehrbuch der Krystallberechnung. Stuttgart, Enke. 1886. D. Red.

Oberlehrer Vofs-Berlin zeigte, wie man unter Zugrundelegung des Mariotte-Gay Lussacschen Gesetzes

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

und mit der Annahme, dafs die spezifischen Wärmen der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck, c_v und c_p, konstant seien, auf elementarem Wege die sogenannte adiabatische Gleichung zwischen Druck und Volumen entwickeln könne. Zu dem Zweck stellt er sich vor, dafs einem gegebenen Gasvolumen bei konstantem Druck eine erste Wärmemenge zugeführt wird, welche das Volumen von v_0 auf v' erhöht, also proportional $c_p (v' - v_0) p_0$ sein mufs; dafs darauf eine zweite Wärmemenge bei konstantem Volumen, proportional $c_v (p' - p_0) v'$ zugeführt wird. Wenn die zweite Wärmemenge der ersten gleich, aber entgegengesetzt ist, so ist der dritte Zustand in Bezug auf den Wärmegehalt dem Anfangszustand gleich. Sind aufserdem beide Mengen unendlich klein, so wird in Wirklichkeit in keinem noch so kleinen Zeitraum Wärme zu- oder weggeführt.

Denkt man sich diesen Vorgang $n$mal wiederholt, setzt die jedesmal zu- und weggeführte Wärmemenge $\frac{q}{n}$, und läfst n unendlich wachsen, so erhält man zwei recurrierende Formeln: $p_n = p_{n-1}\left(1 + \frac{q}{n}\right)$, $v_n = v_{n-1}\left(1 - \frac{q}{kn}\right)$ und aus deren Zusammenfassung mit dem Grenzübergang $\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q$, die Gleichung für die adiabatische Zustandsänderung $pv^k = p_0 {v_0}^k$, wo k das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen bedeutet.

Koppe-Berlin sprach über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellenbewegungen. Man denke sich auf einer geraden Linie in gleichem Abstande gleiche Massen (Atome), von denen je zwei benachbarte sich anziehen oder abstofsen, wenn ihr Abstand vergröfsert resp. verringert wird. Die Kraft sei der Zunahme oder Abnahme des Abstandes proportional.

Man könnte dieses System in gröfserem Mafsstabe durch eine Reihe von Kugeln von etwa 1 dm Abstand darstellen, die sich auf einem horizontalen Stabe ohne Reibung verschieben können und durch Spiralfedern von möglichst geringer Masse verbunden sind. Wird eine Kugel (0) um 1 cm nach rechts verschoben, während die übrigen noch in ihrer alten Lage verharren, und wird dann plötzlich das ganze System sich selbst überlassen, so würde nun nach der gewöhnlichen Vorstellung die Kugel (0) in ihre natürliche Lage zurückkehren und ein Hin- und Hergang um $^1/_2$ cm, erst nach rechts, dann nach links, würde nach und nach von den übrigen Kugeln ausgeführt werden. Thatsächlich beginnt jedoch gleich im ersten Augenblick auch die Bewegung der entferntesten Teilchen. Denn während des ersten Zeit-Elements wird die Kugel (1) nach rechts gedrängt, weil sie nicht die normale Entfernung von (0) besitzt, dadurch hat sie bei Beginn des zweiten Zeitelements eine Geschwindigkeit erlangt und ihre Stellung verändert. Während des zweiten Zeitteilchens wirkt demnach auch eine Kraft auf (3) u. s. w., so dafs die Kugel (100) nach 100 Zeitelementen, d. h. nach unmefsbar kurzer Zeit, von der Bewegung ergriffen wird. Der angedeutete Weg, die Bewegung von einem Zeitelement zum nächsten für jeden Punkt zu verfolgen, wird nun praktisch wegen der Weitläufigkeit der Rechnungen nicht durchführbar sein. Indessen dürfte es keinem Bedenken unterliegen, nachdem die theoretische Möglichkeit der Rechnung nachgewiesen, das Resultat derselben historisch mitzuteilen, um an demselben zu erläutern, wie sich die genaue Auffassung

zu der Annahme einer bestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeit verhält. Zu diesem Zwecke waren die Bewegungen der Punktreihe als Funktionen der Zeit in einer mehrere Meter langen Zeichnung durch Kurven hergestellt, deren Entstehung so gedacht werden kann, dafs die mittleren 20 Punkte selbst ihre Bewegung auf die zur Längsausdehnung der Punktreihe gleichmäfsig sich fortbewegende Tafel aufgezeichnet hätten. Eine zweite Tafel zeigte in derselben Art die Bewegung für 11 Punkte, von denen die beiden äufsersten als fest angenommen waren. Die zur Herstellung der letzteren zu lösende Aufgabe ist in Lagranges Behandlung des Problems der schwingenden Saite enthalten, da derselbe statt einer solchen ein System von Punkten betrachtete, die ihre Bewegung aus einem beliebig vorgeschriebenen Anfangszustand beginnen. Man erhält die Abscisse jedes Punktes in Form eines linearen Aggregates von 5 Sinusfunktionen, deren Argumente der Zeit proportional sind. Die hiernach berechneten Kurven zeigen etwa folgenden Verlauf. Der Punkt (0) bewegt sich, anfangs langsam, alsbald schneller, nach der Gleichgewichtslage zurück, überschreitet diese und vollführt nun Schwingungen, deren Amplitude langsam abnimmt und deren Dauer sich einer bestimmten Grenze nähert. Irgend ein anderer Punkt bewegt sich anfangs fast unmerklich aber stetig aus der Gleichgewichtslage nach rechts, erreicht dann zu einer Zeit, die seinem Abstande vom Punkte (0) proportional ist, ziemlich schnell ein Maximum, um dann zu Schwingungen von langsam abnehmender Amplitude überzugehen. In dem weiteren Verlauf der Kurven zeigen sich jedoch Störungen, indem das Abnehmen der Schwingungsamplitude unterbrochen wird, oder Punkte umkehren, ehe sie die Gleichgewichtslage erreicht haben. Diese Störungen verschwinden beim Übergange zu den Kurven, welche die Bewegung in der unendlichen Punktreihe darstellen. Der oben beschriebene Ausdruck für die Abscisse des Punktes (n) geht dann bei geeigneter Wahl der Zeiteinheit in die Besselsche Funktion

$$I_{2n}(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{\pi(2n)}\left(1 - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1 \cdot 2\,(2n+1)\,(2n+2)} + \cdots\right)$$

über. Das plötzliche Ansteigen zu dem ersten Maximum findet etwa für $t = n$ statt. Gerade für derartige Werte werden aber die Reihen wegen allzu schwacher Konvergenz unbrauchbar, auch die von Bessel und Hansen berechneten Tafeln leisten keine Dienste. Es ist jedoch möglich, sowohl für den aperiodisch ansteigenden, als auch für den wellenförmigen Teil der Kurve mit Hülfe der Variation der Konstanten brauchbare Näherungswerte zu finden. Man sucht z. B. für den zweiten Teil die Funktion durch $a \cos (bt + c)$ auszudrücken, wo man unter a, b, c langsam veränderliche Gröfsen versteht, die man mittelst der Differentialgleichung in gehöriger Annäherung bestimmt. Für die Nähe des Maximums selbst ergiebt sich ein Ausdruck, der Besselsche Funktionen vom Index $\pm \frac{1}{3}$ mit dem Argumente $(t - n) \cdot n^{-\frac{1}{3}}$ enthält.

Der Verlauf der Kurven zeigt noch folgende Eigentümlichkeiten. Sobald die Bewegung eine schwingende geworden ist, durchlaufen Nachbarpunkte ihre Gleichgewichtslagen fast zu derselben Zeit und in entgegengesetzten Richtungen. Die Amplituden nehmen langsam zu 0 ab, die Schwingungsdauer nähert sich abnehmend der Zeit, in welcher das Maximum der Bewegung den Weg 2π zurücklegt, wenn als Einheit der Abstand der Punkte gilt. Für die entfernteren Punkte nimmt die Stärke der ersten Maxima (anfangs 1 cm, dann fast $1/2$ cm) immermehr ab, dafür wird die Anzahl der zugleich in merklicher Bewegung befindlichen Punkte entsprechend gröfser, und zwar im Verhältnis von $n^{\frac{1}{3}}$.

In den obenerwähnten Unregelmäßsigkeiten der einen Figur zeigt sich der Einfluſs der festen Endpunkte, den man gewöhnlich als Reflexion auffaſst. Dieser macht sich aber hier gleich bei Beginn der Bewegung geltend. Um ihn vollständig in Rechnung zu ziehen, kann man sich in den festen Endpunkten zwei zu der Punktreihe senkrechte Spiegelflächen denken, die aus dem Anfangszustand der begrenzten Reihe einen solchen für eine fingierte beiderseits unendliche Reihe herstellen. Die wirkliche Bewegung eines Punktes läſst sich dann zusammensetzen aus denen, welche bei unendlich gedachter Punktreihe herbeigeführt würden 1) durch die Verschiebung des Punktes (0) nach rechts, 2) durch die seiner ersten Spiegelbilder um 1 cm nach links, 3) durch die der weiteren Spiegelbilder abwechselnd nach rechts und links.

Aus dem Gesagten ist leicht zu folgern, was geschieht, wenn die Anfangsverschiebung eine gröſsere Reihe von Punkten umfaſst. Dieselbe könnte dann für die mittleren Punkte auch gröſser sein als der normale Abstand.

Die hier zu Grunde gelegte Auffassung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, nach der dieselbe gewissermaſsen $= \infty$ ist, rührt von Professor Schellbach her, der dieselbe im Programm des Friedrich-Wilhelmsgymnasiums zu Berlin 1866 entwickelte.

Auſser diesen Vorträgen wurde in den Sitzungen eine Reihe von wesentlich physikalischen Apparaten für den Unterrichtsgebrauch demonstriert.

Benecke-Berlin zeigte den von Neu-Neuburg a. D. angegebenen Apparat zum Nachweis der Hebelgesetze und des Parallelogramms der Kräfte.*) Die Kräfte sind statt der sonst üblichen Gewichte durch gespannte Spiralfedern ersetzt.

Prof. Weinhold-Chemnitz zeigte zuerst ein Thermoskop, welches darauf beruht, daſs Jodkupferquecksilber durch starke Erwärmung dunkelbraun wird, nach der Abkühlung die frühere rote Farbe wiedergewinnt. Dann demonstrierte er sein neues Demonstrationsthermometer, ein Luftthermometer, dessen konstantes Luftvolumen durch ein sehr feines Kupferrohr und ein kapillares, an jenes angeschmolzenes Glasrohr samt einem Quecksilbermanometer mit einem beweglichen Schenkel in Verbindung steht; die Einstellung geschieht automatisch durch einen Elektromagneten; die Skala, wegen der groſsen Verhältnisse ziemlich weit erkennbar, giebt direkt die Temperaturen. Die Korrektion wegen des Barometerstandes kann vor dem Versuch durch geringe Verschiebung der Skala gemacht werden. Ferner zeigte er die Verwendung des Instruments an einigen Versuchen: Wärmeentwicklung beim Erstarren, Siedepunktsbestimmung, Erhöhung des Siedepunktes durch Drucksteigerung. Der Preis des Apparats ist 350 Mark.

Szymański-Berlin zeigte Versuche, welche die Verdichtung und Verdünnung der Luft bei akustischen Vorgängen nachweisen sollen. Nach Melde's Vorgang hat er ein sogenanntes Blasenventil mit einem empfindlichen Manometer in Verbindung gesetzt. Je nach der Stellung des Ventils kann der Apparat zum Nachweis von Verdichtung oder Verdünnung benutzt werden. Der Vortragende zeigte beides an verschiedenen Arten der Schallerregung, durch die menschliche Stimme, bei den Chladnischen Klangfiguren, indem er das Ventil mit einem kleinen Trichter verband und über verschiedenen Teilen der schwingenden Platte anbrachte; ferner an gewöhnlichen Pfeifen, sowie an einfachen Glasröhren, die auf einen Stimmgabelton abgestimmt waren; bei letzteren wurde das Ventil mittelst einer engeren Glasröhre in das Innere derselben gebracht.

Besonders lehrreich waren die Demonstrationen des Schulinspektors Zwick-Berlin. Derselbe zeigte zunächst ein von ihm konstruiertes

*) Schon mitgeteilt in der Zeitschr. f. physikal. Unterr. Jahrg. II, Heft 5. D. Red.

Galvanometer, dessen langer, in senkrechter Ebene beweglicher Zeiger einem ganzen Auditorium sichtbar ist. Sodann zeigte er, wie man durch eine Reihe von Versuchen mit starken natürlichen oder Elektromagneten, die durch eine Drahtrolle geschoben werden, die induzierende Wirkung derselben nachweisen und durch Übergang vom geraden Magnetstabe zum ringförmig gebogenen den Schülern das Verständnis des Grammeschen Ringes und der Dynamomaschine ermöglichen kann. Er benutzte dazu einen Ringmagneten, der aus zwei kräftigen, halbkreisförmigen Stahlmagneten zusammengesetzt wurde, indem die gleichnamigen Pole aufeinander gelegt wurden.

Prof. August-Berlin zeigte einen Skiostaten, dessen ursprüngliche Konstruktion von dem Vater des Vortragenden herrührt, an dem er die Änderung so angebracht hat, dafs er durch Verschiebung auf einem vertikalen Kreise für alle geographischen Breiten verwendbar ist; auch ist die Form im Ganzen vereinfacht, so dafs er auch als Taschenapparat benutzt werden kann.

Oberl. Pfeiffer-Berlin demonstriert eine von Herbst konstruierte dynamoelektrische Handmaschine, bei deren Konstruktion die Siemenssche Trommel benutzt ist, um möglichste Übereinstimmung mit den in öffentlichem Gebrauch stehenden Dynamomaschinen zu erzielen.

Endlich zeigte Stroefser-Brüssel einen von ihm konstruierten Uranographen, der ein treues Abbild der wirklichen Bewegung von Erde und Mond um die Sonne giebt und sich vor ähnlichen Apparaten dadurch auszeichnet, dafs die Erdbahn mit der Horizontalebene den Winkel von $23\frac{1}{2}$ Grad bildet.

Nachschrift der Redaktion. Die Berichte über die früheren Verhandlungen der „Sektion für mathem. und naturw. Unterricht" sind in ds. Zeitschr. an folgenden Stellen gegeben (vergl. auch Bd. X, S. 3, Jahrg. 1879, wo für die früheren Jahrgänge eine Zusammenstellung der Zitate steht):

für Innsbruck	1869	in Bd. I,	84 ff. (Ref. Krumme),
„ Rostock	1871	„ „ II,	478 (Antrag des Herausg. auf Verlegung der Naturf.-V.),
„ „	„	„ „ II,	555 Verh. (Ref. Krumme),
„ „	„	„ „ III,	84 Rede Virchows,
„ Leipzig	1872	„ „ III,	571 (Ref. Krumme),
„ Graz	1875	„ „ VI,	501 (Ref. Herausgeber) u. VII, 159 (Günthers Vortrag), 250 (Hoppes Vortr.),
„ Hamburg	1876	„ „ VIII,	86 (Ref. Dränert)*),
„ München	1877	„ „ VIII,	549 (Ref. Sickenberger)**),
„ Cassel	1878	„ „ X,	78 (Ref. Herausgeber d. Ztschr.),
„ Baden-Baden	1879	„ „ XI,	157 (Ref. Mang),
„ Danzig	1880	„ „ XII,	163 (Ref. Schumann),
„ Salzburg	1881	die Sektion fiel aus (man lese unsre Bem. XII, 487),	
„ Eisenach	1882	in Bd. XIII, 481 (die Sektion fiel aus). Vom Herausgeber. Man lese unsre Bem. XIII, 481 u. f., bes. S. 483 (den Bericht über die Verhandlungen in der Naturf.-Vers. dort s. XIV, 153 u. 223),	

In den Jahren 1883—1885 fiel die Sektion aus.

Wir haben diese Zusammenstellung gegeben, weil sich unter (Berliner)

---

*) Hierauf bezieht sich auch die „improvisierte Rede etc." des Herausgebers am Anfange des VIII. Bandes ds. Z.

**) Auf der Versammlung in München erhielt die „Sektion für naturw. Pädagogik" (wie sie früher hiefs) den Namen „Sektion für naturwissenschaftlichen Unterricht" (vgl. VIII, 550), der später vervollständigt worden ist in: „S. f. mathematischen und n. Unt.

Fachgenossen, wie es scheint, die Meinung gebildet hat, als sei in Berlin die Sektion „zum ersten Male selbständig“ aufgetreten. Dies wäre aber ein grofser Irrtum. Die Sektion wurde 1868 in Dresden gegründet, nachdem sie vorher schon in Frankfurt a/M. (1876) angeregt worden sein soll. (Vergl. I, S. 4 und 84.)

Bericht über die Feier des 50jähr. Amtsjubiläums des Oberlehrers Dr. Kessler in Kassel*) am 11. Oktober 1886.

Eine goldene Lehramts-Jubelfeier.

Am 11. Oktober, dem ersten Tage des laufenden Winterhalbjahres, feierte die Realschule zu Kassel die fünfzigjährige Wiederkehr des Tages, an welchem ein Mitglied ihres Lehrerkollegiums, Herr Oberlehrer Dr. Hermann Friedrich Kessler in den öffentlichen Schuldienst getreten ist.

Zahlreich waren die Gäste zu der schönen Feier erschienen, zahlreich waren die Dank- und Ehrenbezeugungen, welche dem Jubilar von den verschiedensten Seiten entgegengebracht wurden. Der Schilderung über den Verlauf der Festlichkeit mögen hier einige Notizen über den Lebensgang und die reiche wissenschaftliche Thätigkeit des Jubilars vorausgeschickt werden.

Kessler wurde geboren am 16. Juni 1816 in Treis a/L. als Sohn des dortigen Lehrers. Nach Besuch der Schule seines Heimatsortes war er von 1833 bis 1836 Zögling des längst eingegangenen Schullehrerseminars zu Marburg, aus welchem er in eine Lehrerstelle eines kleinen oberhessischen Ortes, Allna, überging. Nach zwei Jahren erfolgte die für ihn so entscheidende Versetzung an eine Mädchenschule in Marburg. Hier benutzte er mit regem Eifer und unermüdlichem Fleifse die Gelegenheit, sich wissenschaftlich auszubilden, unter besonderer Bevorzugung der beschreibenden Naturwissenschaften. Im Jahre 1843 wurde er bei Gründung der Realschule zu Kassel an diese berufen, an welcher sein 50jähriges Amtsjubiläum zu feiern ihm ein gütiges Geschick zu Teil werden liefs. Welche bewundernswerte Arbeitskraft dem Jubilar innewohnt, zeigen die zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten, namentlich aus dem Gebiete der Entomologie, welche er von 1859 an bis in die neueste Zeit veröffentlicht hat, und denen ohne Ausnahme sehr langwierige und mühsame Beobachtungen vorausgingen. Seine Dissertation behandelte die bis dahin noch unerforschte Lebensgeschichte eines Käfers und einer Blattwespe, des „*Ceutorhynchus sulcicollis* und *Nematus ventricosus*“. Programme der Realschule zu Kassel brachten als wissenschaftliche Beilagen folgende Abhandlungen: „Landgraf *Wilhelm IV.* von Hessen als Botaniker“ (1859); „Über *Campoplex argentatus* etc.“ (1867); „Die Herbarien im Königlichen Museum zu Kassel“ (1872); „Die auf *Ulmus campestris* vorkommenden *Aphiden*arten“ (1878). In den Jahresberichten des Vereins für Naturkunde zu Kassel erschienen von ihm: „Die Lebensgeschichte von *Tetraneura ulmi*, *T. alba Schizoneura ulmi* und *Sch. lanuginosa.*“ Mit 1 Taf. (1878). — „Über die Entwickelung von *Coccinella septempunctata*“ (1880). — „Neue Beobachtungen an den auf der Ulme lebenden *Aphiden.*“ Mit 2 Taf. Abb. (1880). — „Die auf *Populus nigra* und *P. dilatata* vorkommenden *Aphiden*arten *Pemphigus bursarius*, *Pemphigus spirothecae*, *Pemphigus affinis* und *P. ovato-oblongus.*“ Mit 4 Taf. Abb. (1881). — „Über *Chaitophorus leucomelas*“ (1881). — „Über die Entwickelungsweise der

---

*) Orthographie des Berichterstatters. Red.

Lärchenlaus, *Chermes Laricis*" (1881). — „Die Entwickelungs- und Lebensweise der Käsefliege *(Piophila casëi L.)*" (1883). — „Die Entwickelungs- und Lebensgeschichte von *Schizoneura corni*. Ein Beitrag zur Bestätigung der Lichtensteinschen Aphidentheorie" (1883). — „Über *Aphidius varius* als Schmarotzer an *Aphis aceris*" (1884). — „Beobachtungen an *Chermes fagi*" (1884). — „Entwickelungs- und Lebensweise von *Niptus hololeucus*" (1886). — In den Novis Actis der königl. Lepoldinisch-Karolinischen deutschen Akademie der Naturforscher erschien von ihm (Bd. XLVII. Nr. 8, Halle, 1884): „Beitrag zur Entwickelungs- und Lebensweise der *Aphiden*." (Mit 1 Taf.), eine auf neue Entdeckungen gegründete sehr umfangreiche Arbeit und in Bd. LI, Nr. 2 1886, die Entwickelungs- und Lebensgeschichte von *Chaitophorus aceris, Ch. testudinatus* und *Ch. lyropictus* Kessler. Drei gesonderte Arten, bisher nur als eine Art, *Aphis Aceris* L. bekannt. (Mit 1 kolor. Taf.). Endlich sind als selbständige Werke zu verzeichnen: „Das älteste und erste Herbarium Deutschlands". Kassel 1870. — „Die Entwickelungs- und Lebensgeschichte der *Blutlaus* und deren Vertilgung. Nebst einem Anhang, Ähnlichkeiten in der Entwickelungs- und Lebensweise der Blutlaus und der Reblaus betr." Mit 1 Taf. Ebda. 1885. — „Beobachtungen an der *Reblaus*." Ebda. 1886. — „Weiterer Beitrag zur Kenntnis der *Blutlaus*." Ebda. 1886. — „Notizen zur Lebensgeschichte der *Rosenblattlaus*." Ebda. 1886.

In Würdigung seiner wesentlichen Förderung der Kenntnis von dem Leben und der Entwickelung der genannten Tiere, welche zum Teil gefährliche Feinde unserer Kulturgewächse sind und in der neuesten Zeit immer drohender ihr Haupt erheben, immer gröfsere Verwüstungen anrichten, wurden ihm im Jahre 1879 die Funktionen eines Sachverständigen behufs Ermittelung etwaiger Reblausinfektionen im Regierungsbezirk Kassel übertragen. Aufserdem erhielt er auf Veranlassung und mit Unterstützung des Ministers für Landwirtschaft wiederholt Gelegenheit, an Reblausherden am Rhein Beobachtungen über die Reblaus anzustellen. Die Resultate derselben sind zum Teil in Berichten an den Minister, zum Teil in der oben genannten Schrift niedergelegt. Die königl. Leopoldinisch-Karolinische Akademie der Naturforscher hat ihn am 23. Dezember 1879 zu ihrem Mitgliede erwählt.

Wie seine Verdienste als Entomologe auch im Auslande gewürdigt werden, mag die Thatsache beweisen, dafs einer der hervorragendsten Entomologen Frankreichs, jedenfalls der erste jetzt lebende Aphidenkenner, Dr. Jules Lichtenstein in Montpellier, sowohl in verschiedenen Abhandlungen der dortigen Akademie in der anerkennendsten Weise der Kesslerschen Beobachtungen und Entdeckungen Erwähnung thut, als auch in einer kürzlich selbständig erschienenen Schrift *„Monographie des Pucerons du peuplier"* (Montpellier 1886) eine neue Gattung von Blattläusen unter dem Namen *Kessleria* in die Wissenschaft einführt und dazu bemerkt: *„je donne ce nomme en honneur de M. le professeur Kessler, de Kassel, qui a admirablement étudié les Pucerons de l'ormeau, du peuplier etc.*

Über den Verlauf des Festaktus mag hier Folgendes erwähnt werden. Nachdem der Jubilar und dessen Familie von einer Deputation aus der Wohnung abgeholt worden waren und die Ehrenplätze in der festlich geschmückten Aula der Schule eingenommen hatten, nahm die Feier mit Absingung des Liedes: „Herr, der du mir das Leben" seitens des Sängerchors der Schüler ihren Anfang. Nach Beendigung des Gesanges trat Herr Provinzialschulrat Dr. Lohmeyer auf den Jubilar zu und richtete eine Ansprache an denselben, in welcher er ungefähr folgendes sagte: „Hochverehrter Herr Oberlehrer! Durch Gottes Gnade ist Ihnen das seltene Glück zu Teil geworden, jetzt auf eine fünfzigjährige Thätigkeit zurückschauen zu können, und diese Ihre Wirksamkeit war der Bildung der Jugend, der Förderung der Wissenschaft zugewandt, fürwahr eine hehre Aufgabe, ein hoher Beruf. Ihre Kollegen, die Genossen Ihrer Arbeit, die Schüler, deren

Wohl Ihnen am Herzen liegt, haben sich vereinigt, diesen Tag mit Ihnen zu begehen, eine ansehnliche Versammlung aus den verschiedensten Kreisen, um Ihnen ihre Teilnahme zu bezeugen. Ein Tag der Ehre ist es für Sie, geehrter Herr Oberlehrer, ein Tag der Freude für diese Anstalt, ein Tag des Dankes für Alle, für deren Geist und Herz Sie im Laufe der Jahre gearbeitet haben. Manche Gabe der Anerkennung und Liebe wird Ihnen dieser Tag bringen, und lassen Sie da die erste Stelle die Anerkennung Sr. Majestät unseres Kaisers und Königs für langjährige treue Dienste auf dem Gebiete des Schulwesens einnehmen. Seine Majestät hat geruht, Ihnen das Kreuz des rothen Adlerordens IV. Kl. mit der Zahl 50 zu verleihen. Im Auftrag des Provinzialschulkollegiums, auf dessen Vorschlag die Verleihung erfolgte, überreiche ich Ihnen das Kreuz.“ Im Anschlufs hieran verlas derselbe ein ehrendes Schreiben des königl. Provinzialschulkollegs und legte es in die Hände des Jubilars nieder. Der Direktor der Schule begrüfste sodann die erschienenen Festgäste im Namen der Anstalt, entwarf ein lebendiges Bild des arbeitsvollen Lebens und gesegneten Wirkens des Jubilars, den man zwar in erster Linie als Lehrer, dann aber auch als Gelehrten, Bürger und Familienvater ehre und hochschätze; zum Schlufs die Glückwünsche des Lehrerkollegiums aussprechend, überreichte er als Geschenk desselben eine goldene Uhr mit Kette. Als nächster Gratulant ergriff der Bürgermeister der Stadt das Wort, betonte, wie die Früchte der Arbeit des Jubilars vor Allem die Stadt Kassel geerntet, welcher er 44 Jahre in derselben Stellung ununterbrochen angehört habe. Neben den Glückwünschen sei er beauftragt Namens der Stadt auch ein Geschenk zu überreichen, welches ihn im Kreise seiner Familie oder froher Gäste an die unwandelbare Dankbarkeit der Einwohner Kassels erinnern möge. Die Gabe bestand in einem mit dem silbernen Wappen der Stadt und passender Widmung geschmückten Etuis mit silbernem Tafelgeräte.

Der Verein für Naturkunde, welchem der Jubilar seit vielen Jahrzehnten als eins der eifrigsten und treuesten Vorstandsmitglieder angehört, ehrte ihn durch Ernennung zum Ehrenmitglied unter Überreichung einer kalligraphisch ausgeführten Votivtafel. Dieselbe trug aufser der Eingangswidmung den folgenden Text: „Die fünfzigjährige Wiederkehr des Tages, an welchem Sie in das Lehramt eintraten, will der Verein für Naturkunde nicht vorübergehen lassen, ohne Ihnen seine tiefempfundenen, herzlichsten Glückwünsche darzubringen. Verehrt er doch in Ihnen sein weitaus ältestes Mitglied in hiesiger Stadt, welches, wie es oft berufen war die dem Verein teuer gewordenen Überlieferungen treu zu bewahren, ihm seit Jahrzehnten seine unausgesetzte Thätigkeit in der Leitung der Geschäfte, in der Erhaltung und Nutzbarmachung seiner Sammlungen und insbesondere seiner Bibliothek widmete. Zu noch gröfserem Danke haben Sie ihn, dessen Bestimmung ja die Pflege der Naturwissenschaften ist, durch Ihre ebenso wichtigen als erfolgreichen Arbeiten auf dem Gebiete der Entomologie verpflichtet, deren Veröffentlichung den Vereinsschriften, deren Mitteilung den Vereinsversammlungen hohen Wert und hohes Interesse verliehen haben. Und so gestatten Sie denn an dem heutigen Festtage dem Verein, seinen Dank dadurch zu bethätigen, dafs er Sie, hochverehrter Herr Jubilar, zu seinem Ehrenmitgliede ernennt.“

Die sämmtlichen übrigen höheren Lehranstalten Kassels (das Friedrichsgymnasium, das Wilhelmsgymnasium, das Realgymnasium und die Gewerbe- und Handelsschule) liefsen durch Deputationen den Wünschen der betreffenden Lehrerkollegien Ausdruck geben.

Auch der hiesige Ornithologische Verein, wie der Tierschutzverein hatten ihre Vertreter gesandt, um die Verdienste des Jubilars anzuerkennen und ihm die Erwählung zu ihrem Ehrenmitglied mitzuteilen; in gleicher Weise ehrte ihn der Landwirtschaftliche Centralverein für Hessen.

Zum Schlufs bestig der Gefeierte das Katheder, um in bewegten Worten für alle die Beweise der Liebe, Huld und Achtung, welche ihm

an diesem schönsten Tage seines Lebens zu Teil geworden, seinen tiefgefühlten Dank auszusprechen. Mit Absingung eines Liedes war dieser Teil der Feier geschlossen.

Abends versammelte sich mit dem Gefeierten und den männlichen Angehörigen seiner Familie eine nahe an 200 Teilnehmer zählende Festgesellschaft, Mitglieder des Provinzialschulkollegs, des Stadtrates und Bürgerausschusses, Freunde, Kollegen aller Schulen, zahlreiche frühere Schüler, in dem grofsen, schön geschmückten Stadtbausaale, um hier beim Festesmahle und fröhlichen Klange der Becher den Zoll warmer Dankbarkeit und inniger Verehrung darzubringen. Dafs in der grofsen Tafelrunde die glücklichste Stimmung herrschte, dafs dieselbe in zahlreichen Toasten ihren vollen Ausdruck fand, bedarf keiner besonderen Bestätigung.

Mögen unsere bereits an anderer Stelle ausgesprochenen Wünsche sich erfüllen, dafs es dem Jubilar vergönnt sein möge, im Umgang mit der ewig jungen Natur körperliche Rüstigkeit und Frische des Geistes noch lange Jahre sich zu erhalten, noch lange Jahre zu wirken mit ungeschwächter Kraft für die Wissenschaft wie für die Bildung des heranwachsenden Geschlechtes. Dr. A.

Vortrag,

gehalten am 15. Juni 1886 zu Fürstenwalde in der Provinzialversammlung des Vereins seminarisch gebildeter Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten (Abteilung für Brandenburg)

von W. Stegemann, Lehrer am Gymnasium in Prenzlau.*)

Thema: *Einige Wünsche den Rechenunterricht in den unteren Klassen höherer Lehranstalten und deren Vorschulen betreffend.*

Verehrte Herren Amtsgenossen!

Indem ich mich anschicke, heute hier in unserer Versammlung einige meines Erachtens noch berechtigte Wünsche vorzubringen, welche den Rechenunterricht an höheren Lehranstalten und deren Vorschulen betreffen, bemerke ich von vorn herein, dafs ich mich auf längere methodische Auseinandersetzungen nicht einlassen werde. Ich möchte vielmehr Ihre Aufmerksamkeit hinlenken auf einen gewissen Punkt, der die höchste Beachtung verdient, der dieselbe aber noch nicht überall findet, nämlich auf die Korrektheit des Ausdrucks sowohl beim mündlichen Rechnen, als bei der schriftlichen Darstellung. Dafs dieser Punkt wirklich noch nicht immer die genügende Beachtung findet, werde ich zu beweisen suchen durch Beispiele aus meiner praktischen Erfahrung und durch Citate aus Rechenbüchern. Diese Citate werde ich nur aus solchen Rechenbüchern entnehmen, die allgemein als gut und brauchbar anerkannt worden sind.

Der Rechenunterricht in den Vorschulen und in den unteren Klassen höherer Lehranstalten dient hauptsächlich einem formalen Zweck; er soll vorbereiten auf den später beginnenden arithmetischen Unterricht. Die sogenannten Bedürfnisse des praktischen Lebens müssen hiergegen zurücktreten. Darum heifst es auch in dem (preufs.) Lehrplan für die höheren Schulen vom 31. März 1882: „Für die Behandlung der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, denen in manchen Rechenbüchern ein grofser Umfang gegeben wird, ist wohlüberlegtes Mafshalten dringend zu empfehlen.

*) Abdruck aus dem Vereinsorgan. Verfasser hat aber auf Anregung der Redaktion einige Punkte seines Vortrags für diese unsere Ztschr. noch etwas klarer gestellt, besonders durch Hinzufügung von Beispielen. Man vergleiche übrigens zu diesem Vortrage unsere Ztschr. IX, 171; X, 78; XIII, 274 und viele andere Stellen. D. Red.

In vielen Fällen liegt die Schwierigkeit nicht im Rechnen an sich oder in der Unterordnung bestimmter Vorkommnisse des geschäftlichen Verkehrs unter die Form einer Rechenoperation, sondern in dem Verständnisse der betreffenden Vorkommnisse des Verkehrs selbst. Dieses Verständnis, für Knaben in den unteren Klassen nur mit erheblichem Zeitaufwande und nicht leicht mit dauerndem Erfolge erreichbar, ergiebt sich ohne Schwierigkeit für den im Rechnen überhaupt Geübten bei wirklichem Eintritte in den fraglichen Verkehr." Ist nun hiernach die Vorbereitung auf den arithmetischen Unterricht die Hauptaufgabe des Rechenunterrichts an den höheren Lehranstalten und deren Vorschulen, so mufs derselbe so erteilt werden, dafs der arithmetische Unterricht unmittelbar an den Rechenunterricht anknüpfen kann. Dies wird aber nur dann möglich sein, wenn in den beiden genannten Unterrichtszweigen für dieselben Rechnungsoperationen auch dieselben Ausdrücke und schriftlichen Bezeichnungen gebraucht werden. Es mufs daher als eine unabweisbare Forderung hingestellt werden, dafs bei dem Rechenunterricht so früh als möglich dieselbe Terminologie angewandt werde, welche beim arithmetischen Unterrichte gebräuchlich ist.

Diese Forderung ist ebenso wichtig wie diejenige, dafs im deutschen Unterricht die Terminologie des lateinischen Unterrichts anzuwenden ist, da beide Unterrichtsgegenstände Hand in Hand gehen müssen. Wenn ich gesagt habe, die bei dem arithmetischen Unterrichte gebräuchlichen Ausdrücke sollen so früh als möglich auch beim Rechenunterrichte eingeführt werden, so meine ich damit, dafs dies schon in der letzten Vorschulklasse geschehen müsse, nämlich dann, wenn die Schüler anfangen, die Aufgaben, welche vorher mit Hilfe der nötigen Veranschaulichungsmittel mündlich durchgenommen worden sind, in eine schriftliche Form zu bringen. Die ersten Aufgaben, welche schriftlich dargestellt werden, sind naturgemäfs die einfachsten Additionsaufgaben, also z. B. $2+1=3$. Dieser Aufgabe entspricht die arithmetische Formel $a+b=c$. Hier wird es keinem Mathematiker einfallen, zu lesen „*a* und *b* ist *c*", sondern es wird ein für allemal gelesen „*a* plus *b* gleich *c*". Ich sehe nun keinen Grund ein, warum dementsprechend die vorhin angeführte Aufgabe $2+1=3$ nicht schon in der letzten Vorschulklasse sollte gelesen werden können: 2 plus 1 gleich 3. Die allerdings noch in sehr jugendlichem Alter stehenden Schüler werden die mit den Worten „plus" und „gleich" zu verbindenden Vorstellungen ebenso leicht erfassen, als wenn man ihnen statt dieser Worte die Worte „und" und „ist" giebt. Warum wollte man daher die Schüler die obige Aufgabe erst jahrelang „2 und 1 ist 3" lesen lassen, um ihnen nachher doch sagen zu müssen: Von jetzt ab wird gelesen „2 plus*) 1 gleich 3"? Auch dafs in der vorliegenden Aufgabe die Zahl 3 eine Summe ist, kann den Schülern sehr wohl auf dieser Stufe schon mitgeteilt werden. Ähnlich ist es bei den übrigen Grundrechnungsarten. Doch darauf will ich jetzt nicht näher eingehen, sondern nur noch nachdrücklichst hervorheben, dafs, wenn den Schülern die in der Arithmetik gebräuchlichen Ausdrücke und Bezeichnungen geläufig werden sollen, hierzu eine fortgesetzte Einübung notwendig ist. Der Schüler soll nicht mehr nötig haben, wenn ihm irgend einer dieser Ausdrücke vorkommt, sich über die Bedeutung desselben zu besinnen; es soll ihm dies alles gewissermafsen in Fleisch und Blut übergegangen sein. Dieses Ziel ist aber nicht zu erreichen, wenn die betreffenden technischen Ausdrücke nur ausnahmsweise angewandt werden und wenn dieselben gewöhnlich durch andere Ausdrücke ersetzt werden. Sollte diese Praxis im Volksschulunterrichte für statthaft erklärt werden, so will ich meine Bedenken zurückhalten; unter

*) warum nicht das deutsche „mehr" („weniger"), wie es in Österreich gebraucht wird? Ferner liegt in beiden Ausdrücken „ist" und „gleich" eine Abkürzung; sie gehören zu den sog. (sprachlichen) „Ellipsen". Denn „ist" steht für „ist gleich" oder „ist so viel als" und das nackte „gleich" ist das abgekürzte „ist gleich". D. Red.

keinen Umständen ist sie zulässig im Rechenunterricht der höheren Lehranstalten und deren Vorschulen. Hier ist jede Gelegenheit, die sich darbietet, die Einübung der Terminologie der Arithmetik zu fördern, eifrigst zu benutzen. — Da ich versprach, über Korrektheit resp. Inkorrektheit der Ausdrucksweise beim mündlichen Rechnen sowie bei der schriftlichen Darstellung zu reden, mufs ich noch bemerken, dafs das Nichteinführen der gebräuchlichen Sprache der Arithmetik in den Rechenunterricht wohl als eine Unterlassungssünde, aber an und für sich nicht als eine Inkorrektheit bezeichnet werden kann. Es entstehen aber Inkorrektheiten dadurch insofern, als an Stelle der in der Arithmetik allgemein angenommenen Ausdrücke sich zum Teil solche eingebürgert haben, die zu Bedenken Veranlassung geben.

Ich komme nun zu den eigentlichen Inkorrektheiten. Hierbei sollen im Folgenden unterschieden werden eingekleidete Aufgaben von nicht eingekleideten. Unter eingekleideten Aufgaben sollen solche verstanden werden, deren Bedeutung aus dem Text der Aufgabe zu entnehmen ist und in denen daher auf Anwendung der Rechnungszeichen verzichtet wird. Es ist z. B. die Aufgabe: „Wie oft sind 3 M. in 21 M. enthalten?" eine eingekleidete Aufgabe. Unter nicht eingekleideten Aufgaben sind solche zu verstehen, in denen nur die Zahlen der Aufgabe, verbunden durch die notwendigen Operationszeichen, gegeben sind, sodafs also der Sinn der Aufgabe hieraus zu entnehmen ist. So ist z. B. die Aufgabe „21 M. : 3 M." dieselbe Aufgabe wie die vorige, aber in uneingekleideter Form. Es ist eine notwendige Übung für die Schüler, dafs sie, wenn eine eingekleidete Aufgabe gegeben ist, die auszuführende Rechnung in uneingekleideter Form, also blofs mit Hilfe der Rechnungszeichen, anzugeben angehalten werden. Ebenso ist es unerläfslich, dafs die Schüler darin geübt werden, die Bedeutung einer nicht eingekleideten Aufgabe anzugeben, d. h. die Aufgabe als eine eingekleidete darzustellen. Dabei ist als oberster Grundsatz festzuhalten: J e d e e i n g e k l e i d e t e A u f g a b e i s t v o m L e h r e r i n k o r r e k t e m D e u t s c h u n d, f a l l s s i e s c h r i f t l i c h v o r l i e g t, a u c h m i t r i c h t i g e r I n t e r p u n k t i o n z u g e b e n; h a t d e r S c h ü l e r d i e A u f g a b e z u f o r m u l i e r e n, s o i s t s i e v o n i h m e b e n s o z u f o r d e r n. Bei der schriftlichen Darstellung ist der Gebrauch der Rechnungszeichen im Text der eingekleideten Aufgaben zu vermeiden; es entstehen sonst leicht Unzuträglichkeiten, wie ich weiterhin bei Besprechung der einzelnen Rechnungszeichen nachweisen werde. Sodann ist den sinnentstellenden Abkürzungen, vor allen Dingen dem Mifsbrauch des Fragezeichens energisch entgegen zu treten. Ein Fragezeichen gehört in eingekleideten Aufgaben absolut nur an das Ende eines Fragesatzes, aber nirgends wo anders hin. Was soll es in der Mitte oder gar am Anfange eines Satzes? Ich weifs sehr wohl, es soll die Worte „wie viel" vertreten. Ich mufs dies jedoch für unstatthaft erklären; denn in den jugendlichen Köpfen, die gröfstenteils mit Interpunktion sich noch nicht beschäftigt haben, mufs dies eine heillose Verwirrung über die Bedeutung des Fragezeichens anrichten. Und ist denn, wenn man für das „wie viel" die zu keinem Zweifel Veranlassung gebende Abkürzung „w. v." anwendet, der Gebrauch des Fragezeichens noch eine nennenswerte Erleichterung beim Niederschreiben der Aufgabe? Doch gewifs nicht. Also fort damit! In einem Falle habe ich gegen den Gebrauch des Fragezeichens nichts einzuwenden, nämlich dann, wenn der besseren Übersicht wegen die Zahlen einer Aufgabe schematisch geordnet sind und das Fragezeichen an die Stelle der zu suchenden Zahl tritt. — Zahlreiche Beispiele der von mir gerügten Anwendung des Fragezeichens finden sich in dem „Übungsbuch im Rechnen von A. Böhme, Nr. III." Hier sind sehr viele der Resolutions- und Reduktions-Aufgaben in der Form gegeben: „13 Tg. 17 St. 36 Min. ? Min." oder „5937 Min. ? Tg. St." Liest man hier statt des Fragezeichens „wie viel", so erhält man unvollständige Sätze, in denen nicht einmal das Fragewort voransteht; nimmt

man aber an, die gegebene Frage solle eine schematische Darstellung sein, ersetzt man also das Fragezeichen durch die zu suchende Zahl, so giebt das erst recht keinen Sinn. Übrigens ist bei so einfachen Aufgaben eine schematische Darstellung vollständig überflüssig und die als Beispiele angeführten Aufgaben hätten sehr wohl in den korrekten Formen „W. v. Min. sind 13 Tg. 17 St. 36 Min.?“ und „W. v. Tg. u. St. sind 5937 Min.?“ gegeben werden können, ohne einen erheblich größeren Raum zu beanspruchen. — Zur korrekten Behandlung einer eingekleideten Aufgabe gehört auch noch, daß, wenn die Aufgabe in Form einer Frage gegeben ist, oder eine solche enthält, diese Frage in einem vollständigen und korrekten Satz beantwortet werde. Die strenge Durchführung dieser Forderung ist geeignet, dem mechanischen Schlendrian vorzubeugen, der sich mit dem Hinschreiben der für die Rechnung notwendigen Zahlen begnügt. Der Schüler wird eben dadurch gezwungen, nach Beendigung der Rechnung sich noch einmal dessen bewußt zu werden, zu welchem Zwecke dieselbe gemacht worden ist.

Die Besprechung der einzelnen Rechnungszeichen, welcher ich mich jetzt zuwende, möge mit dem **Gleichheitszeichen** beginnen. Der Bedeutun gdieses Zeichens nach darf es beim Rechnen nur zwischen zwei gleichen Zahlen (z. B. 3 Tg. = 72 St.) oder zwischen solchen Verbindungen von Zahlen stehen, deren Gleichheit sich nach Ausführung der geforderten Rechnungsoperationen erweist (z. B. 28 : 4 = 5 + 2). Aber wie oft wird hiergegen gefehlt! Ich will ganz absehen von den groben Verstößen, die erkennen lassen, daß keine Ahnung von der Bedeutung des Gleichheitszeichens vorhanden ist, wie z. B., wenn dasselbe dazu gebraucht wird, verschiedene Zahlen von einander zu trennen, was ich schon vielfach in der Praxis gesehen habe.*) Ich möchte nur an einer Anzahl von Beispielen nachweisen, daß auch in unsern besten Rechenbüchern noch mancherlei Ungenauigkeiten betreffend den Gebrauch des Gleichheitszeichens enthalten sind. — Zunächst hat das Gleichheitszeichen nichts zu suchen in dem Text

*) Daß das Gleichheitszeichen namentlich auch zuweilen als bloßes **Trennungszeichen** auftritt, ist mir in meiner Praxis wiederholt begegnet. Hier einige Beispiele:

Für das Gleichnamigmachen der Brüche habe ich schon folgende schriftliche Form angetroffen:

$$\begin{array}{c|l} \frac{17}{20} & 3 = \frac{51}{60} \\ \frac{11}{12} & 5 = \frac{55}{60} \\ \frac{8}{15} & 4 = \frac{32}{60} \end{array}$$

Ferner bei der Gewinn- und Verlustrechnung:

$$\begin{array}{l} 100\ \mathcal{M}\ \text{Einkaufspreis} = 12\frac{1}{2}\ \mathcal{M}\ \text{Gewinn,} \\ \underline{240\ \text{„}\quad\ \text{„}\quad = \ ?\ \ \text{„}\quad \text{„}} \end{array}$$

Daß solche Anwendungen des Gleichheitszeichens nicht geeignet sind, den Schülern eine richtige Vorstellung von der Bedeutung dieses Zeichens zu verschaffen, ist selbstverständlich. Weniger schlimm, aber doch auch nicht korrekt, ist das folgende aus dem Böhmeschen Übungsbuch No. XII, S. 21 entnommene Beispiel:

$$\begin{array}{l} 3\frac{3}{5}\ \text{m k. } 2\frac{18}{25}\ \mathcal{M} \\ \underline{4\frac{1}{2}\ \text{„}\ \text{„}\quad ?\qquad\ } \end{array}$$

$$\frac{68\,.\,5\,.\,9}{25\,.\,18\,.\,2} = \frac{68}{20} = 3\frac{8}{20}\ \mathcal{M}$$

Da hier der Bruchsatz den Preis von $4\frac{1}{2}$ m angiebt, so kommt ihm die Benennung „$\mathcal{M}$“ zu; dasselbe gilt von dem Bruch $\frac{68}{20}$.

eingekleideter Aufgaben. Verstöfse hiergegen finden sich in dem gut empfohlenen und sonst sehr brauchbaren „Übungsbuch für den Rechenunterricht an Mittelschulen“ von Treutlein, Professor am Gymnasium in Karlsruhe,**) mehrfach vor. Hier einige Beispiele: Auf S. 13 des zweiten Teils sind Aufgaben gegeben in der Form „17 Tg. = wie viele Wochen?“ Diese Form ist entschieden zu verwerfen, weil hier das Gleichheitszeichen nicht zwischen zwei Zahlengröfsen, sondern mitten im Text der Aufgabe steht, und weil die Aufgabe, wenn sie als korrekte Frage formuliert wird, genau ebenso kurz aufgeschrieben werden kann. — Auf derselben Seite findet sich ferner die Aufgabe f) $29\frac{5}{6}$ (Diese gemischte Zahl soll nämlich in einen unechten Bruch verwandelt werden.) Darunter steht die Frage: „Wird man bei f) z. B. rechnen $= \frac{29 \cdot 6 + 5}{6}$ oder $= \frac{30 \cdot 6 - 1}{6}$?“ Hier müfste offenbar beidemale links vom Gleichheitszeichen die gemischte Zahl $29\frac{5}{6}$ stehen, wenn das Gleichheitszeichen einen Sinn haben sollte. — Auf Seite 78 des ersten Teils ist § 23,6 die Aufgabe gegeben: „Es seien aus je 100 Zehnmarkstücken und aus je 50 Zwanzigmarkstücken Rollen gebildet. Welches Gewicht haben nun 9 Rollen der ersten samt 7 Rollen der zweiten Art, wenn die Umhüllung der ersten je 3 g und die der zweiten je 2 g, und wenn eine Krone = 3,982 g und eine Doppelkrone = 7,965 g wiegt?“ Und im 3. Teil auf S. 45, Nr. 20: „Das Licht durcheilt in einer Sekunde 40194,5 gg. Meilen. Wie lange braucht es also, a) um den Weg von der Sonne bis zur Erde, d. i. = 20658000 gg. Meilen, und b) um den Weg vom Monde bis zur Erde, d. i. = 51805 gg. Meilen zurückzulegen?“ Ich habe mich vergebens gefragt, warum in diesen beiden Aufgaben das Gleichheitszeichen gesetzt worden ist. Die Fassung der Aufgaben ist ganz korrekt und ohne jegliche Mifsverständnisse, wenn man das Gleichheitszeichen unbeachtet läfst, dagegen ungeschickt, wenn man es mitliest. Ich kann daher eine solche Anwendung des Gleichheitszeichens nicht anders als inkorrekt bezeichnen.

Ungenauigkeiten anderer Art bei der Anwendung des Gleichheitszeichens haben darin ihren Grund, dafs es unterlassen wird, konsequent genug darauf zu achten, dafs nicht auf der einen Seite des Gleichheitszeichens eine benannte und auf der anderen Seite eine unbenannte Zahl stehen darf. Es kann eben niemals eine benannte Zahl einer unbenannten gleich sein. Dies weifs jeder Rechner, und doch bleibt in der Praxis dieser selbstverständliche Grundsatz so sehr häufig unbeachtet. So findet man in dem Böhmeschen Übungsbuch Nr. XII. (bürgerliche Rechnungsarten) bei den Musterbeispielen, die mit Hülfe des Bruchsatzes gelöst worden sind, immer sowohl den Bruchsatz als auch den sich etwa ergebenden unechten Bruch ohne Benennung, und erst bei dem Schlufsresultat erscheint die Benennung; dazwischen steht natürlich immer das Gleichheitszeichen. Das Verfahren, die Benennung nur zuletzt hinzuzufügen, mag ja bequem sein: korrekt ist es nicht. Der Bruchsatz selbst ist eben schon die gesuchte benannte Zahl in derjenigen Form, wie sie durch die einzelnen Schlüsse erhalten worden ist; alles Nachfolgende sind nur einfachere Darstellungen derselben benannten Zahl. — Ähnliches findet man in dem „Rechenbuch von Harms und Kallius“ auf S. 40 und 41, sowie auf S. 130, doch ist auf dieser letzteren Seite auch einige Male die richtige Schreibweise angewandt worden. Auch in dem Treutleinschen Übungsbuch ist dieselbe Ungenauigkeit an einzelnen Stellen vorhanden, z. B. Teil 3, S. 38 und 113; die korrekte Schreibweise kommt jedoch auf S. 38 auch vor. — Schliefslich bemerke ich noch, dafs die zuletzt erwähnte Ungenauigkeit auch beim mündlichen Rechnen zu vermeiden ist. Wenn also z. B. die Aufgabe

---

*) Besprochen in ds. Zts. XIV, 105 u. f. D. Red.

„1 kg kostet $\frac{9}{10}$ Mk., w. v. kosten 7 kg?“ gegeben ist, so darf nicht geantwortet werden: „7 kg kosten 7 mal $\frac{9}{10}$ gleich $\frac{63}{10}$ gleich $6\frac{3}{1}$ Mk.“, sondern die Benennung ist jedesmal hinzuzufügen.

Von den vier Grundrechnungsarten mögen zunächst die Addition und die Subtraktion in Betracht gezogen werden. Über diese habe ich nicht viel zu sagen. Was die schriftliche Darstellung, insbesondere den Gebrauch des Additions- und Subtraktionszeichens anbetrifft, so sind mir keine Unzuträglichkeiten vorgekommen. Wohl aber wünsche ich im mündlichen Ausdruck das leidige „und“ statt „plus“ und das „weniger“ statt „minus“ beseitigt zu sehen. Gegen das „weniger“ liefse sich insofern nichts einwenden, als durch den Gebrauch desfelben Unzuträglichkeiten wohl kaum entstehen können. Aber in der Arithmetik wird die Formel für die Differenz nicht gelesen „*m* weniger *n* ist *p*“, sondern „*m* minus *n* gleich *p*“. Daraus erwächst für den Rechenunterricht die Notwendigkeit, auch mit dem „weniger“ zu brechen und dafür ausschliefslich „minus“ zu sprechen. — Bedenklicher noch als bei dem „weniger“ liegt die Sache bei dem „und“. Dieses Wort ist an und für sich nichts weiter als ein nebenordnendes Bindewort und wird als solches vielfach auch in Rechenaufgaben gebraucht werden müssen, z. B. in den Aufgaben: „Welches ist die Differenz der Zahlen 7 und 18?“ oder „Gieb das Produkt der Zahlen 15 und 12 an!“ Gegen die Korrektheit der Form dieser Aufgaben wird sich nichts einwenden lassen; ähnliche Aufgaben müssen sogar der Übung halber recht oft gestellt werden. Haben nun die Schüler das „und“ zur Andeutung der Addition gebraucht, so werden sie bei den angeführten Aufgaben doch wohl ein wenig in Verwirrung geraten, da das Wort „und“ genau so zwischen zwei Zahlen steht, als wenn addiert werden sollte. Selbstverständlich werden bei fortgesetzter Übung die Schüler dahinter kommen, dafs das „und“ in solchen Fällen nur ein Bindewort ist; aber weshalb wollte man erst eine Konfusion in den Köpfen der jugendlichen Schüler anrichten, da es doch nachher einigen Zeitaufwand erfordert, dieselbe wieder zu beseitigen? Das einfachste Mittel, solchen Übelständen aus dem Wege zu gehen, ist dies, dafs man vom Anfang an beim mündlichen Rechnen das Additionszeichen durch das Wort „plus“*) ersetzt. — Ich kann hierbei nicht unerwähnt lassen, dafs es selbst unter den Herren Mathematikern, die ja auch vielfach Rechenunterricht zu erteilen haben, solche giebt, die noch nicht genügend erkennen, welchen Dienst sie ihrem mathematischen Unterrichte leisten würden, wenn sie schon beim Rechenunterrichte nur die in der Mathematik gebräuchlichen Ausdrücke anwenden würden. Einen Beweis hiervon habe ich vor kurzem in der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ von J. C. V. Hoffmann, welche selbst ernstlich gegen Inkorrektheiten ins Feld zieht, gefunden. In dieser Zeitschrift (Band XVII., S. 184) schreibt ein Leipziger Realgymnasiallehrer über die Vorteile der sogenannten österreichischen Subtraktions- und Divisionsmethode. Es werden mehrere Beispiele durchgeführt, und dabei wird angegeben, wie bei der Ausrechnung zu sprechen ist. Da heifst es „5 und 2 ist 7“, „4 und 9 ist 13“ u. s. w., niemals aber sind die Ausdrücke „plus“ und „gleich“ gebraucht worden.

Bei der Multiplikation und Division treten der Übelstände noch mehr hervor. Zwar sind wir ja über die Zeiten hinweg, da in den Rechenbüchern zum grofsen Teil noch der Divisor links vom Divisionszeichen stand, und so weit meine Erfahrung reicht, hat man sich wohl auch im Volksschulunterricht jetzt allgemein bequemt, den Divisor rechts zu stellen. Dafs

---

*) warum nicht das deutsche „mehr“? Der Verf. bemerkte uns zu dieser (schon oben gestellten) Frage: „Dem Gebrauch des Wortes „mehr“ statt „plus“ kann ich nicht beistimmen, weil ich glaube an der Forderung festhalten zu müssen, dafs die Sprache der Arithmetik möglichst früh auch beim Rechenunterricht einzuführen ist.“ D. Red.

dies allein das Korrekte ist, versteht sich eigentlich von selbst; denn ehe eine Rechenoperation vorgenommen werden kann, mufs eine Zahl da sein, an welcher sie vorgenommen wird.*) Es mufs daher bei der schriftlichen Darstellung einer Divisionsaufgabe unbedingt der Dividendus zuerst, d. h. auf die linke Seite geschrieben werden. Dementsprechend wird denn auch das Divisionszeichen nicht „in", sondern „dividiert durch" gelesen. Aber wie steht's nun mit der Multiplikation? Der Konsequenz halber mufs auch hier der Multiplikandus vorangestellt werden, und dieser Forderung wird auch in den jetzt am meisten gebrauchten Rechenbüchern, wenigstens bei der Rechnung mit benannten Zahlen, durchweg entsprochen. Danach bedeutet also 6×15, dafs die Zahl „6" 15 mal als Summand zu setzen ist. Nun liest aber alle Welt den angeführten Ausdruck 6 mal 15, und dies bedeutet dem gewöhnlichen Sprachgebrauch gemäfs nichts anderes, als dafs die Zahl „15" 6 mal als Summand gesetzt werden soll. Hier tritt uns also ein offenbarer Widerspruch zwischen dem Sprachgebrauch und der Bedeutung des Multiplikationszeichens entgegen. Dafs dieser Widerspruch oft wenig hervortritt, liegt in der Vertauschbarkeit der Faktoren beim Rechnen mit unbenannten Zahlen. Auffälliger wird er, wenn benannte Zahlen in Betracht gezogen werden. Hätte z. B. jemand an 3 Tagen je 10 Mark verdient, so würde sein Verdienst im ganzen 10 M. $\times 3 = 30$ M. betragen. Er würde aber sicherlich nicht sprechen: „Ich habe 10 Mark mal 3 verdient", sondern: „Ich habe 3 mal 10 Mark verdient". Es tritt eben immer, wenn der Ausdruck „mal" gebraucht wird, der Multiplikator *vor* dieses Wort. Daraus folgt, dafs, wenn das Multiplikationszeichen gebraucht worden ist, also der Multiplikator rechts vom Multiplikandus steht, man beim Lesen der Aufgabe den Ausdruck „mal" nicht anwenden darf. Wie man zu lesen hat, ergiebt sich aus der Analogie mit der Division. So wie man das Divisionszeichen liest, „dividiert durch", so lese man das Multiplikationszeichen „multipliziert mit". Ich gebe zu, dafs dieser Ausdruck in manchen Fällen zu umständlich erscheint, so z. B. beim Einmaleins. Aber diesem Übelstande läfst sich abhelfen, und ich mufs in dieser Beziehung wieder auf die Division verweisen. Auch hier wird der Ausdruck „dividiert durch" häufig unbequem, schon deshalb, weil er bei der Rechnung mit unbenannten Zahlen doppeldeutig ist. Es wird darum, wenn die Division ein Enthaltensein bedeuten soll, auch oft der Ausdruck „mit dem Divisor *in* den Dividendus dividieren" angewandt, und es läfst sich gegen diesen Ausdruck in diesem Falle nichts einwenden. Bei der schriftlichen Darstellung darf dann selbstverständlich dieses „in" nicht durch das Divisionszeichen ersetzt werden, sondern es mufs ausgeschrieben werden. Das Entsprechende gilt von der Multiplikation. Die Anwendung des Wortes „mal" ist hier in vielen Fällen zweckmäfsig; aber bei der schriftlichen Darstellung ersetze man dieses „mal" nicht durch das Multiplikationszeichen, sondern schreibe es als Wort.

Von der Division speziell habe ich noch folgendes zu sagen. Das Divisionszeichen wird in allen Fällen gelesen: „dividiert durch", gleichgiltig, ob die gegebene Divisionsaufgabe ein Teilen oder Enthaltensein bedeutet. Will man die Bedeutung der Aufgabe fixieren, so hat man die letztere in Worte zu kleiden, was, beiläufig gesagt, für die Schüler eine äufserst wichtige Übung ist. Dabei ist mir schon vielfach der Ausdruck entgegengetreten, dafs eine Zahl *durch* eine andere *geteilt* werden soll. Z. B. in dem „Rechenbuch von Harms und Kallius", S. 34 und 35 sind die Aufgaben No. 27—30 so formuliert: „Woran erkennt man, dafs sich eine Zahl *durch* 2 ohne Rest *teilen* läfst?" Und in der „Vorstufe zu den Dr. E. Kleinpaulschen Aufgaben zum praktischen Rechnen von Dr. F. Mertens" finden sich auch S. 56 bei No. 66 und 67 Aufgaben wie folgende: „Welche Zahl giebt *durch* 4 *geteilt* 48?" Diese Ausdrucksweise mufs ich ent-

*) schon längst von uns selbst in ds. Ztschr. oft bemerkt, z. B. XI, 38 (oben) und XV, 276 Anm. D. Red.

schieden verwerfen, da sie kein korrektes Deutsch enthält. Sie ist entstanden, indem man einfach das Wort „dividieren“ ins Deutsche übertragen und durch „teilen“ ersetzt hat. Eine solche Übersetzung ist aber unstatthaft; denn der Ausdruck „dividieren“ ist ein technischer Ausdruck, dem man eine ganz bestimmte Bedeutung beigelegt hat. Dieser Bedeutung entspricht aber das Wort „teilen“ keineswegs genau, und darum darf dieses Wort auch nicht ohne weiteres an die Stelle des Wortes „dividieren“ treten. Übrigens hat der Ausdruck: „Eine Zahl soll durch 4 geteilt werden“ gar keinen Sinn. In korrektem Deutsch mufs es heifsen: „Eine Zahl soll in 4 (gleiche) Teile geteilt werden“ oder „Es soll der 4. Teil der Zahl angegeben werden“.

Noch eine falsche Anwendung des Multiplikations- und Divisionszeichens kann ich nicht unerwähnt lassen. Man findet sie häufig bei der Ausrechnung von Resolutions- und Reduktionsaufgaben. Bei den ersteren Aufgaben hat man allerdings eine Multiplikation und bei den letzteren eine Division auszuführen; dennoch ist der Gebrauch des Multiplikations- resp. Divisionszeichens nicht angebracht, denn es wird nicht die gegebene benannte Zahl als solche multipliziert oder dividiert, sondern nur die Anzahl der in ihr enthaltenen Einheiten. Hätte man z. B. 17 Std. in Min. zu verwandeln, so müfste 17 mit 60 multipliziert werden, und das Produkt würde die Benennung Min. erhalten; man dürfte aber unter keinen Umständen die Zahl 60 als Multiplikator neben die benannte Zahl 17 Std. setzen, weil man dann offenbar das Produkt 1020 Std. erhalten würde. Die Anwendung des Multiplikationszeichens ist also hier zu vermeiden. Ganz ähnlich verhält es sich mit der beim Reduzieren auszuführenden Division. Wollte man hier das Divisionszeichen nebst dem Divisor neben die zu reduzierende benannte Zahl setzen, so würde damit eine Teilungsaufgabe dargestellt sein, und der Quotient würde dieselbe Benennung haben müssen als der Dividendus. Dies entspricht aber der gegebenen Aufgabe nicht. Darum darf auch bei der Ausrechnung solcher Aufgaben das Divisionszeichen nicht gebraucht werden. Eine annehmbare Form für die Ausrechnung von Reduktionsaufgaben findet sich in dem Böhmeschen Übungsbuch No. VIII, S. 4. Hier ist neben die zu reduzierende Zahl das Gleichheitszeichen gesetzt worden, und der Divisor hat, damit die Schüler ihn vor Augen haben, seine Stelle über dem Gleichheitszeichen erhalten. Aus der in demselben Heft von Böhme auf S. 2 gegebenen Form für die schriftliche Ausrechnung der Resolutionsaufgaben müssen aber entschieden die Multiplikationszeichen beseitigt werden. Denn die bei der Ausrechnung notwendigen Multiplikationen werden durch das Multiplikationszeichen gekennzeichnet als Multiplikationen benannter Zahlen, und das sind sie nicht, da jedesmal das Produkt eine andere Benennung hat als der Multiplikandus.*)

*) Für die Reduktion benannter Zahlen erscheint die von Böhme gebrauchte Form zweckmäfsig, nämlich (Übungsbuch No. VIII, S. 4):

$$\begin{array}{l} 5937 \text{ Min.} \overset{60}{\cong} 98 \text{ Std.} \overset{24}{\cong} 4 \text{ Tg.} \\ \underline{540} \qquad\qquad\quad \underline{96} \\ \ \ 537 \qquad\qquad\quad\ 2 \text{ Std.} \\ \ \ \underline{480} \\ \ \ \ \ 57 \text{ Min.} \end{array}$$

5937 Min. = 4 Tg. 2 Std. 57 Min.

Für Resolutionsaufgaben findet sich in demselben Heft auf S. 2 folgende schriftliche Form:

$$\begin{array}{rl} 13 & \text{Tg. 17 Std. 36 Min.} \\ \times\ 24 & \text{"} \\ \hline 312 & \text{Std.} \\ +\ 17 & \text{"} \\ \hline 329 & \text{Std.} \\ \times\ 60 & \text{"} \\ \hline 19740 & \text{Min.} \\ +\ 36 & \text{"} \\ \hline 19776 & \text{Min.} \end{array}$$

Hier sind die Multiplikationszeichen wegzulassen; denn es ist nicht 13 Tg. $\times$ 24 = 312 Std. und 329 Std. $\times$ 60 = 19740 Min. Im übrigen ist gegen diese Form nichts einzuwenden.

Zum Schluſs möchte ich noch den Bruchstrich erwähnen, über den sich ja auch in unserem Vereinsorgane einige Stimmen haben vernehmen lassen. Ich empfehle ein für alle mal den wagerechten Bruchstrich, und zwar erstens, weil dieser in der Arithmetik einzig und allein angewandt wird, zweitens aber auch, weil die Anhänger des schrägen Bruchstrichs doch genötigt sind, den wagerechten Bruchstrich zu gebrauchen, wenn Aufgaben mit Hilfe des Bruchsatzes gelöst werden sollen, oder wenn überhaupt Brüche vorkommen, deren Zähler und Nenner kompliziertere Ausdrücke sind. Der wagerechte Bruchstrich läſst nie im Stich, warum sollte er also nicht von Anfang an eingeführt werden?

Ich bin mit meinen Ausführungen zu Ende und betone es nun noch einmal, daſs die Bücher, aus denen ich meine Beispiele entnommen habe, zu den besten mir bekannten Rechenbüchern gehören. Wenn ich trotzdem mancherlei in ihnen als inkorrekt habe bezeichnen müssen, so soll dadurch keineswegs der Wert dieser Bücher herabgesetzt werden. Ich habe dadurch nur den Beweis liefern wollen, daſs es von ungemeiner Wichtigkeit ist, fortwährend und mit gröſster Peinlichkeit über die Korrektheit des Ausdrucks beim Rechenunterricht zu wachen. Denn wenn schon in Rechenwerken, die von wissenschaftlich gebildeten Männern wohl überlegt und durchdacht und mit groſser Sorgfalt ausgearbeitet worden sind, sich angreifbare Stellen vorfinden, um wie viel leichter kann es beim Unterricht passieren, daſs Inkorrektheiten durchschlüpfen.

Daſs Sie, meine Herren Amtsgenossen, mir in allen Punkten ohne weiteres zustimmen werden, kann ich nicht erwarten; man trennt sich zu schwer von alten Gewohnheiten. Wenn aber meine Darlegungen dem einen oder dem andern Veranlassung geben sollten, dem von mir angeregten Gegenstande näher zu treten und ihn im Auge zu behalten, so wäre der Zweck meines Vortrages erfüllt.

Die Wichtigkeit des astronomischen Liebhabertums.

**Abgedruckt mit ausdrücklicher Erlaubnis der Verlagshandlung, aus dem Littrowschen Werke „Wunder des Himmels oder gemeinfaſsliche Darstellung des Weltsystems".*)
5. Auflage.**

Wir haben an einem anderen Orte (Almanach der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien für 1859) den wohlthätigen Einfluſs umständlicher nachgewiesen, den völlig freiwillige und unabhängige Pfleger der Astronomie, die in dem Fache eben nur eine Lieblingsbeschäftigung suchen, durch eigene und die Arbeiten ihrer Gehülfen auf die Entwicklung dieser Wissenschaften genommen haben. Gegenüber dem vorliegenden Werke dürfen wir nur Namen, wie: H. Cavendisch, F. Baily, J. Hevel, Schröter, Beer, Warren de la Rue, Joh. und Dav. Fabricius, Schwabe, R. Carrington, William, John und Caroline Herschel, Horrox, Olbers, Bischop, Hencke, Goldschmidt, Hind, Palitzsch, Galloway, Biela, Dawes, Baxendell, Rosse, W. Gascoigne, Lassel und so viele andere anführen, die sämtlich Volontären der Wissenschaften gehören und mit denen die Erinnerung an wichtige Fortschritte der Astronomie unzertrennlich verbunden ist, um sofort dem Leser klar zu machen, daſs man ohne den Beistand des Liebhabertumses in diesem Fache um Jahrhunderte zurückgesetzt wäre. Wir sagen in diesem Fache, denn wir sind der hoffentlich nicht irrigen Meinung, daſs keine andere

---

*) Der Abschnitt wurde der 5., von Littrow selbst noch besorgten Auflage entnommen, welche noch einen Litteraturnachweis im Anfang enthält, der auffallenderweise in der neuesten (7.) Auflage fehlt. Diese neueste Auflage (mit 15 lithogr. Tafeln und 148 Holzschnitt-Illustrationen. Berlin 1886, Verlag von G. Hempel) ist bearbeitet von Dr. Edmund Weiſs, Dir. der Sternwarte und Prof. d. Astronomie an der k. k. Universität zu Wien. In ihr steht der mitgeteilte Abschnitt §. 60, S. 1175 u. f. Sie soll in ds. Z. noch besprochen werden. D. Red.

Naturwissenschaft sich solcher ergiebigen Unterstützung durch freiwillige Arbeiten erfreut. Wir wollen damit keineswegs zu einer Schilderung der oft besprochenen Erhabenheit des Gegenstandes ausholen, mit welchem die Himmelskunde sich befafst; denn diejenigen, die in astronomischen Beschäftigungen nur das Vergnügen suchen, sich an der Schönheit einer sternhellen Nacht zu weiden, sind nicht die Männer, denen die Wissenschaft ein dankbares Andenken weiht; nur die mühevolle Vertiefung in Einzelheiten nützt, bringt Ruhm und Ehre, im Detail aber ist die Natur nach jeder Richtung bewunderungswürdig und fesselt überall den sie Verstehenden. Ovids schöne Verse:

Os homini sublime dedit, coelumque tueri
Jussit, et erectos ad sidera tollere vultus

haben ihren bildlichen Sinn nahezu verloren, seit das Mikroskop uns die Wunder der Schöpfung erschliefst so gut wie das Fernrohr. Wir finden vielmehr die Ursache der Erfolge des Liebhabertumes der Astronomie zunächst in der Zugänglichkeit dieser Wissenschaft. Welche andere Doctrin kann sich einer gleichen Anzahl trefflicher populärer Schriften rühmen? von Fontanelle, Lambert und Laplace bis auf unsere Tage bilden dieselben nachgerade eine selbständige Litteratur, und es würde schwer halten, irgend einen bekannteren Namen unter den Astronomen des eben abgelaufenen Jahrhunderts anzuführen, der sich in dieser Richtung nicht auch versucht hat. Diese Häufigkeit solcher nichts weniger als leichten, gemeinfafslichen Darstellungen rührt nicht etwa von einer besonderen Liebenswürdigkeit der Astronomen her; die Männer des Berufes sind überall geneigt, der innungsstolzen und bequemen Maxime: *„arcere vulgus“* zu huldigen und dieselbe so zu deuten, dafs im allgemeinen eben nur, wer zur Gilde gehört, zu den ihrigen zählt. Es ist hier die Wesenheit des Faches, welche den Gelehrten gestattet und eben deshalb sie zwingt, aus ihrer Studierstube herauszutreten und den Kern der Wahrheiten, die sie oder andere gefunden, möglichst entkleidet vom Nimbus der Kunstsprache dem Laien mitzuteilen; ihren Absperrungsgelüsten fröhnen, hiefse sich des schönsten Vorrechts ihrer Wissenschaft begeben, das dieselbe zu einem Hebel höherer Bildung macht, das ihrer Förderung Hunderte von helfenden Händen gewinnt. Solchen, jedem Gebildeten verständlichen Behandlungen fügen sich nämlich blofs jene Wissenschaften, die sich eines obersten Grundsatzes erfreuen, und daher in ihrem eigentlichen Gerippe eben nur eine ununterbrochene Kette von Schlüssen bilden. Die Astronomie rühmt sich dieser Beschaffenheit seit Jahrhunderten; dadurch hat sie in jeder Beziehung so grofsen Vorsprung vor den andern Naturwissenschaften gewonnen, die in neuester Zeit in demselben Mafse ähnliches Streben nach gemeinfafslichen Darstellungen zu äufsern beginnen, in welchem sie der Periode des Mystischen oder der blofsen Anhäufung von Thatsachen sich entwinden. Derselben Richtung des Popularisierens begegnen wir in anderer Weise auf streng wissenschaftlichem Gebiete: der Astronom hat so viele mechanische Operationen im Rechnen wie im Beobachten auszuführen, bevor er zu Resultaten gelangt, dafs er von jeher darauf bedacht war, durch Kunstgriffe aller Art jene Vorarbeiten abzukürzen; er hat überdies für Praktiker im eigentlichen Sinne des Wortes: für den Nautiker, den Feldmesser, den Geographen zu sorgen, die sich nicht damit begnügen, wenn man ihrer Wirksamkeit überhaupt neue Wege zeigt; dieselben müssen so bequem als möglich sein, sollen sie überhaupt beschritten werden. So kommt es, dafs an sich sehr verwickelte Arbeiten in einer Weise vereinfacht werden, die nichts zu wünschen übrig läfst, dafs Instrumente zum Gebrauche einladende Formen annehmen, die auch den weniger Bemittelten erreichbar werden. Unsere Methoden, unsere Ephemeriden und Tafeln führen die meisten Aufgaben auf elementare arithmetische Verfahren zurück. Eine heitere Stunde giebt heute die geo-

graphische Lage eines Ortes mit gröfserer Präzision als früher monatelang fortgesetzte Beobachtungen. An die Stelle der unbehülflichen astronomischen Werkzeuge, die z. B. noch Karstens Niebuhr auf Kamelen fortschaffen mufste, sind kleine, den Reisenden kaum beirrende Instrumente getreten, ohne der Genauigkeit irgend Eintrag zu thun, ja mit bedeutendem Gewinne für dieselbe. Die Errichtung einer Sternwarte fordert nicht mehr wie ehemals notwendigerweise einen dem Einzelnen nur selten möglichen Aufwand, die Anstalt ist also auch nicht mehr an die Scholle gebunden, wo sie eben entstand: als Lassel von Starfield bei Liverpool durch den Kohlendampf vertrieben wurde, wanderte er mit seinem Observatorium zwei Meilen weiter nach Broadstones; Dawes wohnte zuerst in Ormskirk, dann zu Cranbrook, später zu Wateringbury, endlich zu Haddenham, aber überall hin begleitete ihn seine Sternwarte; ja man kann sogar an portative Observatorien denken, wie denn Thomas Dell ein solches von sehr zweckmäfsiger Einrichtung ersonnen hat. Ein gutes Fernrohr und eine zuverläfsige Uhr in freier ruhiger Lage können richtig gebraucht oft zu den schönsten Ergebnissen führen. Kein Fach ferner gewährt vielleicht so sehr wie das unsere die Befriedigung, die im Fördern, im Erzielen von Erfolgen liegt; kein Fach bietet so oft wie dieses die Erfrischung der unbestreitbaren Bestätigung unserer Ansichten; kein Fach läfst wie das unsrige die Natur fast immer selbst und im grofsen experimentieren; erspart uns beinahe ganz die störenden Mühseligkeiten, welche eigentliche Versuche unausweichlich begleiten; die Astronomie fordert von ihren Jüngern nicht, dafs sie ein uns angebornes Grauen vor Leichen überwinden, dafs sie abenteuerliche Reisen unternehmen, dafs sie lebensgefährliche Experimente anstellen. Vor allem aber hat die Astronomie einen Vorteil gegenüber den übrigen Naturwissenschaften, der hier von grofser Bedeutung ist: die völlige Freiheit von der Kalamität der Terminologien und Klassifikationen. Während andere Naturforscher unter der Wucht dieses, wir möchten sagen administrativen Teils ihrer Thätigkeit beinahe erliegen und eben deshalb häufig in demselben aufgehen, ist dem Astronomen diese deprimierende Aufgabe ganz und gar abgenommen. Der Begriff: Klasse, Ordnung, Familie, Gattung, Art und wie die unzähligen Abteilungen alle heifsen, deren andere Fächer für die Instandhaltung ihres wissenschaftlichen Haushaltes bedürfen, kann der Astronom sich völlig entschlagen. Die Sorglosigkeit der Astronomen in Feststellung generischer Unterschiede, ja der Kunstausdrücke überhaupt, die ergötzliche Verwirrung, welche in dieser Beziehung in unserer Wissenschaft mitunter herrscht, zeigen, wie wenig den Astronomen an diesen Dingen liegt. Wenn heute jemand behaupten wollte, die Sternschnuppen des August und November seien Kometen oder die Kometen seien Meteore, so werden wir uns kaum die Mühe geben, die Gründe für und wider erst genau abzuwägen. Delambre nennt irgendwo die Kometen Planeten einer besondern Art, er hätte eben so gut die Planeten eine besondere Gattung von Kometen nennen können, ohne weiter Widerspruch zu finden. Wir kennen selbstleuchtende Planeten und haben alle Ursache, die Existenz dunkler, stillstehender Centralkörper anzunehmen. Für die Astronomen hat nicht die Gattung, sondern nur das Individuum Bedeutung. Dieses aber kennzeichnet er durch den Ort, an welchem er es zu einer bestimmten Zeit traf. Er hat ein grofses Fachwerk angelegt, das ihm das ganze unermefsliche Himmelsgewölbe repräsentiert, in welchem jedes beobachtete Objekt seinen besonderen Platz erhält, den es zwar im Laufe der Jahre ändert, aber nach bestimmten, uns genau bekannten Gesetzen, so dafs nie Unordnung entsteht. Der Astronom bedarf also auch der Myriaden von Namen nicht, die andere Wissenschaften zu ihren Plagen zählen. Wenn wir ein paar Dutzend Gestirne mit besonderen Titeln beehren, so ist das eben ein Herkommen, das man schnell verlassen wird, wenn es etwa durch die Zahl dieser Himmelskörper unbequem werden sollte, wie man längst nahezu alle Benennungen, welche die Alten

den Sternen gegeben, der Geschichte überantwortete, seitdem es eben galt, Tausende und aber Tausende zu taufen. Dieser, wie uns scheint, wichtige Unterschied der Astronomie von anderen naturhistorischen Fächern begründet nicht etwa einen geringeren Umfang der Aufgabe, welche ihr vorliegt, denn gerade dadurch, dafs sie die Individuen kennen zu lernen hat, wird ihr Gebiet eigentlich ganz unübersehbar, und man kann mit Sicherheit einer nicht eben fernen Zukunft entgegensehen, wo eine Zahl von Himmelsobjekten in den Bereich der Untersuchung gezogen sein werden, welche weit über die der bekannten Arten von Tieren, Pflanzen u. s. w., so riesig diese auch letzthin angewachsen sind, hinausgehen wird. Aber dieses Kennenlernen der Individuen ist ein den Geist anregendes, unmittelbares Beschäftigen mit der Natur. Die Astronomen sammeln sozusagen nur und kümmern sich um das ermüdende Nomenklieren nicht. Die Freude, die der Botaniker, der Zoologe u. s. w. hat, wenn er endlich nach langwierigen Bestimmungen den Namen seines Objektes erfährt, geht hier ganz über in die Freude zu wissen, wo das Objekt am Himmel aufzusuchen ist. Jenes Bestimmen aber setzt immer ein Eingehen in die Natur der Dinge voraus, das dem Menschen nur in sehr geringem Mafse gestattet, dessen der Astronom im allgemeinen ganz enthoben ist. Diese Frage nach den letzten Gründen durchzieht überhaupt das ganze Gewebe anderer Naturwissenschaften und erlaubt dort nicht wie in der Astronomie, einzelne Teile des Faches völlig abgesondert von andern zu behandeln. Deshalb stehen denn auch jene keineswegs anziehenden Einleitungen in das Studium anderer Zweige der Naturforschung überdies auf schwankendem Boden, während die analoge Beschäftigung des Astronomen auf unverbrüchlichen, für immer feststehenden Normen fufst, und so heifst es im Gegensatze zu sonstigen Aussprüchen hier: „Die Gattung vergeht, das Individuum besteht“ — eine Seite des Faches, die wieder nicht wenig dazu beitragen mufs, ihm Liebhaber zuzuführen; denn nirgends sonst ist die Palme der Unsterblichkeit so sicher und mit verhältnismäfsig so leichter Mühe zu gewinnen. Das dankbare Feld der Entdeckungen ist das eigentliche Gebiet des Dilettantismus. Der Astronom von Profession soll nur, wenn er besondere Gründe dazu hat, sich aufs Entdecken im engsten Sinne des Wortes legen, denn es sind ihm Helfer und Mittel zur Verfügung gestellt, die ihm schwierigere Aufgaben zuweisen. Der Dilettant kann nach Lust und Liebe den Gegenstand seines Strebens wählen: welches Ziel er immer mit Ausdauer verfolgt, man wird die Früchte seiner Mühen willkommen heifsen. Das Corps der Dilettanten hat wie alle Freicorps mehr Schwung als die Männer des Berufes. Dieser bringt einen gewissen Schematismus mit sich, im Verhalten der Gelehrten wie im Reglement des Militärs, einen Schematismus, der notwendig und die Grundlage des ganzen Wesens ist, von dessen Schattenseiten freier zu sein der Volontär aber immerhin sich rühmen kann. In dieser Ungebundenheit liegt indessen auch die Gefahr der Zügellosigkeit, die dort, wo sie ungehindert wuchert, den Dilettanten zur Qual des Fachmannes macht. Das Heer derer, die da, wie Sir John Herschel sich einmal sehr treffend ausdrückte, jede Wissenschaft, welche sie nicht kennen, für eine eben entstehende halten und sich z. B. sofort anschicken, den Grundbau der Astronomie durch von ihnen erdachte Weltsysteme neu zu legen, die da glauben, astronomische Wahrheiten liefsen sich eben auch ohne alle Vorkenntnisse erraten, das Heer dieser Freiwilligen hat es zu verantworten, wenn manche Leute vom Handwerk die Berührung mit Dilettanten scheuen. Wo aber viel Korn geerntet wird, mufs es auch viel Spreu geben und in der That verleitet die Astronomie, obschon gerade sie die erste unter ihren Schwestern den richtigen Weg der Forschung betrat, mehr als irgend eine andere Wissenschaft die Geister zu eitlen Träumen, zu aristotelischen Anticipationen — ein Weg, den heute zu betreten eben so bedenklich ist, als es einst gefährlich war, davon abzuweichen. Die Bestrebungen der Dilettanten sind der grofsen Mehrzahl nach

rieselnden Gewässern zu vergleichen, die nicht beachtet und sich selbst überlassen im Sande verrinnen, ja Schaden bringen und das Land versumpfen, gesammelt und geregelt den berechtigten Strömen an Nutzen um nichts nachstehen. Daraus ergiebt sich von selbst die Richtschnur des gegenseitigen Verhaltens zwischen Profession und Liebhabertum, das unter günstigen Verhältnissen wie in England geradezu die Pflanzschule für jene werden kann. Wofern dem Dilettanten Ernst und Beharrlichkeit nicht fehlen, soll und darf ihm die Hilfe des Mannes vom Beruf nicht entgehen. Erfüllt er diese Forderung, so kann er auch des Erfolges gewifs sein, denn die Schachte, die es hier zu bearbeiten gilt, sind unerschöpflich, und der aufmerksame Forscher kann immer auf das, was wir Glück nennen, zählen; hätte Kepler sich nicht zufällig an Mars gehalten, dessen Ungleichheiten auch den damaligen Beobachtungsmitteln schon zugänglich waren, hätte William Herschel Uranus elf Tage früher erblickt, wo dieses Gestirn stationär und folglich kaum als Planet zu erkennen war, hätten Le Verrier's Arbeiten ihr Ziel nicht gerade um das Jahr 1846, wo die von ihm supponierte Bahn Neptuns mit der wirklichen zusammentraf, erreicht, so würden die glänzenden Entdeckungen, welche sich an diese Namen knüpfen, wahrscheinlich auf lange Zeit verschoben worden sein; Bradley und W. Herschel bemühten sich umsonst, die Parallaxe der Fixsterne zu finden, allein die grofsen Arbeiten, welche sie zu diesem Zwecke unternommen, wurden gekrönt durch die unerwarteten Entdeckungen der Aberration des Lichtes und planetarischer Sonnen. Wem aber ein astronomischer Fund von auch nur einiger Erheblichkeit gelang, der mag sich der sorglichen Teilnahme versichert halten und darf das Unbeachtetbleiben nicht fürchten, das ihm vielleicht in anderen Wissenschaften droht; denn nirgends sonst ist die Gemeinsamkeit aller Leute vom Fache an Arbeiten jeder Art so eingebürgert. Die Gefahr im Verzuge auf der einen, die Möglichkeit, dasselbe Objekt von tausend Orten zugleich zu untersuchen, auf der anderen Seite, setzen in der Astronomie immer eine Hemisphäre auf die Fährte alles Neuen.

Bei der Redaktion eingelaufen.

(November 1886.)

A) Druckschriften.

Cranz, Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen. 2. A. Stuttgart, Metzler 1886.

Juling, Anfangsgründe der Arithmetik. 2. Aufl. Schönberg i/Mecklb., Bicker. 1886.

Spitzer, Tabelle für die Zinseszinsen- und Renten-Rechnung etc. 3. verm. Aufl. Wien, Gerold & S. 1886.

Blater, Napiertafel zur bequemeren und rascheren Ausführung von Multiplikationen und Divisionen mit Gebrauchsanweisung, nach Reg.-R. Steinhausers-Wien Angabe bearb. In Komm. Frey-Mainz. 1886.

Henrici, Kleiner Grundrifs der Elementar-Chemie. Leipzig, Teubner. 1886.

Wossidlo, Lehrbuch d. Zoologie f. h. Lehranstalten etc. Berlin, Weidmann. 1886.

— Leitfaden etc. ib.

Berlepsch, Die Alpen in Natur und Lebensbildern. 5. Aufl. umgearb., verm. u. erg. vom Sohne des Verf. Jena, Costenoble 1885. (Von der Red. erbeten).

Zeitschriften. C.-Org. XIV, 41—43. — Paed. Archiv XXVIII, 9. — Ztschr. f. R.-W. XI, 10. — Ztschr. f. Schulgeogr. VIII, 1. — Deutsche bot. Monatsschrift IV, 10 (Okt.) — Nouv. Ann. d. Math. III. Ser. Nov.—Okt. — Z. f. M. u. Phys. (Schlöm. Z.) XXXI, 6.

B) Gedruckte Aufsätze.

H. i. M. Drei Broschüren mit Abhandlungen. — B. i. K. Erfinder des L. Vers. u. seine Abh. über d. E. — Kr. i. B. Zeitungsnummern, H-Univ., Reform d. h. Sch. i. Schw. u. Norw. —

(Der Einlauf vom Dezember folgt im nächsten Heft.)

Briefkasten.

C. i. M. Letzte P.-Sch. f. B. Es thut uns leid, Sie scheiden zu sehen. Möchten wir einen würdigen Nachfolger finden. Zugleich besten Dank für die Tafel. R. über Bl. u. Fr. erhalten. — R. i. U. Der bestimmte oder unbestimmte Artikel? Soll mit andern ähnl. Art. bald zum Abdruck kommen. — Stud. math. St. i. K. „Über Pol und Polare in Bezug auf Gerade, Punkt und Ebene." Abgesehen davon, dafs Ihr Manuskript vor einer Reinschrift unmöglich einem Setzer gegeben werden könnte, scheinen Sie über Bestimmung und Zweck unserer Zeitschrift nicht unterrichtet zu sein. Lesen Sie den Briefkasten d. Z., z. B. Jahrg. VIII, Heft 3 (Umschlag) und X, 88. — Ihre Arbeit mag wohl als Prüfungsarbeit genügen, eignet sich aber nicht für eine didaktische Zeitschrift. — M. i. F. Erwiderung c. W. — H. i. M. Bemerkungen z. elem. Kreisel-P. — Sch. i. H. Zum Gaufsschen F. d. A.; Pyth. Dr.; Fünfte F.-A. d. Tr.; P.-Konstr.; Lös. v. Aufg. — B. i. D. (Livland). „Mahnworte gegen alte noch nicht ausgerottete und neue überhand nehmende Übel." — F. i. K. und M. i. H. Entgegnungen auf unsern Artikel (Kardinalpunkt). Werden suchen, Sie zu verstehen und wenn (und wo) wir überzeugt werden, uns zu Ihren Ansichten bekennen, sonst nicht. — G. i. H. Art. über Herbart. Zu lang! Dass Sie die Haltung d. Z. für d. Lesezirkel der L. beantragen wollen, freut uns! „Spät kommt ihr, doch ihr kommt!" — H. i. H. Danken für Ihre Bereitwilligkeit. Wünschen Ihren Bestrebungen für die l. S. den besten Erfolg. — H. i. St. Danken sehr für die Mühe, die Ihnen gewiss der so rasch gelieferte Art. verursacht hat. — v. J. i. W. Geom. Bew. d. Satzes etc. — N. i. Z. Nochmalige Einsendung d. L. 612, 618, 628 u. 633. — S. i. P. Auflösung der irrat. Gl. $\sqrt{ax+b}$ etc. — Sch. i. N. „Der Kardinalpunkt etc." — Z. i. C. und K. i. Sch. Notizen über den Ellipsenzirkel.

NB. Wir müssen die Einsender von Beiträgen für das Aufg.-Repert. wiederholt und dringend ersuchen, ihren Manuskripten einen Umschlag mit Aufschrift (Angabe der Nrn.) zu geben und dieselben auf möglichst dünnes Papier zu schreiben. Die vielen losen Blätter der verschiedenen Einsender gehen leicht verloren oder kommen in Unordnung. Ebenso machen wir wiederholt auf die Absendungstermine (s. XVI, 433 und XVII, Heft 6, S. 480) aufmerksam, gewöhnlich den 1. oder 15. des Monats. Die Sendungen müssen jedoch mindestens zwei Tage früher bei der Red. einlaufen (also z. B. für den 15. schon am 13.), da bereits Tags vorher das Packet zur Absendung bereit liegt. Reklamationen, bezw. Beschwerden, wegen Nichtaufnahme verspäteter Einsendungen, mögen sie bei der Red. d. A.-R. oder d. Z. vorgebracht sein, haben nur dann Berechtigung, wenn die Red. die Verspätung verschuldet hat. — Andererseits drängt es uns, den zahlreichen Mitarbeitern am A.-R. (im vorigen Jahrg. 74) für ihre freiwillig dargebotenen und meist mit bewunderswertem Fleifse gearbeiteten Beiträge, zugleich im Namen der Spezialredakteure, unsere Anerkennung und unsern aufrichtigen Dank auszusprechen. D. Red. d. Z.

Vielen: Für die eingelaufenen Neujahrs-Glückwünsche unsern aufrichtigen Dank. Wir wollen sie hiermit erwidert haben.

Über die Systematik in der Stereometrie mit Beziehung auf Heinzes „Genetische Stereometrie".

Von G.-R. Prof. Dr. GUIDO HAUCK, Berlin.

Herr Direktor Holzmüller hat in seiner vortrefflichen Besprechung der Heinze'schen Stereometrie (S. 599 des vor. Jahrg.) den Wunsch ausgedrückt, es möchten sich auch andere Mitarbeiter der Zeitschrift zu dieser Frage äufsern. Zugleich bezeichnete er eine Diskussion der Heinze'schen Nomenklatur als eine dankbare Aufgabe für unsere Zeitschrift.

Ich hatte ursprünglich die Absicht, meinem Widerspruch gegen Heinzes System nicht öffentlich Ausdruck zu geben. Ich gestehe offen, dafs mir die aufrichtige Hochschätzung der Pietät, mit welcher Herr Lucke seinem verstorbenen Freunde und Kollegen mit der Herausgabe seines Systems ein Denkmal zu setzen bemüht war, den kritischen Mund geschlossen hat.

Dem Urteile des Herrn Holzmüller über Heinzes System stimme ich durchaus bei. Derselbe läfst aber einen Punkt, der mir von hervorragender Wichtigkeit zu sein scheint, unberührt, bezw. überweist ihn der Erörterung durch andere Fachgenossen. Auf denselben Punkt bezieht sich auch ein Einwand, der gegen die in Herrn Holzmüllers „Nachschrift" enthaltenen Bemerkungen gemacht werden kann.

Dieser Umstand legte mir den Gedanken nahe, den von mir gehegten bezüglichen Bedenken dürfte eine allgemeinere Bedeutung beizumessen sein, schwerwiegend genug, um mir die Verpflichtung aufzuerlegen, mein Schweigen zu brechen und jene Bedenken zur Diskussion zu stellen.

Wenn in der erwähnten Nachschrift auf die mittelst Seifenwasser herzustellenden Formen von gewissen Minimalflächen zur Veranschaulichung der bei den Heinze'schen Körpern auftreten-

den Flächenstücke des windschiefen Paraboloids und Hyperboloids hingewiesen wird, so könnte hieraus der Schlufs gezogen werden, dafs jene Minimalflächen identisch seien mit den letztgenannten Flächen. Dies ist aber nicht der Fall. Die Minimalfläche, welche die vier Seiten eines windschiefen Drahtvierecks überspannt, gehört nicht einem Paraboloid an, sondern einer höheren transcendenten Fläche, deren Gleichung sich nur durch elliptische Funktionen ausdrücken läfst.*) Ebenso ist die Minimalfläche, die sich zwischen zwei parallelen Drahtkreisen ausspannt, nicht ein Rotationshyperboloid, sondern ein Katenoid,**) (Rotationsfläche, deren Meridiankurve eine Kettenlinie ist).***)

Die Meinung, die genannten zwei Minimalflächen seien mit Paraboloid und Hyperboloid identisch, ist in der That sehr vielfach verbreitet. Es scheint mir dies darauf zu deuten, dafs der notwendigen Strenge in der Unterscheidung der verschiedenen Flächencharaktere vielfach nicht die gebührende Bedeutung beigemessen wird. Den Sinn hierfür zu schärfen, ist eine der wichtigsten Aufgaben der geometrischen Systematik. Gerade aber dieser Punkt ist es, in Beziehung auf welchen mich das Heinze'sche System am wenigsten befriedigt hat.

Die räumliche Geometrie ist heute sowohl nach ihrer inhalt-

---

*) Vgl. die Preisschrift von H. A. Schwarz: Bestimmung einer speziellen Minimalfläche. Berlin 1871.

**) Vgl. Plateau, Statique expérimentale et théorique des liquides. Paris 1873. Bd. I, pag. 93.

***) Betreffs anderer Modelle zur Veranschaulichung der sogen. Heinze-schen Flächen möchte ich nicht unterlassen zu bemerken, dafs das Prinzip der Drehung, wie es bei Herrn Hänigs Apparat zur Anwendung gelangt, keineswegs neu ist. Auf demselben Prinzip beruhen z. B. Bukas bewegliche Stabmodelle (Verl. von Winkelmann u. Söhne, Berlin). Drehungsmodelle mit Fäden befinden sich ferner unter den Modellen des Brill-schen Verlages (Darmstadt), unter den Muret'schen Modellen (Verl. von Delagrave, Paris), u. s. w. Überhaupt sind die Heinze'schen Drehungsformen für den darstellenden Geometer längst bekannte Dinge. Es dürfte kaum eine mathematische Modellsammlung an einer technischen Hochschule geben, die nicht Drehungsmodelle für Flächen zweiter Ordnung enthielte. — (Ich benütze diese Gelegenheit, die geehrten Herren Kollegen, falls sie ihr Weg nach Berlin führt, freundlichst einzuladen, meine neu angelegte mathematische Modellsammlung im Charlottenburger Polytechnikum zu besichtigen.)

lichen, als nach ihrer formalen Seite eine andere, als sie im vorigen Jahrhundert war. Der gewaltige Umschwung knüpft sich an den Namen von Monge, dem Vater ebensowohl der neueren analytischen Geometrie, wie der neueren synthetischen Geometrie.*) Er war es, der die Geometrie von den Fesseln alten Formelkrams gelöst, ihr die Freiheit der Bewegung, wie die Allgemeinheit der Methode gegeben und das Interesse an der geometrischen Form neu belebt hat. Monge war es, der die Flächen durch gesetzmäfsige Bewegung von Linien erzeugen lehrte und sie nach der Verschiedenheit der Bewegungsgesetze klassifizierte. Die Flächen zweiter Ordnung, vorher höchstens dem Namen nach bekannt, wurden durch die Monge'sche Schule eigentlich erst entdeckt. Die bedeutendsten Leistungen der Neuzeit auf dem Gebiete der Flächentheorie schliefsen zum Teil unmittelbar an Monges grundlegende Arbeiten über die Krümmungsverhältnisse der Flächen an.**)

Auch die elementare Stereometrie hat der durch Monge eingeführten neuen Betrachtungsweise räumlicher Gebilde Rechnung tragen müssen und ist eine andere geworden, als sie im vorigen Jahrhundert war. Es ist nicht gerade erforderlich, dafs sie *darstellend-geometrisch* behandelt werde (woran man bei dem Namen Monge zunächst denkt). Aber die Behandlung mufs von Monge'schem Geiste durchweht sein.

Aus Heinzes „Stereometrie" dagegen wehte mir ein frostiger Hauch aus vor-Monge'scher Zeit entgegen, bei dem mir trotz redlichen Bemühens nicht gelungen ist, warm zu werden.

Für die krummflächig begrenzten Körper ist nach der heutigen Anschauungsweise der Charakter der Mantelfläche von so hervorragender Bedeutung, dafs meines Erachtens nur auf Grund dieses Unterschieds eine gesunde und sachgemäfse Systematik aufgebaut werden kann. Wie verschwommen aber bei Heinze z. B. der so wichtige Unterschied zwischen entwickelbaren und windschiefen Regelflächen ist, dafür mag der „Zusatz"

---

*) Man vergleiche die Würdigung der Bedeutung Monges für die Entwickelung der Geometrie durch Hermann Hankel in dessen „Elemente der projektivischen Geometrie" (Leipzig 1875), Einleitung S. 4 u. ff.

**) S. Application de l'analyse à la géométrie, XV und XVI.

S. 120 als Beispiel angeführt werden. Nachdem Cylinder, Kegelstutz, einschaliges Hyperboloid, Wanne, Glocke etc. ausführlich und endgiltig abgehandelt sind (und zwar Wanne und Glocke mit Definitionen, die sie als windschiefe Regelflächen kennzeichnen) schliefst der ganze Abschnitt mit folgendem

„Zusatz: Aus der geführten Untersuchung folgt unmittelbar die merkwürdige Eigenschaft des einschaligen Hyperboloids, dafs sich auf seiner Mantelfläche Gerade und zwar durch jeden beliebigen Oberflächenpunkt zwei Gerade ziehen lassen, wie man sofort findet, wenn man sich erinnert, dafs durch gleich grofse Drehung nach links wie nach rechts aus demselben Cylinder zwei kongruente Paracylinder entstehen. — Solche krumme Flächen, auf denen Gerade gezogen werden können, nennt man Regelflächen; zu ihnen gehören auch die windschiefen Flächen sowie Cylinder-, Kegel-, Wannen- und Glocken-Mantel.“

Heinze gründet sein System nicht auf den Unterschied des Charakters der Mantelfläche, sondern auf die Verschiedenheit der Form der ebenen Grundflächen (Parallelschnitte). So kommt er beispielsweise dazu, die Kugelzone mit gleichen Grundflächen und die Kugelzone mit ungleichen Grundflächen, die ihrem Wesen nach doch vollkommen gleichartig sind, in zwei verschiedene Körperklassen einzureihen, dagegen die Kugelzone mit gleichen Grundflächen und das einschalige Hyperboloid mit gleichen Grundflächen, die ihrem Wesen nach total verschieden sind, in der nämlichen Klasse unterzubringen.

Man gestatte mir, dieses System als ein künstliches zu bezeichnen und ihm das auf den Unterschied des Flächencharakters begründete System als natürliches entgegenzustellen. Der Gegensatz zwischen beiden möge an den nämlichen sechs Körperformen durch folgende zwei Schemata veranschaulicht werden:

Natürliches System.

Klasse I. Körper mit sphärischer Oberfläche.

1) Kugelzone mit ungleichen Grundflächen.
2) Kugelzone mit gleichen Grundflächen.
3) Kugelabschnitt.
4) Kugel.

Klasse II. Körper mit hyperbolischer Oberfläche.

1) Hyperboloidzone mit ungleichen Grundflächen.
2) Hyperboloidzone mit gleichen Grundflächen.

Künstliches System.

Klasse I. Körper mit gleichen Grundflächen oder *Cylindroide*.

1) Kugelzone mit gleichen Grundflächen.
2) Hyperboloidzone mit gleichen Grundflächen.

Klasse II. Körper mit ungleichen Grundflächen oder *Scheiben*.

1) Kugelzone mit ungleichen Grundflächen.
2) Hyperboloidzone mit ungleichen Grundflächen.

Klasse III. Körper mit einer verschwindend kleinen Grundfl. oder *Konoide*.

1) Kugelabschnitt.

Klasse IV. Körper mit zwei verschwindend kleinen Grundfl. oder *Sphäroide*.

1) Kugel.

Ich kann dieses künstliche System mit dem besten Willen nicht als einen Fortschritt, sondern nur als einen Rückschritt in die Zeit vor Monge bezeichnen, einen Rückschritt, der freilich unvermeidlich ist, sobald die Inhaltsbestimmung als wichtigste Aufgabe der Stereometrie angesehen und darauf das ganze System zugeschnitten wird. Der Mifsgriff des Heinze'schen Systems scheint mir eben darin zu bestehen, dafs es für die Spezificierung und Systematisierung der geometrischen Formenwelt die Inhaltsformel als mafsgebend nimmt, während hiefür ganz andere Rücksichten in Betracht kommen. An die Körper mit krummer Oberfläche knüpfen sich gewifs sehr viel wichtigere und interessantere Fragen, als die Inhaltsermittelung. Ich komme damit auf die treffenden Ausführungen des Hrn. Holzmüller (vor. Jahrg. S. 605 u. 606) zurück, die ich der Beachtung aller Fachgenossen aufs wärmste empfehlen möchte. Auch ich kann einen Fortschritt der stereometrischen Methodik nur in einer Annäherung an die darstellende Geometrie erblicken. Hermann Hankel sagt an oben zitiertem

Orte, der Raum sei überhaupt, sozusagen, der Geometrie erst durch Monge zugänglich gemacht worden.

In dieser Beziehung wäre es freilich sehr zu wünschen, dafs die darstellende Geometrie auch an unsern Universitäten als vollberechtigte mathematische Disziplin gelehrt würde. Nur auf diese Weise scheinen mir die in der Vorrede zitierten, sehr beherzigenswerten Wünsche Heinrich von Brunn's*) realisierbar zu sein.

In gleicher Weise wie die Systematik stammt auch die Terminologie Heinzes (wenn wir von ganz willkürlichen Definitionen, wie z. B. Trapezoeder, Ähnlichkeitspunkte u. a. absehen), gröfstenteils aus vor-Monge'scher Zeit. Sollte dieselbe sich an unsern höheren Schulen einbürgern, so würde eine grenzenlose Verwirrung die Folge sein. Mit den Bezeichnungen Sphäroid, Cylindroid, Konoid u. s. w. verbinden wir heute ganz andere Begriffe als Heinze. Allerdings könnte Heinze für seine Definitionen zum Teil die Autorität der Wörterbücher von Klügel und Hoffmann-Natani anrufen. Indessen erstreckt sich deren Autorität wenigstens in diesem Punkte eben auch nur auf die vor-Monge'sche Zeit.

Wenn mir gestattet ist, hier etwas ins Einzelne zu gehen, so versteht Heinze z. B. unter *Sphäroid* allgemein einen Körper mit zwei zu Punkten verschwindenden Grundflächen, also ebensowohl Kugel als dreiaxiges Ellipsoid. Heute wird die Bezeichnung nur für eine bestimmte Rotationsfläche gebraucht.

Unter *Cylindroid*, das bei Heinze einen Körper mit zwei gleichen parallelen Grundflächen bedeutet, versteht man heute eine bestimmte windschiefe Regelfläche.

Konoid nennt Heinze einen Körper mit einer krummlinigen und einer zum Punkt verschwindenden Grundfläche (also z. B. den Kugelabschnitt). Seit Monge versteht man unter *Konoid* eine bestimmte windschiefe Regelfläche, erzeugt von einer geraden Linie, deren Bewegung durch eine Leitkurve, eine Leitgerade und eine Leitebene bestimmt ist. Jeder Techniker kennt z. B. das *senkrechte Kreiskonoid*, das als Wölbungsfläche über konvergierenden Widerlagern verwendet wird.

---

*) Heinrich von Brunn, Archäologie und Anschauung. Rede beim Antritte des Rektorates der Ludwig-Maximilians-Universität. München 1885. (Z. Teil abgedr. in d. Z. XVII, 461 u. f. D. Red.)

Was man heute *senkrechtes Kreiskonoid* nennt, ist identisch mit dem von Heinze in § 107 erwähnten Spezialfall des von ihm als *Glocke* bezeichneten Körpers.

Für die Nomenklatur der von Flächen zweiter Ordnung begrenzten Körper mögen folgende Beispiele sprechen:

Elliptisches Kreiskonoid nennt Heinze den Abschnitt eines Rotationsellipsoids.

Parabolische Ellipsenscheibe bedeutet: Zone eines allgemeinen elliptischen Paraboloids.

Hyperbolisches Ellipsencylindroid bedeutet: Zone mit gleichen Endflächen eines einschaligen Hyperboloids.

Dagegen bedeutet *Hyperbolisches Ellipsenkonoid:* Abschnitt eines zweischaligen (!) Hyperboloids. U. s. w.

Während alle übrigen Flächen zweiter Ordnung vorgeführt sind, wird das hyperbolische Paraboloid in dem ganzen Werke nicht erwähnt, trotz der wichtigen Rolle, die es thatsächlich im zweiten Abschnitt spielt *(Para- und Inter-Körper).* Es wird dort stets nur als *„eine windschiefe Fläche"* bezeichnet.

Unter *Wanne,* deren Mantel bei Heinze windschief ist, wird heute der betreffende Körper mit entwickelbarer Oberfläche (erzeugt durch Umhüllung einer Ebene, welche die zwei krummlinigen Grundflächen berührt), verstanden. Für diesen letzteren Körper würde auch die Bemerkung Heinzes zutreffen, dafs die *Wanne* der dem *Obelisk* entsprechende Körper mit krummlinigen Grundflächen sei, während die *Wanne* Heinzes im Widerspruch zu dessen Definition des *Obelisk* steht.

Von der Wanne mit entwickelbarem Mantel ist der in § 109 erwähnte *„glockenartige Körper"* ein Spezialfall. Dafs dessen zur Strecke verschwindende Grundfläche als Degeneration eines Rechtecks aufzufassen sei, dürfte zu beanstanden sein.

Die Heinze'schen Definitionen der Mantelflächen von *Wanne* und *Glocke* sind ohne Frage geschickt gemacht. Sie tragen aber den Charakter des Künstlichen und Zufälligen an sich. Man kann zwei krumme Linien, oder eine krumme und eine gerade Linie durch die mannigfachsten Formen von Regelflächen überspannen, insoferne die vollständige Bestimmung des Bewegungsgesetzes der erzeugenden Geraden sich auf die mannigfaltigste Weise modifizieren läfst (z. B. durch die beliebige Fest-

setzung einer dritten Leitlinie.*) Jeder besondere Zweck wird ein besonderes Bewegungsgesetz als vorzugsweise geeignet erscheinen lassen. Alle diese verschiedenen Mantelformen haben den nämlichen gleichberechtigten Anspruch auf die Bestimmung des von ihnen eingeschlossenen Inhaltes. Eine Bevorzugung derjenigen Mantelform, für welche die Inhaltsberechnung die relativ geringste Mühe erfordert, erscheint nur vom Standpunkt des Heinze'schen Systems, nicht aber von allgemein geometrischem Gesichtspunkt sowie vom Gesichtspunkt der praktischen Anwendung aus berechtigt.

Nun ist aber noch darauf aufmerksam zu machen, dafs *Wanne* und *Glocke* von Heinze nach der Simpson'schen Regel berechnet werden, während der Beweis, dafs sie *Simpson'sche Körper* sind, gar nicht erbracht ist. Die Bemerkung auf Seite 8 genügt hiefür nicht. Denn es ist vorausgesetzt, dafs die Seitenflächen des Centralkörpers Regelflächen seien, deren Mantellinien parallel zu den Grundflächen sind, was bei *Wanne* und *Glocke* zunächst nicht zutrifft. Dafs diese Körper dennoch als Spezialformen des Centralkörpers angesehen werden können, folgt erst aus dem Satze, dafs jede windschiefe Regelfläche längs ihrer Mantellinien Oskulationsparaboloide besitzt, und dafs demgemäfs die windschiefen Flächenelemente von *Wanne* und *Glocke* mit den Flächenelementen eines Paraboloids, dessen andere Mantellinienschar parallel zu den Grundflächen ist, identifiziert werden können.**)

Entweder hätte dieser Satz eingestellt werden müssen, oder aber der Maclaurin'sche Satz, dafs die Simpson'sche Regel

*) Um zu derjenigen Mantelform zu gelangen, welche der Heinze-schen *Wanne* entspricht, wäre eine bestimmte Gerade parallel zu einer Axe einer Grundellipse als dritte Leitlinie zu wählen.

**) Eben aus dem Grunde, weil die Flächenelemente windschief sind, und nicht etwa als aus je zwei ebenen Dreiecken bestehend betrachtet werden dürfen, kann der Beweis für die Prismatoidformel nicht so ohne weiteres auf den Fall von krummlinigen Grundflächen übertragen werden, wie es in der Bemerkung auf S. 8 (Al. 2) geschieht. Diese Bemerkung müfste erst am Schlufs des § 18 ihren Platz finden. — Aus demselben Grunde kann auch die Behauptung angefochten werden, *Anticylinder* und *Paracylinder* seien „identisch“, was in § 96 aus der Gleichheit der Rauminhalte geschlossen wird.

für alle Körper gilt, deren Parallelschnitte sich als Funktionen ihres Grundflächen-Abstandes von nicht höherem als dem dritten Grade ausdrücken lassen. Letzteres wäre insofern zu empfehlen gewesen, als gewifs mancher Leser von einem Werke, das sich auf 190 Seiten mit der Simpson'schen Regel befafst, auch die vollständige Lösung des Problems wünschen möchte.

Andere werden freilich der Meinung sein, dafs diese Dinge, ebenso wie Osculationsparaboloid und all das, wozu die Hilfe der analytischen Geometrie beigezogen werden mufs, nicht mehr ins Gebiet der elementaren Stereometrie gehören.

Man kann hierüber streiten. Stellt man sich aber einmal auf diesen letzteren Standpunkt und sieht zugleich von allen interesselosen Körperformen des Systems ab (worüber jeder seine eigene Meinung haben mag), so bleibt von Heinzes System wenig übrig, was nicht seit Wittstein in die verbreiteteren Lehrbücher der Stereometrie bereits übergegangen wäre.

Während aber für die einen das System zu viel enthält, können andere den Vorwurf erheben, es sei zu enge begrenzt. Ich will hier nicht davon sprechen, dafs der *Centralkörper* Heinzes nicht einmal alle Simpson'schen Körper umfafst. Dagegen mag an die Körperformen erinnert werden, die keine parallelen Grundflächen besitzen. Die Krystallographie z. B. bietet unzählige Formen dar, die sich in Heinzes System (im engeren Sinn) nicht einordnen lassen.

Die gleicheckig-halbregulären Körper sind noch in den Bereich der Betrachtung hereingezogen, nicht aber die zu ihnen reciproken gleichflächig-halbregulären, die doch wegen ihrer krystallographischen Beziehungen ungleich mehr Interesse haben als jene, wogegen sie der Behandlung gröfsere Schwierigkeiten bereiten. Auch Herr Holzmüller deutet diese Lücke an. Zur Berechnung des Inhalts dieser gleichflächig-halbregulären Körper (ebenso wie der gleicheckig-halbregulären und der regulären Körper) ist das relativ einfachste Mittel im allgemeinen immer, sie vom Mittelpunkt aus in Pyramiden zu zerlegen. Hiezu braucht man aber nicht den ganzen Schematismus des Heinzeschen Systems.

Wenn man sagen wollte, auch diese Körper, wie überhaupt alle ebenflächigen Körper seien in Heinzes System einge-

schlossen, weil dasselbe die Pyramide enthalte und weil jeder ebenflächige Körper in Pyramiden zerlegt werden könne, so ist dies ja in gewissem Sinne richtig. Man fällt aber dann doch eigentlich aus der sogen. *genetischen* Rolle. Heinzes *genetisches* Prinzip beruht ja darin, daſs er, wie Herr Holzmüller sagt, vom Komplicierten (Centralkörper) durch Spezialisieren zum Einfachen gelangt. Beim Berechnen eines Polyeders als Summe von Pyramiden wird aber umgekehrt vom Einfachen aufs Komplicierte geschlossen.

Die Benennung *Centralkörper* möchte darauf schlieſsen lassen, daſs Heinze der ideale Gedanke vorschwebte, wie aus der Sonne als Centralkörper des Planetensystems sich das ganze System entwickelt hat, so möchte sich auch die Gesamtheit der stereometrischen Formen aus einem einzigen Centralkörper durch fortgesetzte Spezialisierung entwickeln lassen. In der Aufstellung dieser unmöglichen Forderung scheint mir ein zweiter Miſsgriff des Heinze'schen Systems zu liegen. Man kann die geometrischen Formen wohl auf einzelne Elemente reduzieren und umgekehrt aus diesen aufbauen. Aber die unendliche Mannigfaltigkeit der geometrischen Formenwelt als Degenerationen einer einzigen Urform anzusehen, ist allgemein undenkbar. Es lassen sich höchstens einzelne Formen-Gruppen aufstellen, bei denen es innerhalb des engbegrenzten Bereiches jeder einzelnen Gruppe möglich ist. Heinze hat dies schlieſslich offenbar selbst eingesehen und hat sich geholfen, indem er nach verschiedenen Seiten hin antigenetische Koncessionen und Anleihen machte.

Heinzes System (im engeren Sinn) möchte als ein Versuch der Behandlung einer einzelnen beschränkten Formengruppe zu bezeichnen sein, ein Versuch, der — immerhin mit Geschick durchgeführt — ein entschiedenes Interesse, aber doch nur ein akademisches Interesse verdient.

Was die didaktische Seite der Frage anlangt, so hat sich bereits Herr Holzmüller über den Begriff *genetisch* in zutreffender Weise ausgesprochen. Ich möchte hiezu noch auf die schon oben erwähnte Vermischung der Methoden hinweisen. Konsequent und einheitlich würde das System doch nur dann sein, wenn die Inhaltsformel für den Centralkörper a priori — etwa

in der Art von Maclaurin*) — abgeleitet und dann auf die successiven Specialisierungen angewendet würde. Dies ist aber nicht der Fall. Um die Inhaltsformel für's Prismatoid zu entwickeln, werden vorher Prisma und Pyramide nach der gewöhnlichen Methode (antigenetisch) berechnet. Dann erst beginnt das *Genetische* in Heinzes Sinn, indem wieder umgekehrt Pyramide und Prisma aus der allgemeinen Formel zurückentwickelt werden. Ebenso werden im dritten Abschnitt zuerst in der Einleitung die Kugelteile, sowie die entsprechenden, von Flächen zweiter Ordnung begrenzten Körper nach der gewöhnlichen Methode abgeleitet, um den Beweis zu erbringen, dafs dieselben der Simpson'schen Regel gehorchen. Dann erst beginnt die systematische oder *genetische* Rückwärtsentwickelung derselben Körper mittelst der Simpson'schen Regel.

Wenn am Schlufs der Vorrede der Leserkreis des Buches unter den Lehrern und Mathematik-Studierenden gesucht wird, so mufs ich gestehen, dafs mir für diesen Leserkreis die ganze *genetische* Entwickelung des dritten Abschnittes mehr oder weniger überflüfsig erscheint. Die Einleitung enthält alles Wesentliche. Der nachfolgenden *genetischen* Entwickelung bleibt eigentlich nichts, als die mechanische Ausführung der durch die Einleitung genau vorgezeichneten Disposition und deren Einspannung in den Schnürleib des Systems. (In der Einleitung ist noch ganz hübsch von der „Scheibe des zweischaligen Rotationshyperboloids", der „Scheibe des einschaligen Rotationshyperboloids", u. s. w. die Rede. Sobald es aber „*genetisch*" wird, heifsen dieselben Körper beide: *hyperbolische Kreisscheiben*, u. s. w.)

Ich kann mich daher mit dem besten Willen auch nicht von dem in der Vorrede hervorgehobenen Vorzug des Systems überzeugen, dafs das Interesse der Schüler beständig in Spannung erhalten werde. Die Art und Weise, wie z. B. im dritten Abschnitt der Reihe nach das kreisförmige —, parabolische —, elliptische —, hyperbolische Kreiskonoid, dann ebenso das kreisförmige —, parabolische —, elliptische —, hyperbolische Ellipsenkonoid abgehandelt, und weiter nach genau demselben Schema die entsprechenden acht Scheibenformen und acht Cylindroidformen

*) Treatise of fluxions. (Edinburgh 1742.) Nr. 848.

durchgehechelt werden, hat (ganz abgesehen von der schwülstigen Nomenklatur) wenigstens mir unwillkürlich das Gefühl des Druckes von spanischen Stiefeln eingeflöfst. Es ist kein Fortschritt im Gedankengang, sondern stets dieselbe Kost, in verschiedenem Geschirr aufgetragen. Das erzeugt nur zu leicht Ermüdung und Überdrufs, wiewohl ich gern zugebe, dafs der individuelle Geschmack, der hier wesentlich in Betracht kommt, verschieden sein mag.

Dasselbe gilt auch vom zweiten Abschnitt (beispielsweise betreffs der Specialformen: Obelisk, Ponton, parallelepipedischer Abschnitt, sogen. Trapezoeder, Antiobelisk, Antiponton, vier verschiedene Keilformen, Antikeil, u. s. w.). Der Wert einer allgemeinen Formel besteht doch wesentlich darin, dafs das System durch sie vereinfacht wird. Über das Mafs der Vereinfachung, das heifst über die Abgrenzung des Überflüfsigen kann man natürlich verschiedener Meinung sein.

Wenn ich oben den Ausdruck „Schnürleib" gebraucht habe, so scheint mir derselbe insofern nicht unberechtigt zu sein, als der Schematismus des Heinze'schen Systems in der That geeignet sein dürfte, die freie Beweglichkeit der geometrischen Speculation, welche bei jedem Problem den der Natur und dem Zweck der Aufgabe am meisten entsprechenden Weg einschlägt, zu beeinträchtigen. Als nächstliegendes Muster für eine solche freie und rationelle Behandlungsart einer Aufgabe mag beispielsweise der hübsche Aufsatz des Herrn Höfler über den Cylinderstutz (oder Cylinderhuf) im vorigen Heft dieser Zeitschrift angeführt werden. Eine Vergleichung desselben mit Heinze's Behandlung des Cylinderhufes dürfte nicht gerade zu Gunsten des Heinze'schen Systems ausfallen.

Die vorstehend geäufserten Bedenken gegen Heinzes System sind vorwiegend formaler Natur. Ich bin sonst ein erklärter Feind von Nörgeleien in formaler Beziehung. In diesem Falle aber mufste ich eine Ausnahme machen, da das in Rede stehende Werk mit bestimmten reformatorischen Ansprüchen auftritt und hohe Erwartungen anspannt. Dem gegenüber hielt ich es für meine Pflicht, meine Ansicht offen dahin auszusprechen und zu begründen, dafs ich einen Fortschritt für die Methodik der

Stereometrie in Heinzes System nicht finden kann und dafs ich für die Schule viel mehr Gefahren als Vorteile darin erblicken mufs.

Dagegen erkenne ich das Buch bereitwillig als eine tüchtige akademische Arbeit an, in welcher der verständige und reife Leser viele hübsche und anregende Einzelentwickelungen findet. Unter diesen mag namentlich die Darstellung des Inhalts des Antiprismas als Funktion des Drehungswinkels hervorgehoben werden. Wenn auch das Hereinziehen der Kegelschnitte in analytischer Behandlung beanstandet werden kann, so sei doch auf die recht hübsche diesbezügliche Darstellung im Anhang hingewiesen. Der praktische Lehrer wird in dem Buche einen überaus reichen, wenn auch etwas einseitigen Übungsstoff finden, und auch die formale Seite der Behandlung wird ihn zu manchen kritisch-fruchtbaren Gedanken anregen.

In diesem Sinne schliefse ich mich den Worten, mit denen Herr Holzmüller das Buch den Kollegen empfiehlt, gerne an.

Neuere Untersuchungen betreffend die Geometrie des Brocardschen Kreises.

Referat von W. Stegemann in Prenzlau.

(Mit zwei Figuren auf Tafel.)

Seit dem Bekanntwerden der Sätze über den Brocardschen Kreis und die Brocardschen Punkte haben verschiedene Mathematiker sich mit diesem Gegenstande näher beschäftigt. Infolge dessen ist das einschlägige Material beträchtlich angewachsen, und es vermehrt sich noch fort und fort; denn die Untersuchungen über diesen interessanten Abschnitt aus der Geometrie des ebenen Dreiecks sind keineswegs schon abgeschlossen. Dafs im Anschlufs an die ersten von Herrn H. Brocard veröffentlichten Sätze eine grofse Anzahl neuer Sätze aufgestellt wurde, davon legt das Aufgaben-Repertorium dieser Zeitschrift Zeugnis ab. Aber es war von vornherein einleuchtend, dafs weniger die Aufstellung einzelner Sätze, die zum Teil in gar keinem Zusammenhange stehen, als vielmehr die Gewinnung eines allgemeineren und umfassenderen Gesichtspunktes für die Behandlung dieses Gegenstandes denselben fruchtbar zu machen geeignet sein würde. Es erschienen daher auch bald umfangreichere Abhandlungen, in denen durchgängig das Streben nach Verallgemeinerung zu erkennen war. Als auf diesem Gebiete thätig sind aufser Herrn Brocard besonders zu erwähnen die Herren A. Artzt (Recklinghausen), J. Neuberg (Lüttich), E. Lemoine (Paris), R. Tucker (London) und J. Casey (London).

Eine Zusammenstellung des hierhergehörigen Materials ist bis jetzt von keiner Seite unternommen worden. Wohl hat Herr Professor Dr. Lieber in dem vorjährigen Osterprogramm des Realgymnasiums zu Stettin einen Anfang damit gemacht, aber wegen des beschränkten Raumes einer Programmabhand-

lung hat er unter dem Titel „Über die Gegenmittellinie und den Grebeschen Punkt“ zunächst nur die bis jetzt bekannten Sätze über die Gegenmittellinie und den Grebeschen Punkt nebst ihren Beweisen bringen können. Die Beziehungen der Gegenmittellinie und des Grebeschen Punktes zu den Kegelschnitten sowie den Brocardschen Kreis verspricht er in diesem Jahre folgen zu lassen.

Wir werden daher ein umfassendes Werk über unsern Gegenstand erst von der Zukunft zu erwarten haben, und die Orientierung über denselben bleibt für jetzt noch mit mancherlei Umständen verknüpft. Es möge daher gestattet sein, im folgenden einige der neuesten Abhandlungen, welche unsern Gegenstand betreffen, einer Besprechung zu unterziehen und die Prinzipien darzulegen, welche in ihnen zur Anwendung gekommen sind. Dies wird eine Übersicht über den Fortschritt der Entwickelung ermöglichen.

I.

A. Artzt. *Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind, nebst einer Anwendung auf die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre beiden Gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme (Kreis Brocards).* (Programm des Gymnasiums zu Recklinghausen, 1886, Nr. 336; Fortsetzung des Programms von 1884.)

Der Brocardsche Kreis wurde von Herrn Brocard zuerst der Kreis der sieben Punkte genannt, weil folgende Punkte auf ihm liegen*): Der Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises, der Grebesche Punkt K, die beiden Segmentärpunkte O und P, die Winkelpunkte A', B', C' des Brocardschen Dreiecks, welche auch als zweite Durchschnittspunkte der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC mit dem Brocardschen Kreise erhalten werden (XI, 434, Aufg. Nr. 133). Später wurden noch drei andere bemerkenswerte Punkte A'', B'', C'' gefunden, welche ebenfalls auf dem Brocardschen Kreise liegen. Punkt A'' ist der Punkt, in welchem der Brocardsche Kreis von den Kreisen COA, APB,

*) Man vergleiche hierzu die Brocardsche Figurentafel nebst Erläuterungen, Bd. XV_5, 365 d. Z., beachte jedoch, dafs dort die Bezeichnungen von den hier gewählten vielfach abweichen.

BMC zum zweitenmale getroffen wird; das Entsprechende gilt für B'' und C'' (XIV, 357, Aufg. Nr. 314 und 315 und XV, 39, Aufg. 357).

Der Verfasser der genannten Abhandlung hat sich nun die Frage vorgelegt: Giebt es eine gemeinsame, alle diese Punkte umfassende Definition, welche die Grundlage zu einer einheitlichen Untersuchung bildet? und er beantwortet diese Frage dahin, dafs, wenn man die Punkte A', B', C' ausscheidet und an ihrer Stelle gewisse fünf andere Punkte einführt, eine gemeinsame Definition gegeben werden kann für die Punkte M, O, P, A'', B'', C'' und eine ihr analoge für die fünf neu eingeführten Punkte und den Punkt K. Der Verfasser hat seine Resultate erhalten als Anwendungen allgemeiner Sätze, die im ersten Teil der Abhandlung entwickelt worden sind und die sich auf ähnliche Dreiecke, welche einem festen Dreieck umgeschrieben sind, beziehen.

Dieser erste Teil der Abhandlung schliefst sich als Fortsetzung des Programms von 1884 (Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über kongruente Strahlenbüschel aus den Ecken desselben; ein Beitrag zur Geometrie des Brocardschen Kreises von A. Artzt) genau an dasselbe an. Während aber für die in dem Programme von 1884 in Betracht gezogenen kongruenten Strahlenbüschel bestimmt war, dafs entweder die Strahlen AB, BC, CA oder die Strahlen AC, BA, CB einander entsprechen sollten, so dafs also je drei beliebige entsprechende Strahlen ein dem Dreieck ABC umgeschriebenes und ihm ähnliches Dreieck bilden (man vergl. das Referat XV, 460), läfst der Verfasser jetzt diese Beschränkung fallen. Es werden zwar wieder kongruente Strahlenbüschel vorausgesetzt; aber es dürfen sich jetzt drei beliebige Strahlen AX, BY, CZ entsprechen, und die Dreiecke, welche von je drei entsprechenden Strahlen gebildet werden, sind wieder dem festen Dreieck umgeschrieben und untereinander ähnlich, aber im allgemeinen dem festen Dreieck nicht ähnlich. Zu einer jeden solchen Schar gehört ein Nulldreieck (hier als Punkt O bezeichnet) und ein Maximaldreieck.

Ist $\alpha\beta\gamma$ ein Dreieck der Schar, so geht $\beta\gamma$ durch A, $\gamma\alpha$ durch B, $\alpha\beta$ durch C. Dreieck $\alpha\beta\gamma$ wird nun dem Dreieck ABC

gleichwendig oder gegenwendig genannt, je nachdem der Kreis $\alpha\beta\gamma$, wenn man zuerst von α nach β und dann nach γ gelangen will, in derselben oder in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden muſs als der Kreis ABC, wenn man von A zuerst nach B und dann nach C gelangen will. Von den interessanten Sätzen, welche der Verfasser über den Punkt O entwickelt, seien nur folgende in Kürze angeführt:

Liegt O innerhalb ABC, so erscheinen aus ihm die Seiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ unter den Winkeln $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$. (Der Satz erleidet einige Abänderung, wenn O auſserhalb ABC liegt.)

Im Dreieck ABC sei P der Winkelgegenpunkt von O; dann erscheinen die Seiten der umgeschriebenen Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ von O aus unter denselben Winkeln wie die ihnen entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC von P aus.

Jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ wird durch O in drei Dreiecke geteilt, welche denjenigen Dreiecken ähnlich sind, in welche ABC von P geteilt wird.

Da in den Strahlenbüscheln $A(X)$, $B(Y)$, $C(Z)$ sich beliebige Strahlen einander entsprechen dürfen, so lassen sich die entsprechenden Strahlen so bestimmen, daſs sie ein Dreieck von bestimmter Gestalt, $\alpha\beta\gamma$, welches dem Dreieck ABC gleichwendig sein möge, bilden. Man erhält hierdurch eine Schar dem Dreieck ABC umgeschriebener Dreiecke, welche dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ähnlich und dem Dreieck ABC gleichwendig sind; das zu der Schar gehörige Nulldreieck sei O. Läſst man nun die Strahlen AX, BY, CZ sich in der Weise entsprechen, daſs sie ein Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ bilden, welches dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ähnlich aber gegenwendig ist, so erhält man eine zweite Schar dem Dreieck ABC umgeschriebener Dreiecke, welche dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ähnlich, aber den beiden Dreiecken $\alpha\beta\gamma$ und ABC gegenwendig sind; das Nulldreieck dieser Schar sei O'. Zwei Dreiecksscharen wie die soeben definierten nennt der Verfasser Zwillingsscharen und die ihnen zugehörigen Nulldreiecke O und O' Zwillingspunkte.

Die Zuordnung der Winkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, ebenso die der Winkel des Dreiecks $\alpha'\beta'\gamma'$ zu den Winkeln des Dreiecks ABC kann, weil die Permutationszahl für drei Elemente 6 ist, in sechsfacher Weise geschehen, woraus sich ergiebt, daſs ein

Dreieck von bestimmter Gestalt einem anderen gegebenen Dreieck in zwölffacher Weise umgeschrieben werden kann. In sechs Fällen erhält man Dreiecke, welche dem gegebenen Dreieck gleichwendig sind, in den andern sechs Fällen solche, welche ihm gegenwendig sind.

Wenn das einer Schar ähnlicher dem Dreieck ABC umgeschriebener Dreiecke zugehörige Nulldreieck O gegeben ist, so kann man fragen, ob die Dreiecke der Schar zu ABC gleichwendig oder gegenwendig sind. Der Verfasser geht auf diese Frage näher ein und entwickelt folgenden Satz:

Die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ einer Schar ähnlicher, dem Dreieck ABC umgeschriebener Dreiecke sind diesem gleich- oder gegenwendig, je nachdem das Produkt der trimetrischen Koordinaten von O für ABC ein positives oder negatives ist.

Sodann wird die Aufgabe umgekehrt. Soll nämlich ein Dreieck mit den Winkeln α, β, γ dem Dreieck ABC umgeschrieben werden, und sind die Winkel α, β, γ in bestimmter Weise den Winkeln A, B, C zugeordnet, so kann die Umschreibung entweder gleichwendig oder gegenwendig erfolgen, und es entstehen also zwei Zwillingsscharen ähnlicher Dreiecke mit den Zwillingspunkten O und O'. Die Untersuchungen über die Lage der Punkte O und O' führen zu folgenden Sätzen:

Das Nulldreieck O einer Schar gleichwendig ähnlicher Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, welche dem Dreieck ABC umgeschrieben und ihm gleichwendig sind, liegt innerhalb ABC, wenn jedes Paar entsprechender Winkel kleiner als zwei Rechte ist; O fällt in eine Ecke von ABC, wenn der Winkel an ihr seinem entsprechenden Winkel in $\alpha\beta\gamma$ supplementär ist; O fällt in den Scheitelraum eines Innenwinkels, wenn dieser mit seinem entsprechenden mehr als zwei Rechte beträgt. Das Koordinatenprodukt ist im allgemeinen positiv; im zweiten Falle, nämlich dem Grenzfalle, ist dasselbe Null.

Das Nulldreieck O' einer Schar gleichwendig ähnlicher Dreiecke $\alpha'\beta'\gamma'$, die dem Dreieck ABC umgeschrieben und ihm gegenwendig sind, fällt außerhalb ABC, aber innerhalb desjenigen Innenwinkels, der allein größer oder allein kleiner ist als der ihm entsprechende in $\alpha'\beta'\gamma'$. O' fällt in eine Ecke des Dreiecks ABC, wenn der Winkel an derselben seinem entsprechen-

den in $\alpha'\beta'\gamma'$ gleich ist, dagegen in eine Seite, wenn der ihrem Gegenwinkel entsprechende Winkel des Dreiecks $\alpha'\beta'\gamma'$ Null ist. Das Koordinatenprodukt von O' ist negativ resp. Null.

Es werden nun noch verschiedene Sätze über den Inhalt eines Zwillingspaares von Maximaldreiecken, über einige weitere Eigenschaften der Zwillingspunkte und über Dreiecksreihen mit gemeinschaftlichem Nulldreieck entwickelt, und damit schliefst der erste Teil der Abhandlung, in welchem die allgemeinen Prinzipien dargelegt wurden, welche den Verfasser bei seinen Untersuchungen im zweiten Teile geleitet haben.

Dieser zweite Teil enthält eine Anwendung des im ersten Teil Entwickelten, welche unter anderm auch auf den Brocardschen Kreis führt. Es ist durch Anwendung seiner Methode dem Verfasser gelungen, diesem Kreise abermals eine neue Seite abzugewinnen.

Dem gegebenen Dreieck ABC läfst sich ein Dreieck von beliebiger Gestalt, also auch ein ihm ähnliches, auf zwölf verschiedene Arten umschreiben. Ebenso kann man dem gegebenen Dreieck ein solches, welches dem aus seinen Schwerlinien gebildeten Dreieck ähnlich ist, auf zwölf Arten umschreiben. Jedes dieser 24 Dreiecke gehört zu einer Schar ähnlicher Dreiecke, und jede dieser Scharen hat ihr Nulldreieck. Nach Teil I zerfallen zwölf zusammengehörige Nulldreiecke in zwei Systeme von je sechs; die Nulldreiecke des einen Systems sind die Zwillingspunkte der Nulldreiecke des andern. Werden von den Punkten, durch welche diese 24 Nulldreiecke dargestellt werden, noch die Winkelgegenpunkte genommen, so erhält man im ganzen 48 Punkte, welche einer näheren Betrachtung unterzogen werden.

Diejenigen zwölf von diesen Punkten, welche die Nulldreiecke der zu ABC gegenwendigen Scharen darstellen, liegen auf einer Ellipse E, welche durch ABC geht, und deren Mittelpunkt der Schwerpunkt S von ABC ist. Zu diesen zwölf Punkten gehören die Punkte A, B, C; ferner die Punkte A', B', C', welche auf den Mittellinien von ABC so liegen, dafs $SA' = SA$ u. s. w. ist. Die Winkelgegenpunkte aller Punkte der Ellispe liegen auf einer Geraden G. (Siehe Fig. 1, in welcher jedoch der Deutlichkeit halber nur eine beschränkte Anzahl der in Betracht kommenden Punkte konstruiert worden ist.) Diese Gerade ist

die Polare des Punktes K in Bezug auf den Kreis ABC; sie geht durch diejenigen drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, in welchen die in A, B, C an den Kreis ABC gelegten Tangenten die Gegenseiten schneiden. Die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind hier als Winkelgegenpunkte von A, B, C aufzufassen.

Diejenigen zwölf Punkte, welche die Nulldreiecke derjenigen Scharen, welche ABC gleichwendig sind, darstellen, sind die Zwillingspunkte der auf der Ellipse E liegenden zwölf Punkte. Sie liegen auf einer Kurve C^4, deren Gestalt vom Verfasser nicht untersucht worden ist. Zu ihnen gehören der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H, die beiden Segmentärpunkte O und P, ferner noch die Punkte α, β, γ, welche in der Aufgabe Nr. 360 (XV, 357) durch A''', B''', C''' bezeichnet wurden. Diese letzteren drei Punkte liegen auf dem Kreise mit dem Durchmesser HS; α ist aufserdem noch Schnittpunkt der beiden durch A gehenden Kreise, welche BC in B resp. C berühren. Die Winkelgegenpunkte der zwölf Punkte auf C^4 liegen auf einem Kreise $\mathfrak{K}$ (dem Brocardschen Kreise). Unter diesen sind der Grebesche Punkt K, der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises M, die beiden Segmentärpunkte O und P, sodann noch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, welche mit den schon vorhin erwähnten Punkten A'', B'', C'' identisch sind. Dafs der Kreis $\mathfrak{K}$ von der Kurve C^4 in den Punkten O und P geschnitten wird, ist vom Verfasser nicht erwähnt worden, leuchtet aber sofort ein; denn den Punkten O und P der Kurve C^4 entsprechen die Punkte P und O als Punkte des Kreises $\mathfrak{K}$.

Die Gerade G mit ihren zwölf Punkten wird vom Verfasser zuerst untersucht. Er nennt sie die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen. Die schon vorhin erwähnten Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bilden nämlich mit jedem der Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, in welchen die Gerade G von den Geraden KA, KB, KC getroffen wird, je eine harmonische Reihe. Es sind harmonisch die Reihen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{B}$. Ebenso sind auch die Reihen $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{C}\mathfrak{B}'$ harmonisch. In ähnlicher Weise lassen sich aus den andern sechs auf G liegenden Punkten, welche Schnittpunkte gewisser Kreise ($\mathfrak{A}'BC$, $\mathfrak{A}'AB$, $\mathfrak{A}'CA$ u. s. w.) mit G sind, sechs harmonische Reihen bilden.

Verlängert man die Geraden AK, BK, CK, bis sie den umgeschriebenen Kreis in A_2, B_2, C_2 treffen, so ist jedes der

beiden Dreiecke ABC und $A_2B_2C_2$ ähnlich dem aus den Schwerlinien des anderen gebildeten Dreiecks. Ferner haben beide Dreiecke den umgeschriebenen Kreis und den Punkt K gemeinsam, auch die Gerade G mit ihren zwölf Punkten hat für beide Dreiecke dieselbe Bedeutung.

Die zwölf auf dem Brocardschen Kreise $\mathfrak{K}$ liegenden Punkte entsprechen den zwölf Punkten auf der Geraden G in folgender Weise: Man verbinde jeden der zwölf auf G liegenden Punkte mit dem Mittelpunkt M des um ABC beschriebenen Kreises, so sind die zweiten Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ die gesuchten Punkte. Den zwölf harmonischen Punktreihen auf der Geraden G entsprechen jetzt zwölf harmonische Punktsysteme auf dem Kreise $\mathfrak{K}$, und der Verfasser nennt darum diesen Kreis auch den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme. Es mufs anerkannt werden, dafs hierdurch dem Brocardschen Kreise eine neue Bedeutung beigelegt ist, auf welche bisher von keiner Seite aufmerksam gemacht wurde.

Auch den zwölf auf der Ellipse E liegenden Punkten kommen dieselben harmonischen Eigenschaften zu, und die Ellipse E wird daher mit Recht die Ellipse der zwölf harmonischen Punktsysteme genannt. Die auf der Kurve C^4 liegenden zwölf Punkte, welche die Zwillingspunkte der Punkte auf E sind, entbehren dieser harmonischen Eigenschaften.

Zum Schlusse seiner Abhandlung wendet sich der Verfasser einem Probleme allgemeineren Charakters zu, welches zu den gewonnenen Resultaten in näherer Beziehung steht, nämlich:

a. Welches ist die gegenseitige Lage derjenigen zwölf Punkte, in die der Scheitel O eines Dreistrahles fällt, wenn derselbe möglichst oft so gelegt wird, dafs ihm ein gegebenes Dreieck ABC eingeschrieben ist?

b. In welcher Beziehung stehen zu jenen zwölf Punkten (O) diejenigen zwölf Punkte (S), in welche, bei derselben Forderung, der Scheitel eines zweiten Dreistrahles fällt, welcher dem ersten konzentrisch so gelegt werden kann, dafs jeder Strahl des einen mit den drei Strahlen des andern ein harmonisches Büschel bildet?

Im Anschlufs an die Lösung dieser Aufgabe, durch welche offenbar die vorher gewonnenen Resultate verallgemeinert werden,

gelangt der Verfasser zu einer Anzahl interessanter Sätze, von denen hier nur noch der folgende eine Stelle finden möge:

Es giebt unendlich viele Dreiecke $A_0B_0C_0$, die dem Kreise um ABC ein- und der Ellipse Q mit den Brennpunkten O und P (Segmentärpunkten von ABC) umgeschrieben sind. Sie haben alle dasselbe Centrum M des Umkreises, denselben K-punkt, dieselben Segmentärpunkte O und P und denselben Winkel ϑ, wo $\cot\vartheta = \cot A_0 + \cot B_0 + \cot C_0$.

II.

J. Casey. *On the harmonic hexagon of a triangle.*

Verfasser dieser Abhandlung geht aus von den beiden Dreiecken ABC und $A'B'C'$. (Siehe Fig. 2.) Die Punkte A', B', C', sind diejenigen, in welchen die Verlängerungen von AK, BK, CK den Umkreis von ABC schneiden, und Dreieck $A'B'C'$ ist also identisch mit dem von Artzt durch $A_2B_2C_2$ bezeichneten Dreieck. Von den beiden Dreiecken ABC und $A'B'C'$ wird zunächst nachgewiesen, dafs sie dieselben Gegenmittellinien *(symmedian lines)* haben, und es wird von ihnen gesagt, sie seien *cosymmedians.* Solche Dreiecke haben, wie nun weiter entwickelt wird, nicht allein den umgeschriebenen Kreis und den Punkt K, sondern auch den Brocardschen Kreis, den Brocardschen Winkel, die Segmentärpunkte, den ersten und zweiten Lemoineschen Kreis*) gemeinsam.

Die Punkte A, B', C, A', B, C' bilden ein Sechseck, und dieses nennt der Verfasser das harmonische Sechseck *(harmonic hexagon)* des Dreiecks ABC; die Diagonalen AA', BB', CC' werden als die *symmedian lines* des Sechsecks bezeichnet. Der Fortschritt in der Entwickelung besteht nun bei Herrn Casey hauptsächlich darin, dafs er nachweist, dafs dieselben Beziehungen, welche zwischen einem Dreieck und dem Brocardschen Kreis,

*) Der erste Lemoinesche Kreis *(Lemoine's first circle)* geht durch die Punkte L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2 der Aufgabe Nr. 332, XIV, 598, welche man erhält, indem man durch K zu den Seiten von ABC Parallelen zieht. Der zweite Lemoinesche Kreis *(Lemoine's second circle)* geht durch die Punkte a, b, c, a', b', c' der Aufgabe Nr. 422, XV, 441, welche man erhält, wenn man durch K zu den in A, B, C an den Umkreis von ABC gelegten Tangenten Parallelen zieht.

den Brocardschen Punkten, dem Brocardschen Winkel, den beiden Kreisen des Lemoine vorhanden sind, auch bei dem harmonischen Sechseck bestehen.

Der Brocardsche Kreis für das harmonische Sechseck ist identisch mit dem für die Dreiecke ABC und $A'B'C'$; der Brocardsche Winkel und die Brocardschen Punkte sind jedoch andere. Der Brocardsche Winkel für das harmonische Sechseck wird in ähnlicher Weise definiert, wie beim Dreieck. Es verhalten sich nämlich auch in dem Sechseck die Abstände des Punktes K von den Seiten so wie diese Seiten. Sind nun x, y u. s. w. die von K aus auf die Seiten a, b u. s. w. gefällten Lote, so wird der Brocardsche Winkel Θ des Sechsecks bestimmt durch die Gleichungen $x = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \Theta$, $y = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \Theta$ u. s. w. Ist ω der Brocardsche Winkel für die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ so besteht die Relation: $\operatorname{tg} \Theta = 3 \operatorname{tg} \omega$.

Zieht man von den Eckpunkten des harmonischen Sechsecks aus diejenigen zwölf Transversalen, welche mit den anstofsenden Seiten den Winkel Θ bilden, so schneiden sich diese Transversalen zu je sechs in zwei Punkten, welche auf dem Brocardschen Kreise liegen. Diese beiden Punkte sind die Brocardschen Punkte des Sechsecks. (In der Fig. ist nur einer derselben, Ω, konstruiert worden.)

Zieht man durch Punkt K zu den Seiten des harmonischen Sechsecks $AB'CA'BC'$ Parallelen, und betrachtet man bei jeder dieser Parallelen die Schnittpunkte mit denjenigen beiden Sechsecksseiten, welche an die Seite anstofsen, zu der die Parallele gezogen worden ist (z. B. die Schnittpunkte der Parallelen zu AB' mit $B'C$ und $C'A$), so liegen die erhaltenen zwölf Punkte auf einem Kreise, dem ersten Lemoineschen Kreise des Sechsecks.

Legt man in den Eckpunkten des harmonischen Sechsecks Tangenten an den umgeschriebenen Kreis, und zieht man durch Punkt K Parallelen zu diesen Tangenten, bis sie die in dem betreffenden Eckpunkte zusammenstofsenden Seiten schneiden (z. B. die Parallele zur Tangente in A bis zum Durchschnitt mit $C'A$ und AB'), so liegen auch die so erhaltenen zwölf Punkte auf einem Kreise, dem zweiten Lemoineschen Kreise des Sechsecks.

In allen angeführten Punkten ist die Analogie mit dem Dreieck eine vollständige. Der Verfasser ist aber noch weiter gegangen. Während seine Abhandlung schon unter der Presse war, hat er seine Untersuchungen auf harmonische Polygone von beliebiger Seitenzahl ausgedehnt. Hierauf bezügliche kurze Notizen sind der Abhandlung als Anhang hinzugefügt worden. Danach ist unter einem harmonischen Polygon ein solches zu verstehen, welches aus einem regulären Polygon durch Inversion von einem beliebigen Punkte aus erhalten wird. Ein jedes solches Polygon hat seinen K-punkt, der so liegt, dafs die von ihm aus auf die Seiten gefällten Lote sich wie die Seiten verhalten, Auf ein jedes solches Polygon läfst sich auch die ganze für das harmonische Sechseck entwickelte Theorie ausdehnen.

III.

Ém. Lemoine. *Propriétés relatives à deux points ω, ω' du plan d'un triangle ABC qui se déduisent d'un point K quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine.*

In dieser Abhandlung ist die Verallgemeinerung bekannter Sätze wieder nach einer andern Richtung hin erfolgt. Verfasser zieht zunächst die Beziehungen in Betracht, in welchen die Brocardschen Punkte ω und ω' zu dem Lemoineschen (Grebeschen) Punkte K stehen. Er erinnert daran, dafs man ω und ω' auf folgende Weise konstruieren kann: Man ziehe in dem gegebenen Dreieck ABC die Geraden AK, BK, CK, welche die Gegenseiten in α, β, γ schneiden; sodann ziehe man durch α eine Parallele zu AB, welche CA in μ schneidet, ferner durch β eine Parallele zu BC, welche AB in ν schneidet, und endlich durch γ eine Parallele zu CA, welche BC in λ schneidet. Die drei Transversalen $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ gehen dann durch den Punkt ω, den ersten Brocardschen Punkt *(point direct de Brocard)*. Auf ganz ähnliche Weise erhält man auch den zweiten Brocardschen Punkt *(point rétrograde de Brocard)*; nur mufs man die Parallelen durch α, β, γ resp. zu CA, AB, BC ziehen.

Der Verfasser läfst nun die Beschränkung, dafs Punkt K der Grebesche Punkt sei, fallen; er nimmt einen beliebigen Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC als Punkt K und stellt

Untersuchungen über die Punkte ω und ω' nach dieser neuen Voraussetzung an. Dabei wird auch eine beliebig gezogene Gerade $\varDelta$ eingeführt, welche die Seiten von ABC in A_a, B_b, C_c schneidet. Behufs der Konstruktion des Punktes ω zieht man dann αC_c, βA_a, γB_b, welche die Seiten CA, AB, BC der Reihe nach in μ, ν, λ schneiden. Die Transversalen $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ gehen dann durch ω, *point direct par rapport à K*. Zieht man die Verbindungslinien αB_b, βC_c, γA_a, so erhält man in gleicher Weise den Punkt ω', *point rétrograde par rapport à K*.

Auf die Details der Abhandlung kann hier um so weniger eingegangen werden, als der Verfasser durchweg das analytische Verfahren mit Benutzung trimetrischer Koordinaten angewandt hat. Die Untersuchungen haben zu einer grofsen Anzahl interessanter Sätze geführt, lassen auch noch verschiedene Punkte, Gerade und Kegelschnitte als besonders bemerkenswert erkennen. Auch der Einflufs, den eine Veränderung des Punktes K oder der Geraden $\varDelta$ auf die hier in Betracht kommenden geometrischen Gebilde ausübt, ist dargelegt worden. Als besonders beachtenswert möge hervorgehoben werden, dafs, wenn man von einem beliebigen Punkte K ausgeht und danach Punkt ω konstruiert, wenn man dann diesen letzteren als einen neuen K-punkt betrachtet und wieder ω konstruirt und weiter so fortfährt, man aufser dem zuerst genommenen Punkte K nur fünf Punkte erhält; der sechste Punkt ist wieder Punkt K. Dieselben Punkte würde man erhalten, nur in umgekehrter Reihenfolge, wenn man zuerst Punkt ω' konstruieren würde.

Sollen aus den allgemeinen Resultaten solche Sätze, welche speziell für die Brocardschen Punkte gelten, abgeleitet werden, so mufs die Gerade $\varDelta$ die Gleichung haben: $ax + by + cz = 0$, d. h. sie mufs die unendlich entfernte Gerade sein, und der Punkt K mufs die Koordinaten a, b, c haben, d. h. er mufs der Grebesche Punkt sein.

Zum Schlufs wird noch die gleichseitige Hyperbel Γ, die Hyperbel der neun Punkte (Aufg. Nr. 395, XV, 290), welche durch die Punkte A, B, C, ferner durch den Schwerpunkt und den Höhendurchschnittspunkt von ABC geht, behandelt. Verfasser weist darauf hin, dafs, wenn man über den Seiten des Dreiecks ABC die gleichschenkligen Dreiecke BCA', CAB',

ABC' mit gleichem Basiswinkel errichtet, die Geraden AA', BB', CC' sich in einem Punkte der Hyperbel Γ schneiden. Sodann stellt er für eine Anzahl spezieller Fälle fest, welche Punkte gewissen Basiswinkeln entsprechen und umgekehrt. Ist K nicht der Grebesche, sondern ein beliebiger Punkt und Δ nicht die unendlich entfernte, sondern eine beliebige Gerade, so entspricht der Hyperbel Γ ein Kegelschnitt, welcher ebenfalls dem Dreieck ABC umgeschrieben ist, und welcher die Punkte enthält, die im allgemeinen Falle den bemerkenswerten Punkten der Hyperbel Γ entsprechen.

Eine dankenswerte Zugabe bildet das von Herrn Lemoine seiner Abhandlung beigefügte litterarische Verzeichnifs aller derjenigen Schriften, welche zu unserm Gegenstande in irgend welcher Beziehung stehen. Auch alle in den verschiedenen Zeitschriften veröffentlichten, hierhergehörigen Aufgaben, darunter selbstverständlich auch diejenigen dieser Zeitschrift, sind gewissenhaft registriert worden.

Es ist interessant zu sehen, wie die Verfasser der drei besprochenen Abhandlungen, welche in gleicher Weise bestrebt waren, die Beziehungen eines Dreiecks zu dem Brocardschen Kreis, den Brocardschen Punkten, dem Grebeschen Punkt u. s. w. nach einem allgemeineren Prinzipe abzuleiten, doch dabei ganz verschiedene Wege eingeschlagen haben, wie aber jeder von ihnen auf dem eingeschlagenen Wege zu sehr beachtenswerten Resultaten gelangt ist. Diese Vielseitigkeit in der Behandlung kann der Sache nur zum Vorteil gereichen, und es ist zu erwarten, dafs im Laufe der Zeit die Bedeutung des in Rede stehenden Teils der Geometrie des ebenen Dreiecks immer mehr und mehr hervortreten und Anerkennung finden wird.

Kleinere Mitteilungen.

Über den Schwerpunkt des Mantels eines schiefen Cylinders.

Von Prof. Weinmeister in Tharand.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen Cylindermantels wird zuweilen folgendes Verfahren eingeschlagen:*) „Man zerfällt den Mantel durch Ebenen parallel der Grundfläche in eine Schaar kongruenter Cylinderflächen von unendlich kleiner Höhe. Der Schwerpunkt des Umfanges ist dann offenbar zugleich Schwerpunkt einer jeden dieser Flächen, und alle diese Schwerpunkte liegen in einer Geraden, in deren Mitte der Schwerpunkt des ganzen Mantels zu suchen ist."

Hiergegen ist zu bemerken, dafs dieser Satz nicht für jeden beliebigen Cylindermantel gilt, sondern nur für den geraden und für besondere Arten schiefer Cylinder, und dafs dies jedenfalls zur Vervollständigung hinzugefügt werden mufs.

Ist z. B. ein schiefes Prisma mit der Seitenkante l gegeben, und bilden die Grundkanten a, b, c ... desselben mit den Seitenkanten bezw. die Winkel α, β, γ ..., so kann man die Masse einer jeden Seitenfläche in ihrer Mittelparallelen vereinigt denken und erhält so statt des prismatischen Mantels den Umfang des Mittelschnitts, wenn dessen Seiten die Massen $al \sin\alpha$, $bl \sin\beta$, $cl \sin\gamma$ ... tragen. Durch Verallgemeinerung des Prismas zum Cylinder ergiebt sich somit folgender Satz:

Der Schwerpunkt des Mantels eines schiefen Cylinders fällt mit dem Schwerpunkt des Umfanges seines Mittelschnittes zusammen, wenn derselbe so mit Masse belegt wird, dafs sich die Dichtigkeiten der einzelnen Punkte verhalten, wie die Sinus der Winkel, welche ihre Tangenten mit der Richtung der Seitenkanten bilden.

Betrachten wir nun den besonderen Fall, dafs der Mittelschnitt des schiefen Cylinders einen Mittelpunkt hat, d. h. einen Punkt, welcher alle durch ihn gehende Sehnen halbiert. Derselbe ist dann,

*) S. z. B. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch, Band VI. S. 439. Weisbach, Theoretische Mechanik §. 118 u. A.

wie man leicht sieht, Schwerpunkt der homogenen Fläche und des homogenen Umfanges des Mittelschnittes. Er ist aber auch Schwerpunkt des in obiger Weise belasteten Umfanges; denn, da die Tangenten an den Eckpunkten einer jeden durch den Mittelpunkt gehenden Sehne parallel sind, so bestimmen sie mit der Richtung der Seitenkanten gleiche Winkel, und es tragen daher ihre Berührpunkte gleiche Massenteilchen. Zerlegt man nun die ganze längs des Umfanges erstreckte Masse in lauter derartige Paare gleicher Massenteilchen, so müssen sie sämtlich den Mittelpunkt zum Schwerpunkt haben. Daher der Satz:

Haben die Grundflächen eines schiefen Cylinders Mittelpunkte, so liegt in der Mitte der Verbindungslinie derselben der Schwerpunkt des Cylindermantels.

Über die Gleichung $l \sin x + m \cos x = n$.

Von Friedrich Meyer in Halle a/S.

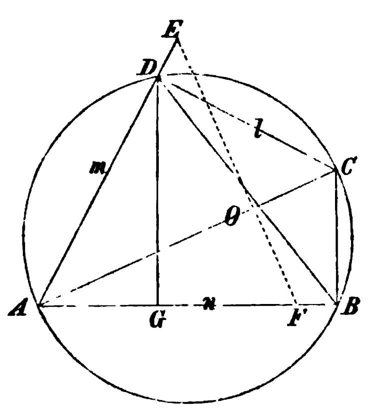
Aufserordentlich zahlreiche und interessante Aufgaben fordern einen Winkel x aus der Gleichung $l \sin x + m \cos x = n$ zu bestimmen. Bei Dreiecksberechnungen erinnere ich nur an $a + b$, $a + c$, α; $a + c$, $b + c$, β; $a + b + c$, $a - b$, γ; $a + b + c$, $a - b$, $\alpha - \beta$ u. s. w. Die Schüler neigen dazu $\sqrt{1 - (\sin x)^2}$ für $\cos x$ zu substituieren, wodurch sie auf eine quadratische Gleichung nach $\sin x$ geführt werden, welche, von der Vervielfältigung durch die Periode abgesehen, zwei Hauptlösungen mehr enthält als die ursprüngliche. Das Geschäft der Absonderung der unbrauchbaren Wurzeln will aber niemals munden. Darum ist wohl die Einführung eines Hilfswinkels φ vermöge der Definitionsgleichung $l = m \operatorname{tg} \varphi$ allgemein üblich; für l und m sind die absoluten Beträge und für φ die spitzwinklige Lösung zu wählen. Eine ebenso kurze als leichte Rechnung giebt

$$\cos(x - \varphi) = \frac{n}{m} \cos \varphi,$$

woraus $x - \varphi$ und demnäckst x, was die Hauptlösungen betrifft, zweideutig entspringt.

Man thut den Schülern immer einen Gefallen, wenn rechnerische Wahrheiten geometrisch beleuchtet werden. Da ich eine geometrische Ableitung der letzten Gleichung nirgends beobachtet habe, so möchte mein Verfahren dem einen oder anderen Kollegen von Interesse sein. Übrigens glaube ich mich auf positive Koefficienten beschränken zu dürfen, um alle Weiterungen zu vermeiden, zu welchen die geringfügige Modifikation der Vorzeichen hier führen würde; das Verhalten ist jedermann alsdann von selbst klar.

Man zeichne ein Sehnenviereck $ABCD$, worin die Winkel bei B und D rechte sind; die Schenkel des letzteren seien $CD = l$, $AD = m$, während $AB = n$ ist. Der Winkel $\widehat{DAB}$ ist dann der gesuchte (x). Denn fällt man von D auf AB das Lot DG, so sind durch dieses und die Seite CB die Seiten AD und CD auf AB projiciert; die eine Projektion ist $AD \cdot \cos \widehat{DAB} = m \cos x$, die andere $CD \sin \widehat{DAB} = l \sin x$, die Summe beider offenbar AB d. h. n.



Gleichzeitig erkennt man, dafs $\widehat{CAD}$ nichts anderes als der Hilfswinkel φ ist und ferner, dafs reelle Lösungen nur existieren, wenn n kleiner ist als $\sqrt{l^2 + m^2}$.

Um aber aus der Figur die eingangs transformierte Gleichung abzuleiten, schneide man von A aus auf den von dort auslaufenden Vierecksseiten $AE = AB$ und $AF = AD$ ab und verbinde E mit F, dann steht EF auf AC senkrecht. Zieht man nämlich die Diagonale BD, so ist $\triangle AEF \cong ABD$, daher ist $\widehat{AEO} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Hieraus ergiebt sich sogleich, dafs $\widehat{AOE} = 90^0$ ist, weil $\widehat{ADC}$ recht ist.

Da nunmehr AO sowohl die Projektion von AE als auch von AF auf AC ist, so dürfen wir schreiben

$$AF \cdot \cos \widehat{FAO} = AE \cdot \cos \widehat{EAO},$$

d. h.

$$m \cos (x - \varphi) = n \cos \varphi.$$

Das aber war die zuerst mittels des Hilfswinkels φ rein rechnungsmäfsig abgeleitete Gleichung.

Zum Gaussschen Fundamentalsatz der Axonometrie.

Von Oberlehrer Dr. Schlegel a. d. höh. Gewerbeschule in Hagen.

Obiger Satz läfst sich, wie Herr Holzmüller (S. 498 vorigen Jahrganges) richtig vermutet, in sehr einfacher Weise mit Hilfe der Ausdehnungslehre beweisen. Da dieser Beweis im Wesentlichen nur allgemein bekannte Hilfsmittel erfordert, so sei er hier mitgeteilt.

Es seien die drei gleichlangen und unter einander senkrechten Strecken, welche projiciert werden sollen, mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet,

und drei andere ebenso beschaffene Strecken mit y_1, y_2, y_3. Dann bilden diese beiden Tripel Normalvereine im Sinne der Ausdehnungslehre. Soll nun der Verein (x_1, x_2, x_3) orthogonal auf die Ebene $(y_1\ y_2)$ projiciert werden, so kann man, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, die Scheitel beider Vereine zusammenfallen lassen.

Nun können die Strecken x_1, x_2, x_3 aus den Strecken y_1, y_2, y_3 mittelst reeller Zahlen abgeleitet werden (Grafsmann Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 229). Sei demnach, unter Anwendung der in meinem „System der Raumlehre" Bd. 2, Nr. 63 angewandten Bezeichnungen und Numerierungen der Formeln:

(15) od. (24) $$x_q = \beta_{q1} y_1 + \beta_{q2} y_2 + \beta_{q3} y_3. \qquad (q = 1, 2, 3)$$

Dann ist unter den über diese Vereine hier gemachten Voraussetzungen

(25) $$y_p = \beta_{1p} x_1 + \beta_{2p} x_2 + \beta_{3p} x_3. \qquad (p = 1, 2, 3)$$

Ferner

(22) $$\beta_{1p}\beta_{1q} + \beta_{2p}\beta_{2q} + \beta_{3p}\beta_{3q} = 0 \qquad (p \text{ und } q \text{ verschieden})$$

(23) $$\beta_{1p}^2 + \beta_{2p}^2 + \beta_{3p}^2 = 1$$

Sind nun a, b, c bezw. die Projektionen der Strecken $x_1, x_2\ x_3$, auf die Ebene $(y_1 y_2)$, so ist

$$\begin{aligned} a &= \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2 = (\beta_{11} + i\beta_{12})\, y_1 \\ b &= \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 = (\beta_{21} + i\beta_{22})\, y_1 \\ c &= \beta_{31} y_1 + \beta_{32} y_2 = (\beta_{31} + i\beta_{32})\, y_1, \end{aligned}$$

da $y_2 = i y_1$ ist.

Unter den Ausdrücken aa, bb, cc im Sinne des Gaufsschen Satzes sind nun Strecken zu verstehen, die aus der Strecke y_1, mittelst der Quadrate der Zahlen $(\beta_{q1} + i\beta_{q2})$ abgeleitet sind. Demnach ist

$$aa = (\beta_{11}^2 - \beta_{12}^2 + 2 i\beta_{11}\beta_{12})\, y_1$$

oder

$$\begin{aligned} aa &= (\beta_{11}^2 - \beta_{12}^2) y_1 + 2\beta_{11}\beta_{12} y_2 \\ bb &= (\beta_{21}^2 - \beta_{22}^2) y_1 + 2\beta_{21}\beta_{22} y_2 \\ cc &= (\beta_{31}^2 - \beta_{32}^2) y_1 + 2\beta_{31}\beta_{32} y_2, \end{aligned}$$

Addiert man diese drei Gleichungen und beachtet, dafs nach (23)

$$\beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 = \beta_{12}^2 + \beta_{22}^2 + \beta_{32}^2 = 1,$$

und nach (22)

$$\beta_{11}\beta_{12} + \beta_{21}\beta_{22} + \beta_{31}\beta_{32} = 0$$

ist, so ergiebt sich die Behauptung des Satzes:

$$aa + bb + cc = 0.$$

Die Koefficienten β haben eine einfache geometrische Bedeutung. Dreht man das Normalsystem (y_1, y_2, y_3) um die Axe y_1 und um den Winkel α, sodafs y_2 in z_2 und y_3 in z_3 übergeht, so ist

$$z_2 = y_2 \cos\alpha + y_3 \sin\alpha; \quad z_3 = y_3 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha.$$

Dreht man jetzt das neue System (y_1, z_2, z_3) um die Axe z_2 und um den Winkel β, sodafs y_1 in z_1 und z_3 in x_3 übergeht, so ist

$$z_1 = y_1 \cos\beta + z_3 \sin\beta; \quad x_3 = z_3 \cos\beta - y_1 \sin\beta.$$

Dreht man endlich das letzte System (z_1, z_2, x_3) um die Axe x_3 und um den Winkel γ, sodafs z_1 in x_1 und z_2 in x_2 übergeht, so ist

$$x_1 = z_1 \cos\gamma + z_2 \sin\gamma; \quad x_2 = z_2 \cos\gamma - z_1 \sin\gamma.$$

Eliminiert man aus diesen sechs Gleichungen die Gröfsen z und vergleicht die erhaltenen Werte von x_1, x_2, x_3 mit den oben (15) aufgestellten, so folgt:

$$\beta_{11} = \cos\beta\cos\gamma; \quad \beta_{21} = -\cos\beta\sin\gamma; \quad \beta_{31} = -\sin\beta;$$
$$\beta_{12} = \cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma; \quad \beta_{13} = \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma;$$
$$\beta_{22} = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma; \quad \beta_{23} = \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$
$$\beta_{32} = -\sin\alpha\cos\beta; \quad \beta_{33} = \cos\alpha\cos\beta,$$

Ausdrücke, welche natürlich den Bedingungen (22) und (23) identisch genügen.

Die im zweiten Teile des Gaufsschen Satzes angegebenen Substitutionen

$$a = (p-q)(q-pii);\ b = (q-qi)(pii-pi);\ c = (qi-p)(pi-q)$$

entspringen aus der Vergleichung der Formel $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ mit der Formel der Pythagoräischen Dreieckszahlen, welche zu diesem Zweck in der Form zu schreiben ist:

$$(p^2 - q^2)^2 + (-2pq)^2 + [-i(p^2 + q^2)]^2 = 0.$$

Bemüht man sich nun, die drei Klammerausdrücke als Produkte von Differenzen darzustellen, so findet sich in Übereinstimmung mit Gaufs:

$$a = (p-q)(q+p) = (p-q)(q-pii)$$
$$b = -pq(1-i^2) = -pq(1+i)(1-i) = -(q-qi)(p+pi)$$
$$= (q-qi)(pii-pi)$$
$$c = -i(p+qi)(p-qi) = (qi-p)(pi-q).$$

Die Angabe (S. 492) $c = (pi-p)\cdots$ statt $(qi-p)\cdots$ beruht auf einem Druckfehler.

Zu dem Artikel über Pythagoräische Dreiecke von Hrn. Worpitzky. (S. 256 d. vorigen J.)

Von demselben.

Als Seitenstück zu dem von Hrn. Worpitzky mitgeteilten Verfahren zur Bildung pythagoräischer Dreiecke kann dasjenige angesehen werden, welches H. Grassmann im 49. Bande des Grunertschen Archivs (1868) angab, und welches ich im dritten Bande meines Lehrbuches der element. Math. (S. 81) reproduziert habe.

Wählt man in der Formel

$$s_1 = \frac{\varrho^2 (s_2 + s_3)}{s_2 s_3 - \varrho^2}$$

die Gröfsen ϱ, s_2, s_3 beliebig rational, so ist zunächst s_1 rational, $a = s_2 + s_3$; $b = s_3 + s_1$; $c = s_1 + s_2$; $s = s_1 + s_2 + s_3$; $f^2 = s\varrho = s_1\varrho_1 = s_2\varrho_2 = s_3\varrho_3$, mithin auch ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, wie h_1, h_2, h_3 rational, ebenso $r = \frac{abc}{4f^2}$, [in der Darstellung durch die Worpitzkyschen Zahlen $r = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)(x^2 + y^2)$]. — Da hier $m_1 = \frac{2\sqrt{ss_1\,bc}}{b + c}$ zur Bestimmung der Halbierungslinie von α dienen mufs, so werden für diese Linien die Rationalitätsbedingungen weniger einfach ausfallen als bei Hrn. Worpitzky. — Die Ermittelung des Zusammenhanges beider Methoden sei dem Leser überlassen, desgl. die Beantwortung der Frage, welche Bedingungen hinzutreten müssen, damit auch die Mittellinien rational seien.

Zu dem Artikel: „Über eine fünfte Fundamental-Aufgabe der Trigonometrie", von Hrn. Obl. Meyer in Halle (XVII, 507).

Von demselben.

Die Aufgabe a, h_1, α möchte ich darum, weil sie Glied einer ausgedehnten, mit den nämlichen Mitteln lösbaren Gruppe von Aufgaben ist, noch nicht in die Reihe der Fundamental-Aufgaben gestellt sehen. Diese Aufgabe (und ähnlich die übrigen der Gruppe, welche in der systematisch zusammengestellten Aufgabensammlung zu Tl. III meines Lehrbuchs unter Nr. 290—311 zu finden sind) erledigt sich wohl am Einfachsten durch die aus

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s_1} = \frac{\varrho}{s - a}; \quad \frac{ah_1}{2} = f^2 = s\varrho$$

folgende Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{ah_1}{2s(s - a)},$$

welche s liefert. Aus s und a folgt $b + c$, womit die Aufgabe auf a, α, $b + c$ reduciert ist.

Sprech- und Diskussions-Saal.

Noch einmal (und hoffentlich das letzte Mal) die Frage: „Bestimmter oder unbestimmter Artikel"?

Drei Meinungsäufserungen.

I.

Von Prof. Rapp in Ulm.

Was den Gebrauch des unbestimmten Artikels in Ausdrücken wie: eine Senkrechte von einem Punkt auf eine Gerade fällen, durch 3 Punkte einen Kreis zu legen, sowie in andern nicht mathematischer Natur, z. B.: „er hat eine rote Nase", betrifft, so scheint mir Hr. Dr. Sanders*) nicht die richtige Erklärung dafür gegeben zu haben. Mein Sprachgefühl sagt mir, dafs im Satz: er hat eine rote Nase, das Beiwort „rot" so sehr an Wichtigkeit überwiegt, dafs im Bewufstsein des Deutschen mehrere Arten von Nasen (weifse etc.) sich einstellen, oder vielmehr, weil dies beim Deutschen der Fall ist, legt er auf „rote" den Nachdruck, wie es im Satze: „geben Sie mir ein blaues Tuch" auch der Fall ist. Nicht so im Französischen, wo das Adjektiv prädikativ hinter dem Substantiv steht.**) — Daher sagt man: *il a le nés rouge;* d. h. ein anderesmal kann diese selbe Nase weifs gewesen sein. Eben diese Anschauung liegt im deutschen Ausdruck vor: „ich fälle eine Senkrechte etc. etc." d. h. eine senkrechte und keine andere Art von Linie. Das Zeitwort „fällen" ist später eingeführt worden (früher sagte man „ziehen", was von jeder andern Linie gesagt werden kann), und hat hier nichts zu bedeuten. „Ich lege durch 3 Punkte einen Kreis", d. h. keine andere Linie, einen Kreis. Dafs man nur einen ziehen kann, stellt sich dem Bewufstsein nicht unmittelbar ein, geschweige denn die Möglichkeit verschiedener Lagen des Mittelpunkts je nach Lage der Punkte. Wenn ich mich kurz fassen darf, so verteidige ich hier den Gebrauch des unbestimmten Artikels, weil auf der qualitativen Bestimmung des Hauptworts — Senkrechte, (Kreis) schliefst diese kurz in sich — der Nachdruck liegt, wie im Satz: „er hat eine falsche Ansicht". Der, welcher sie hat, hat ja nur auch eine! Einen

*) Vergl. Jahrg. XVII, 435. D. Red.

**) Siehe Plötz, Schulgrammatik. 29. Aufl. (1885), S. 292. D. Red.

Beweis — er kann nur subjektiv sein — sehe ich darin, dafs man viel lieber sagt: „ich fälle von diesem Punkt das Lot auf die Gerade“, als „ich fälle ... die Senkrechte.“ In dem Wort „Senkrechte“ tritt die qualitative Bestimmung viel mehr zu tage als im Worte „Lot“. „Ich fälle die Senkrechte“ erweckt beinahe den Gedanken, als ob noch andere Linien zu fällen wären; viel eher auch: „ich ziehe die Senkrechte“ weil auch andere gezogen, nicht gefällt werden können. Aber „ich fälle eine Senkrechte“ ist voll berechtigt.

II.

Von Gymn.-Oberl. Dr. Wimmenauer in Moers (Rheinprovinz).

Auch mich befriedigt das Gutachten des Herrn Dr. Sanders nicht völlig; ich glaube nicht, dafs es richtig ist, zu sagen: sowohl das Eine, als auch das Andere ist berechtigt. Vielmehr glaube ich, dafs in gewissen Fällen nur das Eine, in andern nur das Andere richtig ist.

Wenn man die Aufgabe stellt, durch 3 gegebene Punkte „einen“ Kreis zu legen, so läfst man, indem man sich in die Zeit vor Lösung der Aufgabe versetzt, es mit Recht noch unbestimmt, wieviel Lösungen die Aufgabe habe; das ergiebt sich erst nachher, bei der auf die Lösung folgenden Determination und Diskussion. Hier heifst es also richtig: „eine“. Wenn man aber bei einer Konstruktion einen Kreis benutzt, so mufs man schon wissen, dafs resp. ob derselbe durch die vorhandenen Bestimmungsstücke eindeutig bestimmt ist; man wird also z. B. sagen müssen: „ich beschreibe den Kreis, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius $= r$ ist.

Man sollte stets den bestimmten Artikel gebrauchen, sofern nur ein Ding gemeint sein kann; den unbestimmten, sofern dies noch nicht entschieden ist, oder sofern zwischen mehreren die Wahl frei steht. Meist wird bei Beschreibung einer Konstruktion das Erstere, bei Formulierung einer Aufgabe das Letzere der Fall sein.

III.

Und dennoch der bestimmte Artikel oder Sturm hat doch Recht.

Vom Herausgeber.

Die Frage, ob in den Redeweisen des geometrischen Vortrags „von einem Punkte auf eine Gerade eine Winkelrechte*) fällen,

*) Wir wählen diesen noch wenig gebräuchlichen aber u. E. allein richtigen Ausdruck statt Senkrechte, Lot, Perpendikel, Normale. Die drei ersten sind der Geophysik entlehnt (vgl. Baltzer, Elem. S. 10. Anm.). Von der Berechtigung des Ausdrucks „Normale“, obgleich er von dem genannten Mathematiker eingeführt ist (Geom. § 2_2, S. 10) und sich durch Kürze empfiehlt, konnten wir uns bis jetzt nicht überzeugen (Norma = Winkelmafs, Norm, Regel). Man vergl. unsre „Vorschule d. Geom.“ S. 16. Anm. —

„in einem Punkte einer Geraden eine Winkelrechte errichten", „durch einen Punkt zu einer Geraden eine Parallele ziehen" und in ähnlichen Fällen der unbestimmte Artikel („eine" Winkelrechte, Parallele etc.) richtig und nicht vielmehr der bestimmte Artikel („die" Winkelrechte) zu setzen sei, hat (wie bereits in XVI, 435, Anmerk. mitgeteilt wurde) zuerst Sturm (gegenw. Prof. d. Mathem. in Münster) schon im Jahrg. I. ds. Z., S. 272 u. flg., also vor ca. 16 Jahren, aufgeworfen und dort sogleich zu Gunsten des bestimmten Artikels beantwortet. Der Gegenstand ist dann von anderen wiederholt besprochen worden, zuerst von Becker (II. Jahrg. S. 89). Auch der Herausgeber ds. Zts. hat immer auf Seite dieser Partei gestanden und hat die althergebrachte und eingerostete Schreibweise des unbestimmten Artikels als „Fehler" bezeichnet, zuletzt in der oben erwähnten Anmerkung (XVII_6, 435/6). Da sich jedoch auf unsere dortige Aufforderung einige, wenn auch nur wenige Stimmen (XVII_3, 433—35 Häbler, Fritsch, Sanders) gegen diese und ähnliche Auffaſsungen hören lieſsen, so hat dieser Widerspruch uns zu erneutem Nachdenken hierüber angeregt und dies hat in uns zuerst ebenfalls Zweifel an der Richtigkeit unserer früheren Ansicht erweckt. Ja, wir wurden förmlich irre an uns selbst, bis wir endlich zu unserer anfänglichen Ansicht im Bewuſstsein unseres Rechts zurückkehrten. Die Sache scheint uns am klarsten zu werden durch Gegensätze.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daſs hier diejenigen Fälle gar nicht in Betracht kommen, in denen entweder der Punkt oder die Gerade oder beide zugleich ihre Lage ändern. Im ersten Falle, bei veränderlicher Lage des Punktes, sind natürlich viele (unendlich viele) Winkelrechten möglich, ebenso im andern, nämlich bei fester Lage des Punktes und veränderlicher der Geraden; man denke nur an Winkelrechte zwischen Parallelen und die nach Tangentialpunkten gezogenen Radien eines Kreises. Dann müſste ja auch die Aufgabe lauten: Winkelrechte zu ziehen von (beliebigen) Punkten auf eine (feste) Gerade oder: von einem (festen) Punkte auf (beliebige) Gerade.

Die Aufgabe lautet aber gewönlich: „Eine Winkelrechte zu ziehen (fällen) von einem (gegebenen, festen) Punkte auf eine (gegebene, der Lage nach feste) Gerade."

Hier giebt es schlechterdings nur eine Winkelrechte und es ändert nichts an der Sache, daſs dieselbe als eine Doppellinie, gleichwie der Tangentialpunkt als Doppelpunkt, betrachtet werden kann. Kein Mathematiker, ja kein denkender Mensch, wird diese anschaulich evidente Wahrheit leugnen wollen; er müſste denn ein Wesen sein, das genau Bescheid weiſs im Raume von n Dimensionen oder dem Mannigfaltigkeitsraume und es müſste dort anders sein, als im dreidimensionalen Raume, in dem wir leben und unsere Schulmathematik sich bewegt. Wenn aber ein Ding nur einmal — so

zu sagen nur in einem Exemplar — da ist, oder gar wie hier, nur einmal da sein kann, dann ist der bestimmte Artikel eine logische Notwendigkeit. Zogen denn die Argonauten aus, um ein goldenes Vlies zu holen? Nein! Sie wollten das goldene Vlies holen. Oder, zieht etwa der Schachspieler einen König (eine Königin)? Ebenso wenig, er zieht den König, während er „einen" Läufer (Bauer, Thurm) verliert. Oder, schultert der Soldat „ein" Gewehr? Nein, er schultert „das Gewehr", nämlich das eine, welches er besitzt! Ebenso ist es mit der Winkelrechten. Man kann von einem festen Punkte O auf die der Lage nach feste Gerade MN nur die (d. h. die einzige mögliche) Winkelrechte OP (P Fufspunkt) ziehen. Man hat daher auch für dieses „Ziehen" den besonderen Ausdruck „fällen" gewählt, welcher allerdings, wie Senkrechte, Lot u. s. w. an einen geophysischen Vorgang erinnert (fällen = herabfallen lassen, senken). Sagt man denn — um noch einige analoge Fälle anzuführen — „ich ziehe von der Spitze C des Dreiecks ABC nach der Gegen- (oder Grund-) Seite eine Winkelhalbierende oder eine Mittellinie (Seitenhalbierende)? Nein, man sagt: „ich ziehe die Winkelhalbierende, die Mittellinie etc., weil es nur eine giebt.

Das Gesagte gilt genau ebenso von den anderen oben angeführten Redeweisen, also dafs man sagen mufs: „in einem Punkte u. s. w. die Winkelrechte errichten; die Parallele ziehen; den Kreis legen".

Dagegen kann (ja mufs) man sagen: von einem Punkte O nach einer Geraden MN eine (nicht die) Schräge ziehen, weil solcher Schrägen viele (unendlich viele) möglich sind, ja selbst unter bestimmtem Winkel zwei z. B. eine Schräge von 70^0 (d. h. die Gerade unter $\sphericalangle 70^0$ schneidende) kann man rechts- und linkswendig ziehen.

Es bleibt mir noch übrig die (auch von Hrn. Rapp im Vorstehenden beliebte) Vertheidigung des unbestimmten Artikels zu beleuchten, die sich auf den Nachdruck (die Hervorhebung durch Betonung) des zum Artikel gehörigen Hauptwortes gründet und welche bezweckt im Gedanken des Hörenden den Gegensatz hervorzurufen, zugleich aber bewirkt, dafs die Aufmerksamkeit vom zugehörigen Artikel abgelenkt wird, z. B.:

eine Winkelrechte ziehen;	Gegensatz:	nicht	eine	Schräge,
einen Kreis legen (ziehen);	„	„	„	Ellipse,
eine Parallele ziehen;	„	„	„	Geneigte.

Durch diese Betonung des Hauptworts wird der Artikel gewissermafsen tonlos, er wird als gleichgiltig behandelt, auf ihn kommt scheinbar nichts an und hier liegt daher unsers Erachtens die tiefgehende, so zu sagen psychologische, Wurzel des in Rede stehenden sprachlich-logischen Fehlers. Eben weil der Nachdruck auf dem Hauptworte liegt, so — meint man — ist es gleichgiltig,

ob man den bestimmten oder den unbestimmten Artikel setzt. Aber wird denn ein fehlerhafter Ausdruck — und dies ist doch der unbestimmte Artikel zweifellos, da er das Wesen oder das Wahre der Sache, nämlich die Einheit, um nicht zu sagen Einzigkeit, des Gegenstandes nicht trifft oder deckt — wird dieser fehlerhafte Ausdruck frage ich, dadurch richtig, dafs man ihn in der Rede nicht betont? Ja man sollte vielmehr meinen, dafs durch den bestimmten Artikel der Gegensatz um so schärfer hervortreten müfste, nämlich der Gegensatz zwischen der Mehrheit der Schrägen und der Einzigkeit der Winkelrechten.

Das Beispiel, welches Hr. Rapp aus dem Alltagsstil anführt, „er hat ein falsche Ansicht“ ist sehr bestechend; aber es gehört wenig Scharfsinn dazu, es zu entlarven und sein wahres Antlitz im Lichte zu zeigen. Falsche Ansichten kann es Hunderte geben und von diesen vielen hat er eben „eine“, gleichviel welche. Es wird doch niemand ernstlich meinen, es gäbe in allen Dingen nur eine und dieselbe falsche Ansicht und nur diese könne jemand (oder müfse jeder) haben. Hier ist also der unbestimmte Artikel an seinem Platze und das Beispiel beweist nichts gegen unsere obige Behauptung.

Man wird sonach künftig, will man korrekt schreiben und sprechen, sagen und schreiben müssen: „von einem (festen) Punkte O die Winkelrechte auf eine feste Gerade MN ziehen (fällen)“. Es bleibt also beim bestimmten Artikel und — Sturm hat doch Recht!

Wir wären nach diesen Auseinandersetzungen begierig, von echten Sprachgelehrten oder von sprachkundigen Mathematikern die tiefern Gründe zu vernehmen, welche der „allgemeine Sprachgebrauch“ der sonst immer als ein Tyrann geschildert wird, hier aber die Rolle eines Gelehrten spielen soll, für die Anwendung des unbestimmten Artikels vorzubringen hat. Es wäre seit Sturms Anregung (I, 272) auch reichlich Zeit gewesen, hierin „dem logischen Gedankengang der Sprache nachzuspüren“ (XVII_4, 434).

So sehr daher auch Hr. Häbler die Autoren bedauert, die sich von den Rezensenten „müfsen mafsregeln lassen“ (XVII, 434), so können wir uns doch diesem Bedauern nicht anschliefsen. Kein Gott kann sie aus dieser Not erretten, denn selbst die Götter können aus einer Winkelrechten nicht zwei machen. Was sind aber gegen die Götter die Franzosen, welche Hr. Sanders gegen uns ins Feld führt? (XVII, 435. *„d'une point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite“*). Wir haben vor der stilistischen Eleganz dieser begabten Nation gebührenden Respekt; sie aber in der logisch-grammatischen Korrektheit des Ausdrucks als mustergiltig hinzustellen, scheint uns sehr bedenklich. Denn ihre Neigung zur Veränderung und ihre Abneigung vor jener eisernen Beharrlichkeit, die einen Gegenstand bis in die verstecktesten Falten verfolgt und ihn zu erschöpfen sucht, hat uns immer wenig Vertrauen eingeflöfst.

Aber wozu eine so lange und umständliche Erörterung über eine so elementare Sache? — werden vielleicht manche geneigt sein zu fragen. Nun, daſs sie nicht unnötig war, beweist wohl hinreichend schon die Existenz des Fehlers, der eine so zähe Lebenskraft besitzt, daſs er trotz Sturms Feldzug gegen ihn noch nach 16 Jahren in Büchern, Zeitschriften und Lehrvorträgen grassiert und mit einer an Frechheit grenzenden Keckheit seine Legitimität zu behaupten wagt.

Aber noch aus einem allgemeineren Gesichtspunkte sind derartige Streifzüge in das Grenzgebiet der Mathematik, Logik und Grammatik von Zeit zu Zeit notwendig. Unsere Zeitschrift ist (s. Titel) u. A. auch bestimmt den Bildungsgehalt der Mathematik darzulegen. Die bildende Kraft dieser Wissenschaft greift aber an vielen Stellen unbestritten in das Gebiet der Sprache hinüber*); sie ist der Sprachbildung eine vorzügliche Stütze, ja oft eine weit gründlichere und strengere Lehrmeisterin als selbst die Grammatik. Der gewissenhafte und geschickte Mathematiklehrer, der nicht blos Zahlen- und Formelkrämer oder Figurenmaler ist, er ist ein nicht zu verachtender Bundesgenosse des Sprachlehrers, der leider seine Hilfe aus Unkenntnis meist wenig achtet oder gar verschmäht.**) Wir haben diese Seite unserer Wissenschaft sogar einmal vor einer Versammlung sprachgelehrter Schulmänner verteidigen und das im Sinken begriffene Banner derselben ergreifend wieder aufrichten müssen.***) Unsere Zeitschrift weist an verschiedenen und zahlreichen Stellen die Bemühungen auf, diese Seite der Mathematik hervorzuheben und zu pflegen. Möchten diese Bemühungen künftig mehr gewürdigt und unterstützt werden! —†)

---

*) Man sehe den Aufsatz von Oppel in ds. Z. I, S. 394 und 443. „Über den Einfluſs des math. Unterrichts auf sprachliche Bildung."

**) Das mögen sich diejenigen unter den Philologen merken, welche sich darüber wundern oder verwundert stellen, daſs wir mitunter in unserer Zeitschrift in das Gebiet der Sprache, besonders des logisch-grammatischen Teiles derselben, hinübergreifen und demgemäſs — wenn auch nur auf zwingende Veranlassung hin — Artikel über Sprachliches, das mit den von uns vertretenen Fächern, besonders der Mathematik, eng zusammenhängt, bringen. Zu ihnen gehört auch Hr. Aurelius Polzer in Horn (Niederösterreich), weshalb wir kurz auf den folgenden Artikel verweisen.

***) In der Schulmännerversammlung zu Bützow (Mecklenburg) 1878. Vergl. IX, 485.

†) Wir können hier nicht unterlassen unser Bedauern darüber auszudrücken, wie wenig Sorgfalt in gelehrten mathematischen Zeitschriften manche Autoren auf die sprachliche Darstellung ihrer Aufsätze verwenden. Wir könnten mehr als einen Artikel bezeichnen, der in Bezug auf Stilistik von einem strengen Zensor deutscher Primanerarbeiten sich harte Verurteilung müſste gefallen lassen, während man doch von einem Gelehrten nicht nur Reinheit, sondern auch Eleganz des Stils erwarten darf. Daſs es unter den gelehrten Artikeln auch bessere und bisweilen musterhaft stilisirte giebt, soll nicht unerwähnt bleiben.

Zur Verteidigung bezw. Entgegnung.

Mit Beziehung auf meine Artikel XVII_8, 565 und XVII_5, 345 u. f.

Vom Herausgeber.

I.

Von ein paar Lesern dieser Zeitschrift sind mir private briefliche Beurteilungen bezw. Entgegnungen auf meinen Artikel in XVII_8, 565 ff. „der Kardinalpunkt etc." zugegangen, von denen die eine wohlwollend, die andere dagegen schneidig ist. Diese freimütige Gegnerschaft ist mir im Allgemeinen nicht unangenehm, denn ich suche immer aus den Ansichten meiner Gegner zu lernen. Dagegen darf ich auch verlangen, dafs sie meine Arbeit aufmerksam durchlesen. Dies scheint aber nicht geschehen zu sein, denn sonst müfsten sie wissen, dafs ich in XVII_5, 565 gesagt habe:

> „Wir bemerken aber gleich hier, dafs wir uns auf reelle Gröfsen und bezüglich der Wurzeln auf Quadratwurzeln beschränken werden."

Wenn ich, gemäfs der Bestimmung meines Artikels für den Unterricht etwa einer Tertia und nach dem Grundsatze „vom Besondern zum Allgemeinen" („vom Einfachen zum Verwickelten etc.") auf die zweite Potenz mich beschränkte, wer hat ein Recht, mir das zu verbieten und zu verlangen: ich solle vom Allgemeinen also hier von der Gleichung $x^n = a$ ausgehen? Und wenn ich einen wichtigen Satz, den ich bei guten Autoren wie Wittstein und Helmes*) als Hauptsatz und nicht als Zusatz an richtiger Stelle gefunden, bei andern Autoren vermisse, ist es da nicht unbillig mir zuzumuten, dafs ich sie bei letztern an versteckten Plätzen, wo man sie nicht erwartet, suche?**) Wenn einer der Herren Gegner deswegen mit „drei Schulmathematikern" gesprochen hat und berichtet, dafs dieselben (zugleich mit Beziehung auf Heis § 48) „ihre Verwunderung ausgesprochen über die Verwirrung in einem so schlichten Falle, wie es die Gleichung $x^n = a$ ist," so antworte ich: ja, die Verwirrung (oder auch die Verirrung) ist da, weil man sie erst hineinträgt! In meinem Artikel ist mit keiner Silbe von der allgemeinen Gleichung $x^n = a$ die Rede. Diese Gleichung gehört zu den sogenannten höhern (s. Schlömilch, algebr. Analysis S. 351) und ihre allgemeine und vollständige Lösung erfordert die Kenntnis der Trigonometrie und der Richtungszahlen (Meyer El. d. Ar. § 125 ff.), die doch von einem Tertianer nicht verlangt

*) Helmes 2. Aufl. II. 2. Abt. S. 16. Nr. 5. Eine sehr ausführliche Behandlung der Wurzellehre findet man in Schurigs Lehrb. d. Arithm. Bd. II. § 69. Wurzellehre S. 288 u. 252 sub VIII.

**) Mehler, Hauptsätze 14. Aufl. (1886) § 139 (nicht 143) Aufl. d. Gl. $x^n = 1$. Meyer, Elem. etc. S. 92. Zusatz 2.

werden dürfen. Wenn ich für eine Real-Gymnasialprima (wo bekanntlich die Anforderungen noch höher sind, als im Gymnasium) geschrieben hätte, so würde sich — aber auch noch *„cum grano salis"* — diese Methode haben anwenden lassen. Was nützen aber einem Tertianer die sin und cos und die imaginären Zahlen, wenn er sie noch nicht kennt? Man mufs Gott danken, wenn er mit reellen Zahlen rechnen kann.

Die ganze Angelegenheit ist schon gar nicht mehr eine Frage der Wissenschaft, sondern eine Frage der Methodik und Didaktik. Der Grundsatz „vom Besondern zum Allgemeinen" wird von manchen (besonders jüngeren) Lehrern und in Lehrbüchern förmlich „über den Haufen gerannt." Sie möchten die halbe Universität in die Schule hineintragen und bedenken nicht, dafs sie damit der Mathematik als Lehrgegenstand einen empfindlichen Stofs versetzen. Denn es entwickelt sich daraus naturgemäfs bei Schülern eine Abneigung gegen das Fach und den Überbürdungsklagen fliefst reichliche Nahrung zu. Die bereits hie und da laut gewordenen Forderungen nach Einschränkung der Mathematik scheinen hier ihre Quelle zu haben. Das vornehme „in allgemeinster Weise" schickt sich wohl für die „Annalen", die von Gelehrten geschrieben und gelesen werden, nicht aber für die Schule. Ich behaupte: jedes Lehrbuch der Mathematik für Schulen, das nicht „vom Besonderen zum Allgemeinen" geht, sondern umgekehrt, verfehlt seinen Zweck und verdient nicht eingeführt, oder, wenn es bereits eingeführt ist, wieder hinausgeführt zu werden. Ebenso ist jeder Lehrvortrag zu verurteilen, der den Schülern durch den Gang vom Allgemeinen zum Besonderen und vom Abstrakten zum Konkreten (Anschaulichen) den Eintritt in unsere Wissenschaft erschwert, den Fortschritt hemmt, und die Lust und Freude an der Erkenntnis und am Gelingen raubt. Wenn der Schüler an der Hand des Lehrers den Gipfel des Allgemeinen und des Abstrakten erklommen hat, so mag er nur getrost allein herabsteigen zum Besondern und Anschaulichen. Er wird schon den Weg selbst finden. Aber hinauf soll er bedächtig geleitet und nicht mit verbundenen Augen im Luftballon oder so zu sagen „mit einem Ruck" auf diesen Gipfel gesetzt werden! Das in vielen neuern mathematischen Schriften und in Lehrvorträgen hervortretende Hinaufschrauben der Geister auf das Abstrakte, das mit einer Verflüchtigung der Begriffe Hand in Hand geht, ist für den Unterricht eine höchst bedenkliche Erscheinung.

Der Brief des andern Herrn, der übrigens in einem unqualifizierbaren Tone verfafst ist, ist mir so unklar und unverständlich, dafs erst Zeile für Zeile und Wort für Wort eine Verständigung nötig wäre, wenn ich mich auf einen Meinungsaustausch einlassen sollte. Er gipfelt in dem Schlufssatze: „Ihre Arbeit gewinnt dadurch einen gewissen Wert, dafs sie zeigt, wie grofs die Verwirrung sein kann, die in den Köpfen von Lehrern und Schülern der Mathematik

dann entsteht, wenn dieselben eine der merkwürdigen Festsetzungen des Herrn Bardey für zulässig halten.“ Der geehrte Herr kann diese merkwürdige d. h. des Merkens werte (vgl. m. A. XVII, 565) arithmetische Wahrheit auch lesen in der sehr schätzbaren El.-Arithmetik von Helmes (2. Aufl. I, 2. Abt. S. 16) wo es heifst: „Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl kann sowohl mit dem Vorzeichen + als — genommen werden; $\sqrt{9} = \pm 3$, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, allgemein $\sqrt[2n]{(a^{2n})} = \pm a$; es sei denn, dafs durch die bestimmte Angabe, ob der Radikand durch Potenzierung einer positiven oder negativen Basis entstanden ist, die Wahl des Vorzeichens der Wurzel d. h. dieser Basis, eben so bestimmt vorgeschrieben ist*);

$$\sqrt[2n]{(+a^{2n})} = +a; \quad \sqrt[2n]{(-a)^{2n})} = -a \quad \sqrt[2n]{(\pm)^{2n}} = \pm 1$$

(Vgl. m. Art. S. 571). Wer diese Sätze leugnet, mufs auch jene aus der Potenzlehre leugnen, auf denen ihr Beweis beruht. (S. Helmes, a. a. O. § 320). Kann denn ein nur elementar-mathematisch Gebildeter — er braucht noch gar nicht „Mathematiker“ zu sein — mit noch gesundem Verstande anders schliefsen als so: Wenn ich (-7) ins Quadrat erhebe, so kommt $(-7)\cdot(-7) = (-7)^2 = +49$. Wenn ich nun von dieser, aus der Wurzel (-7) entstandenen Quadratzahl $+49$ zu eben jener Wurzel zurückgehen soll, so mufs ich doch notwendig wieder auf (-7) kommen! Kann es denn etwas Natürlicheres und Evidenteres geben? Wer erlaubt mir denn, oder was zwingt mich, auf $+7$ zu kommen? Das wäre ähnlich, wie in dem von mir (XVII, 566) gebrauchten Gleichnisse vom Zwillingsstrome: wenn z. B. ein Schiffer, auf der Fulda in die Weser herabgekommen, seinen Abfahrtsort wieder aufsuchen sollte, und er nun statt in die Fulda in die Werra einführe!

So weit ist es also in der (Elementar-)Mathematik gekommen, dafs man die einfachsten, einleuchtendsten (evidentesten) Dinge zu verwirren sucht!**)

---

*) Ähnlich ist dies ausgedrückt in der „Buchstabenrechnung und Algebra“ von Feaux, dessen neue (8.) von Luke in Deutsch-Krone bearbeitete Auflage uns so eben noch zugeht. Dort steht S. 104, Anm. 6: „Es ist aber wohl festzuhalten, dafs die Zweideutigkeit paarzähliger Wurzeln aufhört, sobald man die Entstehungsweise des Radikanden kennt. So ist z. B. $\sqrt{(-a)^2} = -a$, denn allein $-a$ hat die Eigenschaft, ins Quadrat erhoben, unter der Form $(-a)^2$ erscheinen zu können. Ebenso ist $\sqrt[4]{(+5)^4} = +5$, $\sqrt[6]{(-1)^6} = -1$ u. s. w.“

**) Der geehrte Herr Gegner beruft sich dann noch auf „den alten Cauchy“. Aber dieser geht auf unsere Erörterung gar nicht ein. Cauchy sagt nur (s. Cauchy, algebr. Analysis, deutsch von Itzigsohn Berlin 85): „Oft erhält man als Ergebnis einer mit einer Zahlgröfse vorgenommenen Operation mehrere verschiedene Werte. Wollen wir nicht von diesen Werten einen durch die Bezeichnung hervorheben, so werden wir dies durch Doppelzeichen oder durch Doppelklammern andeuten, während wir die gewöhnliche Bezeichnung für den einfachsten oder den uns

II.

Auf meinen Artikel in XVII_5, 345 *„Ne quid nimis"* oder *„festina lente"*, „ein Mahnruf an die deutschen Sprachreiniger" ist in der Zeitschrift des allgemeinen deutschen Sprachvereins Nr. 8*) unter dem Titel „Meinungsverschiedenheiten der Herren Beer und Hoffmann; zur sachlichen Aufklärung" von einem österr. Gymnasiallehrer Herrn Aurelius Polzer in Horn (Nieder-Österr.) eine Erwiderung erschienen, auf welche ich die Leser d. Ztschr. aufmerksam mache, da sie mit dem Anspruch auf „sachliche Aufklärung" auftritt, in diesem Anspruch mir aber zu kühn erscheint. Die Erwiderung bespricht nacheinander die Ausdrücke: Artikel, Kontroverse, Repertorium, Zeitung und Zeitschrift, Referat, Diskussion, Debatte, Thema, Manuskript, Titel, radikal, kommunizierende Gefäfse. Diese Besprechung hat aber, so sehr ich auch Verbesserungsvorschlägen zugänglich bin, meine früheren Ansichten nicht erschüttert.**) Ich gehe daher auf die einzelnen Bemerkungen auch nicht näher ein, vielmehr fühle ich mich zur Wiederholung der Aufforderung, die ich schon in einem früheren Bande d. Ztschr. bei anderer Gelegenheit an meine Gegner gerichtet habe, veranlafst: man möge mich doch mit schärferen Waffen bekämpfen und nicht mit so stumpfen und verrosteten, die gleich beim ersten Gegenhieb in Splitter zerstieben würden.

Auf zwei Bemerkungen mufs ich aber doch antworten, weil die eine einen ungerechtfertigten Vorwurf enthält, die andere eine auffallende Unkenntnis der Bestimmung unserer Zeitschrift verräth.

---

wichtiger erscheinenden Wert vorbehalten werden. So hat z. B., wenn a eine positive Zahlgröfse ist, die Quadratwurzel aus dieser Zahlgröfse zwei numerisch gleiche aber durch das Vorzeichen von einander verschiedene Werte; irgend einen dieser beiden Werte drückt man durch die Bezeichnung

$$((a))^{\frac{1}{2}} \text{ oder } W\overline{a}$$

aus, während der positive Wert allein durch $a^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{a}$ dargestellt wird, so dafs man also hat:

$$W\overline{a} = \pm\sqrt{a} \text{ oder was auf dasselbe hinausläuft } ((a))^{\frac{1}{2}} = \pm a^{\frac{1}{2}}$$

(s. Cours d'Analyse 1821. T. I, S. 7).

Cauchy geht also auf den in Rede stehenden möglichen Fall, in welchem der Radikand, als Quadrat aufgefafst, oder auch in der Form eines wirklichen Quadrats, von einer negativen Zahl (Wurzel) herstammt, z. B. $\sqrt{49} = \sqrt{(-7)^2} = -7$, gar nicht ein, sondern will nur seine (jetzt nicht mehr gebräuchliche) Bezeichnung erläutern.

*) Die Nummer d. Ztschr. wurde uns von Leipzig aus zugesandt, wahrscheinlich auf Veranlassung des Herrn P. durch Herrn Dr. Beer.

**) Nur zwei Vorschläge finde ich annehmbar: „Berichter" für das lange „Berichterstatter" und „Satzvorlage" für „Manuskript", wohlgemerkt — wenn es gedruckt wird. (Allenfalls auch noch „Zwillingsgefäfse" für „kommunizierende" Gefäfse).

Erstens: Herr P. sagt am Schlusse seiner Erwiderung:

„Nur mag uns die Bemerkung gestattet sein, dafs durch Witzeleien, wie er (der Herausgeber) dieselbe einige male in der Klammer giebt, die gute Sache am ehesten lächerlich gemacht werden kann."

Hierauf mufs ich bemerken, dafs ich mir nicht bewufst bin, in meinem Artikel die „Sache lächerlich gemacht" zu haben und auch die „Witzeleien in Klammer" nicht finden kann.*) Vielmehr war mir die Sache zu ernst dazu; ich war angegriffen und mufste mich ernstlich verteidigen. Sollte aber dennoch in meinem Artikel irgendwo ein leiser Anflug von Humor und Spott gefunden werden, ich also den Angriff humoristisch behandelt haben, so dürfte ja der Philologe Herr P. aus der Rhetorik wissen, dafs Humor, Ironie, ja selbst Spott und Satire, in Reden und wissenschaftlichen Kämpfen erlaubte Mittel sind, falls sie nur nicht beleidigen. Die gröfsten Redner und Schriftsteller (Lessing!) haben sich dieser Mittel bedient und in den grofsen Parlamenten werden dieselben ausgiebig angewendet.

Wenn ferner Herr P. den Vergleich mit den Bilderstürmern und also den Vorwurf der Übertreibung („über das Ziel hinausschiefsen") im Namen des Vereins zurückweisen zu müssen glaubt, so übersieht er, dafs ich in meinem Artikel S. 350/1 darauf hingewiesen habe, dafs selbst der Herausgeber d. Z. d. a. d. S.-V. (H. R.) wegen der Worte „Nation" und „national" sich verteidigen mufste. Ich darf wohl hinzufügen, dafs auch von andrer hochachtbarer Seite, vom Universitätskanzler Rümelin in Tübingen, scharfer Widerspruch gegen die übertriebenen Bestrebungen des Vereins erhoben worden ist;**) freilich wird dafür in demselben Hefte dem Herrn Rümelin wegen seiner Festrede „über die Berechtigung der Fremdwörter" von H. R. tüchtig der Text gelesen, ob mit Recht oder Unrecht, bleibe dahingestellt.

Zweitens: S. 124 d. a. Ztschr. macht Herr Polzer zu meinen Erörterungen über den Ausdruck „Artikel" (XVII, 348) die Bemerkung:

Ein „Artikel" wäre demnach immer ein Teil eines innerlich zusammengehörigen Ganzen! Da wollen wir doch Herrn Hoffmann sogleich in seinem eignen Hause schlagen: inwiefern hängt denn sein „Artikel" „„Ein Mahnruf an die deutschen Sprach-

*) In den Worten „mit dem Fluche der Lächerlichkeit beladen" sind nur die Worte des Prof. Handl-Czernowitz (XVII, 266) wiedergegeben. Und wenn ich S. 347 zu „Verdeutschungen" in Parenthese setze: „schönklingendes Wort", so ist das zwar eine ironische Bemerkung, aber eine „im Ernst" gemachte.

**) Auch von einem hochachtbaren Mitarbeiter a. u. Ztschr. ist mir eine Zustimmung zu meinem Artikel geworden, die meine Entgegnung als noch sehr glimpflich bezeichnet.

reiniger"" mit dem übrigen Inhalte seiner Zeitschrift für **mathematischen** und **naturwissenschaftlichen** Unterricht zusammen?

Hierauf habe ich zu bemerken: Abgesehen davon, dafs dieser Artikel durch einen m. E. ungerechtfertigten Angriff in jener Ztschr. herausgefordert (provoziert) worden war, erlaubt sich Herr P. in meine Definition von „Artikel" die Worte „innerlich zusammengehörigen Ganzen", die ich gar nicht brauche, einzuschmuggeln und hiermit — ist Herr P. gerichtet.**)

Die Hauptsache jedoch ist: aus dieser seiner Bemerkung geht hervor, dafs Herr P. keine Ahnung hat von dem engen Zusammenhange unserer Wissenschaft mit dem logisch-grammatischen Teile der Sprachlehre, besonders aber von der Einwirkung des mathematischen Unterrichts auf den sprachlichen und von der Wechselwirkung zwischen beiden. Es sei ihm daher der nächstvorhergehende Artikel dieses Hefts (besonders S. 118) zum eingehenden Studium empfohlen. Mit dem „Geschlagensein im eignen Hause" hat es also noch gute Wege.

Endlich möchte ich der obigen Frage des Herrn A. P. die andere entgegenstellen: warum wählt sich denn d. a. d. Sprachverein durch zwei seiner Vertreter Herrn Dr. Beer-Leipzig und A. Polzer-Horn gerade die Zeitschrift für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht zum Gegenstande seiner Kritik und nicht vielmehr eine ihm viel näher liegende und gewifs auch kritikbedürftige aus der Zahl der vielen philologisch-geschichtlichen? zumal da unsere Zeitschrift gerade der sprachlichen Seite der von ihr vertretenen Lehrfächer volle Aufmerksamkeit zuwendet? —

---

*) Nennt man denn die einzelnen alphabetisch geordneten Aufsätze eines Konversationslexikons, die innerlich meist zusammenhängen, wie Tag und Nacht, nicht auch „Artikel"?

Zum Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Prof. Dr. LIEBER-Stettin und C. MÜSEBECK-Waren.

A. Auflösungen.

606 u. 607. Sätze über den Brocard'schen Kreis. (Gestellt von Stoll XVII_6, 365.)

606. a) Wenn A_1', B_1', C_1' die Winkelgegenpunkte der auf dem Brocard'schen Kreise liegenden Punkte A', B', C' bezeichnen, so sind die Dreiecke $A'B'C'$ und $A_1'B_1'C_1'$ projektivisch (vergl. Nr. 356 XV, 354); ihr Projektionscentrum ist der Schnittpunkt von SS' und HH'. b) Der Schnittpunkt von BC' und $B'C$ ist der Winkelgegenpunkt von A_1' und A'.

1. Beweis. Das Projektionscentrum von $A'B'C'$ und $A_1'B_1'C_1'$ ist der Schnittpunkt von HH' und DD' (Nr. 356). Da aber HH', DD' und SS' sich in Z schneiden, so ist dieser Punkt das Projektionscentrum.

FUHRMANN (Königsberg i. Pr.).

2. Beweis. Da die Determinante aus den Koordinaten von A' und A_1' und des Schnittpunktes J von SS' und HH' verschwindet, müssen A', A_1' und J in einer geraden Linie liegen. Aus den Gleichungen für $B'C$ und BC' ergeben sich die Koordinaten ihres Schnittpunktes, woraus der zweite Satz folgt.

EMMERICH (Mühlheim a. d. Ruhr). STOLL (Bensheim).

607. Der Sinus des Winkels DHK ist gleich

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\vartheta}{(1-4\sin\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1. Beweis. Bezeichnen wir den Inhalt des Dreiecks KHD, welches $= KHH'$ ist, da $HK \parallel DH'$, mit $\triangle$, so sind die Koordinaten von H, K und H' bezogen auf ein rechtwinkliges System, dessen Achsen BC und die Mittelsenkrechte HH_a sind, resp. 0, $r\cos\alpha$; $\frac{r\sin\alpha^2\sin(\beta-\gamma)}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$, $r\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r\sin\alpha^2\sin\beta\sin\gamma}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$; $r\sin(\beta-\gamma)$, $2r\cos\beta\cos\gamma$; also

$$2\triangle = \pm\frac{r^2\sin(\beta-\gamma)}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & 1 \\ \sin\alpha^2 & \sin\alpha^2\sin\beta\sin\gamma & 1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ 1 & 2\cos\beta\cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

Löst man die Determinante auf, so geht sie nach einigen Transformationen über in $\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\beta)$, so daſs

$$2\triangle = \pm \frac{2r^2 \sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \operatorname{tg}\vartheta.$$

Nun ist

$$2\triangle = HD\cdot HK \sin DHK = r(1-4\sin\vartheta^2)\frac{r\sqrt{1-4\sin\vartheta^2}}{\cos\vartheta}\sin DHK,$$

so daſs $\sin DHK = \pm \frac{\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\vartheta}{(1-4\sin\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}$

wird. FUHRMANN.

2. Beweis. Aus den Senkrechten von D auf die Seiten des Dreiecks ABC und der Gleichung von HK läſst sich mit Hülfe von Salmon Anal. Geom. d. Kegelschn. Art. 61 Seite 69 (3. Aufl.) die Senkrechte von D auf HK bestimmen; und der Wert für diese Senkrechte geht nach mehreren Transformationen über in

$$\frac{r\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1-4\sin\vartheta^2}}.$$

Da nun $HD = r(1-4\sin\vartheta^2)$ ist, so folgt hieraus leicht die Behauptung. EMMERICH. STOLL.

608. (Gestellt von Meyer XVII$_5$, 365.) Welches ist der geometrische Ort eines Punktes, für welchen als Inversionscentrum zwei gegebene Kreise in gleich groſse Kreise invertiert werden?

Auflösung. Der Mittelpunkt des gröſseren Kreises sei K_1, der des kleineren K_2, ihre Radien seien r_1 und r_2 und es sei $K_1K_2 = c$. Ist P einer der zu suchenden Punkte, so setze man $PK_1 = e_1$, $PK_2 = e_2$. Führt man die Inversion der beiden Kreise K_1 und K_2 in Bezug auf P als Inversionscentrum aus, so ist der Durchmesser des aus K_1 erhaltenen Kreises $\frac{1}{e_1-r_1}-\frac{1}{e_1+r_1}=\frac{2r_1}{e_1^2-r_1^2}$ und der Durchmesser des aus K_2 erhaltenen Kreises $\frac{2r_2}{e_2^2-r_2^2}$. Es muſs also $\frac{r_1^2}{e_1^2-r_1^2}=\frac{r_2^2}{e_2^2-r_2^2}$ sein. Nimmt man nun K_1 als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und K_1K_2 zur positiven X-Achse, so ist $e_1^2 = x^2+y^2$, $e_2^2=(c-x)^2+y^2$ und man erhält, wenn man diese Werte oben einsetzt, $x^2+y^2-\frac{2r_1c}{r_1-r_2}x + \frac{r_1(c^2+r_1r_2)}{r_1-r_2}=0$. Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt und die Abscisse $\frac{r_1c}{r_1-r_2}$ hat. Der Mittelpunkt ist also der äuſsere Ähnlichkeitspunkt der Kreise K_1 und K_2. Der Radius des Kreises ist $r=\sqrt{t_1t_2}$, wo t_1 und t_2 die von dem Ähnlichkeitspunkt an K_1 und K_2 gezogenen Tangenten sind.

Vergleiche Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie. § 28, S. 173. Fuhrmann, Einleitung in die neuere Geometrie. S. 60, Aufg. 78. Lieber und v. Lühmann, Geometrische Konstr. Aufg. § 96.

EMMERICH. FUHRMANN. KOBER (Schollwitz). MEYER (Halle a. S.) SCHMIDT (Spremberg). STEGEMANN (Prenzlau). STOLL. THIEME (Posen). WEINMEISTER (Tharand).

609. (Gestellt von Kober XVII_5, 365). Die Schnittpunkte A und B eines Kreises (Mittelpunkt O und Radius r) und einer Geraden sind mit einem dritten Punkte C des Kreises verbunden. Dreht man die Sekante um irgend einen ihrer Punkte, z. B. P, welcher durch $PO = d$ gegeben ist, so durchläuft bekanntlich das Paar der Verbindungssehnen eine Strahleninvolution. Welchen Wert hat die Potenz dieser Involution?

Auflösung. PO treffe den Kreis in M und N. Dann ist
$$\operatorname{tg} MCA \cdot \operatorname{tg} MCB = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{BM}{BN} = \frac{PM}{PB} \cdot \frac{PB}{BN} = \frac{PM}{PN} = \frac{d-r}{d+r} = c.$$

BÜCKING (Colmar). EMMERICH. FUHRMANN. KOBER. SPORER (Weingarten) STOLL.

Determination. Die Strahleninvolution ist hyperbolisch oder elliptisch ($c \gtrless 0$), je nachdem der Drehpunkt aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt ($d - r \gtrless 0$); insbesondere gleichseitig-hyperbolisch ($c = +1$), wenn der Drehpunkt unendlich entfernt ist ($d = \infty$); rechtwinklig-elliptisch ($c = -1$), wenn der Drehpunkt mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfällt ($d = 0$); parabolisch ($c = 0$), wenn der Drehpunkt ein Punkt des Kreises selbst ist ($d - r = 0$).

EMMERICH. KOBER.

610. (Gestellt von Kober XVII_5, 366.) Beschreibt man über den Diagonalen AC und BD eines Trapezes $ABCD$ als Durchmesser zwei Kreise, so geht ihre Potenzlinie durch den Schnittpunkt E der nicht parallelen Seiten AD und BC.

1. Beweis. Der Kreis über AC treffe AE noch in L und der über BD treffe BE noch in H. Da $\sphericalangle CLD = DHC = 90^0$, so ist LH antiparallel zu DC, folglich auch zu AB; mithin ist $ABHL$ ein Sehnenviereck, also $EL \cdot EA = EH \cdot EB$, so dafs E ein Punkt der Potenzlinie beider Kreise ist.

ADAMI (Bayreuth). BEYENS (Cadiz). BÜCKING. EMMERICH. HELM (Liegnitz). SCHMIDT. SPORER. STEGEMANN.

2. Beweis. F und G seien die Mittelpunkte von resp. AC und BD. Dann ist $EF^2 = \frac{1}{2}(EA^2 + EC^2) - \frac{1}{4}AC^2$ und $EG^2 = \frac{1}{2}(EB^2 + ED^2) - \frac{1}{4}BD^2$ oder $EF^2 - \frac{1}{4}AC^2 = \frac{1}{2}(EA^2 + EC^2 - AC^2)$ und $EG^2 - \frac{1}{4}BD^2 = \frac{1}{2}(EB^2 + ED^2 - BD^2)$ (1). Die linken Seiten dieser beiden Gleichungen sind die Potenzen von E in Bezug auf die beiden Kreise. Nun ist $\frac{1}{2}(EA^2 + EC^2 - AC^2) = EA \cdot EC \cos DEC$

und $\frac{1}{2}(EB^2 + ED^2 - BD^2) = EB \cdot ED \cos DEC$. Da aber $EA \cdot EC = EB \cdot ED$, so sind die rechten Seiten der letzten Gleichungen einander gleich, mithin auch ihre linken, und daher auch die linken Seiten der Gleichungen (1); d. h. Punkt E hat in Bezug auf beide Kreise gleiche Potenzen, ist also ein Punkt der Potenzlinie. Da die Potenzlinie auf der Centrale FG senkrecht steht und $FG \parallel AB$ ist, so steht auch die Potenzlinie auf den parallelen Trapezseiten senkrecht.

FUHRMANN. HELM. HODUM (Stassfurt). SIEVERS (Frankenberg i. S.).

3. Beweis. Der Satz ist eine Folge des Bodenmiller'schen Satzes (unter anderen bewiesen bei Stoll, Anfangsgründe der neueren Geometrie, Bensheim 1872, S. 88): „Die drei über den Diagonalen eines vollständigen Vierseits beschriebenen Kreise haben dieselbe Potenzlinie.“ Die dritte Diagonale ist hier die Parallele zu den parallelen Trapezseiten und unendlich lang; der Kreis geht deshalb in eine Gerade über, welche durch den Schnittpunkt der nicht parallelen Trapezseiten geht und senkrecht zu jener Parallele steht. Diese Gerade ist dann aber die Potenzlinie der beiden Kreise.

FUHRMANN. KOBER. STOLL.

Analytisch mit Hülfe der Koordinaten-Methode bewiesen von v. Jettmar (Wien).

Zusatz. Auch folgender Satz ergiebt sich leicht: Beschreibt man über den nicht parallelen Trapezseiten als Durchmesser Kreise, so geht ihre Potenzlinie durch den Schnittpunkt der Diagonalen.

von JETTMAR.

611. (Gestellt von Ackermann XVII_5, 366.) Konstruiert man in den beiden Endpunkten A und B einer Kreissehne AB Tangenten, die sich in M schneiden, macht dann im gröfseren Segment Sehne $BC = \frac{1}{2} AB$, so halbiert MC den Bogen ABC.

1. Beweis. D sei der Mittelpunkt von AB, CD treffe den Kreis in F und CM in E. Dann ist CM Gegenmittellinie des Dreiecks ABC und daher $\sphericalangle BCE = ACF$, also Bogen $BE = AF$ und $EF \parallel AB$. Da $\sphericalangle BCD = ACE$, so ist $\triangle CBD \sim CEA$. Da nun $CB = BD$, so ist auch $CE = EA$.

BÜCKING. HELM. IDE (Cassel). SCHMIDT. STEGEMANN. WEIDENMÜLLER (Marburg i. H.)

2. Beweis. $\triangle MAE \sim MCA$, also $EA : AC = ME : MA$ und $\triangle MBE \sim MCB$, also $BE : CB = ME : MA$; mithin $EA \cdot CB = EB \cdot CA$. Nach Ptolemäus ist $AB \cdot CE = EA \cdot CB + EB \cdot CA$ oder $2CB \cdot CE = 2EA \cdot CB$, also $CE = EA$.

EMMERICH. LIEBETRUTH (Zerbst).

3. Beweis. Der Mittelpunkt des Kreises werde mit O, sein Radius mit r, $\sphericalangle AOB$ mit 2φ und $\sphericalangle BOC$ mit 2ψ bezeichnet. Dann ist $ME \cdot MC = MA^2$ und $MC^2 = MA^2 + AC^2 - 2MA \cdot AC \cos(\varphi + \psi)$,

mithin $\frac{ME}{MC} = \frac{MA^2}{MA^2 + AC^2 - 2MA \cdot AC \cos(\varphi + \psi)}$, also $\frac{ME}{EC}$
$= \frac{MA^2}{AC^2 - 2MA \cdot AC \cos(\varphi + \psi)}$. Da nun $AC = 2r \sin(\varphi + \psi)$; $MA = r \operatorname{tg} \varphi$ und $2BC = BA$, also $2 \sin \psi = \sin \varphi$ ist, so ist

$$\frac{ME}{EC} = \frac{\operatorname{tg} \varphi^2}{4 \sin(\varphi + \psi)^2 - 2 \operatorname{tg} \varphi \sin(2\varphi + 2\psi)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \varphi^2}{2(1 - \cos(2\varphi + 2\psi) - \operatorname{tg} \varphi \sin(2\varphi + 2\psi))} = \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{2(\cos \varphi - \cos(\varphi + 2\psi))}$$

$= \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{4 \sin(\varphi + \psi) \sin \psi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \sin(\varphi + \psi)} = \frac{MA}{AC}$. Daher halbiert AE den Winkel MAC, und da MA Tangente ist, auch den Bogen ABC.

FUHRMANN. IDE. SCHMIDT. SIEVERS. STOLL. WEIDENMÜLLER.

Anmerkung. Der Satz gilt auch, wenn man BC in dem kleineren Segment gleich $\frac{1}{2} AB$ macht. IDE. STEGEMANN.

612. (Gestellt von Fuhrmann XVII$_5$, 366.) Ein Punkt P und ein gleichseitiges Dreieck ABC liegen in derselben Ebene; man soll die Seite x des Dreiecks aus den Entfernungen $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$ berechnen.

1. Auflösung. Wird $\sphericalangle BPC$ mit α, $\sphericalangle CPA$ mit β, $\sphericalangle APB$ mit γ bezeichnet, so ist $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - x^2}{2bc}$, $\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - x^2}{2ca}$, $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}$. Da $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$, so ist $\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Werden in diese Formel die vorher gefundenen Werte eingesetzt, so ergiebt sich

$$(b^2 + c^2 - x^2)^2 a^2 + (c^2 + a^2 - x^2)^2 b^2 + (a^2 + b^2 - x^2)^2 c^2$$
$$= 4a^2b^2c^2 + (b^2 + c^2 - x^2)(c^2 + a^2 - x^2)(a^2 + b^2 - x^2)$$

und hieraus

$$x^4 - x^2(a^2 + b^2 + c^2) + (a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2) = 0,$$

also $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm 4\sqrt{3}\,\Delta}{2}$, wo Δ den Inhalt eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c bezeichnet. Setzt man noch $\frac{4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2} = \operatorname{tg} \vartheta$, wo ϑ der Brocard'sche Winkel ist, so wird $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}(1 \pm \sqrt{3} \operatorname{tg} \vartheta)$
$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\cos(60^0 \pm \vartheta)}{\cos \vartheta}$.

BERMANN (Liegnitz). EMMERICH. FUHRMANN. SCHMIDT. HODUM. LENGAUER (München). NIESTRO (Zara.) SIEVERS. STOLL.

2. Auflösung. Man drehe AP um 60^0 in die Lage AP_1, so dafs $\Delta\, APP_1$ gleichseitig ist; dann ist $P_1B = c$, und da $PB = b$ ist, so ist BPP_1 ein Dreieck mit den Seiten a, b, c; sein In-

halt sei wie vorher Δ. Bezeichnet man $\sphericalangle BP_1P$ mit φ, so ist $x^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\varphi \pm 60^0)$. Da $\sin\varphi = \frac{2\Delta}{ac}$ und $\cos\varphi = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, so ist $\cos(\varphi \pm 60^0) = \cos\varphi\cos 60^0 \mp \sin\varphi\sin 60^0 = \frac{1}{2}\cos\varphi \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi = \frac{a^2+c^2-b^2}{4ac} \mp \frac{2\sqrt{3}\,\Delta}{2ac}$; mithin

$$x^2 = a^2 + c^2 - 2ac\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{4ac} \mp \frac{\Delta\sqrt{3}}{ac}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm 4\sqrt{3}\,\Delta}{2}.$$

von Fischer-Benzon (Kiel).

Hiermit ist zugleich eine geometrische Lösung der Aufgabe gegeben. Sporer führt die Lösung auf folgenden Satz zurück, der einfach zu beweisen ist: „Sind A, B, C die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, so ist der Ort des Punktes P, für welchen $PA^4 + PB^4 + PC^4 = \text{const.}$ ist, stets ein Kreis."

Durch geometrische Konstruktion gelöst von Beyens.

613. (Gestellt von Emmerich XVII$_5$, 366.) Die allgemeine Formel desjenigen einfachen Kettenbruches anzugeben, unter dessen Näherungswerten sich drei aufeinander folgende befinden, a) deren Zähler, b) deren Nenner in arithmetischer Progression wachsen.

Auflösung. Mit a_i werde der $i$te Partialnenner, mit z_i der Zähler, mit n_i der Nenner des $i$ten Näherungswertes bezeichnet.

a) Die Zähler des $i$ten, des $(i+1)$ten und des $(i+2)$ten Näherungswertes bilden eine arithmetische Reihe, deren Anfangsglied m und deren Differenz d sei. Aus der Rekursionsformel $z_{i+2} = z_{i+1} + z_i$ (z) folgt: $m + 2d = (m+d)a_{i+2} + m$ oder $2d = (m+d)a_{i+2}$. Da a_{i+2}, m, d absolute, von 0 verschiedene ganze Zahlen sind, so mufs zufolge der letzten Gleichung $a_{i+2} = 1$, also $d = m$ sein. Mithin ist m ein Mafs von z_i, z_{i+1}, z_{i+2}. Erniedrigt man in (z) die Indices successive um $1, 2, \ldots i-1$, so erkennt man leicht, dafs die Zähler sämtlicher Näherungswerte, welche dem $i$ten vorangehen, ebenfalls das Mafs m haben. Da aber $z_1 = 1$, so findet man $m = 1$ und $i = 1$. Da nun $z_2 = z_1 + d = 2$, und da bei jedem einfachen Kettenbruch $z_2 = a_2$ ist, so ergiebt sich $a_2 = 2$, a_3 ist schon $= 1$ gefunden. Demnach ist

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 \ldots}}}}}$$

die gesuchte Form. In der That ist

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{a_1},\ \frac{z_2}{n_2} = \frac{2}{2a_1+1},\ \frac{z_3}{n_3} = \frac{3}{3a_1+1}.$$

b) Durch eine der vorhergehenden ganz ähnliche Schlufsweise findet man unter Anwendung der Rekursionsformel $n_{i+2} = n_{i+1}a_{i+2} + n_i$, dafs, wenn n_i, n_{i+1}, n_{i+2} eine arithmetische Reihe bilden, deren Anfangsglied m und deren Differenz d ist, $a_{i+2} = 1$, $d = m$ ist. Auch erkennt man, dafs m ein Mafs der Nenner sämtlicher Näherungswerte,

also auch von n_1 (a_1) und n_2 $(a_1 a_2 + 1)$, dafs folglich $m = 1$, $i = 1$, $a_1 = 1$ ist. Da ferner $a_1 a_2 + 1 = 2$, so ergiebt sich $a_2 = 1$; a_3 ist schon $= 1$ gefunden. Demnach ist

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5 \ldots}}}}}$$

die gesuchte Form. In der That ist $\frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{1}$; $\frac{z_2}{n_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{z_3}{n_3} = \frac{2}{3}$.

Emmerich. Schmidt. Sievers.

614. (Gestellt von Emmerich XVII$_5$, 366.) Die allgemeine Form desjenigen einfachen Kettenbruches anzugeben, unter dessen Näherungswerten sich zwei aufeinanderfolgende $\frac{z_{i-1}}{n_{i-1}}$, $\frac{z_i}{n_i}$ befinden, für welche $n_{i-1} - z_{i-1} = n_i - z_i$ ist.

Auflösung. Die Relation $z_{i-1} n_i - n_{i-1} z_i = (-1)^i$ kann geschrieben werden $n_{i-1}(n_i - z_i) - n_i(n_{i-1} - z_{i-1}) = (-1)^i$. In Verbindung mit der Voraussetzung erkennt man, dafs $n_{i-1} - z_{i-1} = 1$, $n_i - z_i = 1$, dafs folglich $n_i - n_{i-1} = 1$ sein mufs. Da nun $n_i = n_{i-1} a^i + n_{i-2}$, so folgt, dafs $a_i = 1$, $n_{i-2} = 1$ ist. Daraus folgt $i = 3$, mithin $a_1 = 1$, $a_3 = 1$. Also ist

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5 \ldots}}}}}$$

die gesuchte Form. In der That ist $\frac{z_2}{n_2} = \frac{a_2}{a_2+1}$, $\frac{z_3}{n_3} = \frac{a_2+1}{a_2+2}$, also $n_2 - z_2 = n_3 - z_3$.

Emmerich. Schmidt. Sievers.

615. (Gestellt von v. Lühmann XVII$_5$, 366.) Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit w, dafs von n an einem Tage versammelten Personen wenigstens eine an diesem Tage ihren Geburtstag hat? Wie grofs mufs n sein, wenn jemand, der auf das Eintreten dieses Ereignisses wettet, Aussicht auf Erfolg haben soll?

1. Auflösung. Als Geburtstag einer jeden der n Personen kann jeder Tag des Jahres vermutet werden. Die möglichen Fälle sind daher 365^n, nämlich die Variationen mit Wiederholung aus 365 Elementen zur $n$ten Klasse. Ungünstig für das Ereignis sind alle diejenigen Komplexionen, in denen das Tagesdatum nicht vorkommt, also 364^n (Variationen mit Wiederholung aus 364 Elementen zur $n$ten Klasse). Daher ist $w = \frac{365^n - 364^n}{365^n} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$. Für das Eintreten des Ereignisses ist Aussicht vorhanden, wenn $\left(\frac{364}{365}\right)^n < \frac{1}{2}$ ist, woraus $n > \frac{\lg 2}{\lg 365 - \lg 364} = 252{,}65$ folgt; d. h. n mufs mindestens 253 sein.

Lengauer. v. Lühmann (Königsberg i. Nm.) Schmidt. Schmitz (Neuburg a. D.) Weidenmüller.

(2. Aufl. von Emmerich u. Schmitz im nächsten Heft.)

B. Neue Aufgaben.

658. Folgende Gleichung $n$ten Grades aufzulösen:

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \cdots & a_{n-1}, & a_n - \alpha_n x \\ a_1, & a_2, & \cdots & a_{n-1} - \alpha_{n-1} x, & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1, & a_2 - \alpha_2 x, & \cdots & a_{n-1}, & a_n \\ a_1 - \alpha_1 x, & a_2, & \cdots & a_{n-1}, & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

Emmerich (Mülheim a. d. R.).

659. Wie lassen sich die Ziffern 1 bis 7 in die sieben horizontalen und sieben vertikalen Reihen eines in 7^2 Quadrate geteilten Quadrates hineinschreiben, so dafs weder in diesen noch in den beiden Diagonalreihen eine Ziffer wiederholt vorkommt, und auf wie vielfache Weise ist das möglich? Brockmann (Cleve).

660. Man soll den Grenzwert ermitteln, gegen welchen die Summe $\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{n}} + \frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{2n}} + \cdots \frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{nn}}$ bei unendlich wachsenden n konvergiert. Schlömilch.

661. Es soll das $n$te Glied der Reihe 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (sogenannte Gerhard'sche Reihe), bei welcher jede Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger ist, auf elementarem Wege in geschlossener Form dargestellt werden. Weinmeister (Tharand).

662. Eine Strecke a in 3, 4, 5, ... n Teile zu teilen, so dafs jeder Teil die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem folgenden und der Summe des Teiles und folgenden Teiles ist. (Erweiterung des goldenen Schnittes). Szimányi (Trenchin i. Ungarn).

663. Sind $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Ecken eines regulären Polygons, ist ferner r der Radius des Umkreises und P irgend ein Punkt innerhalb des Polygons, so ist stets $PA_1 + PA_2 + \cdots PA_n > nr$. (Ein elementar geometrischer Beweis wird verlangt.) Sporer (Weingarten).

664. Es sei M der Mittelpunkt des in das Dreieck ABC konstruierten Kreises, D der Durchschnitt von CM mit AB; wird nun in D eine zu AB senkrechte Gerade errichtet, welche AM in E und BM in F schneidet, so ist DM das geometrische Mittel zwischen DE und DF. Schlömilch.

665. (Brocard'scher Kreis.) a) Die Senkrechten von den Mittelpunkten der Seiten des Dreiecks ABC auf die entsprechenden Seiten von $A'B'C'$ schneiden sich in einem Punkte T, der die Strecke RH' halbiert und mit N, Z und E in gerader Linie liegt. Auch T, F (Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises), S und W (Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel der neun Punkte) bilden eine gerade Linie und WT ist ein Durchmesser des Feuerbach'schen Kreises. b) Die Geraden KF, DH' und NE schneiden sich in einem Punkte V, welcher der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A'B'C'$ ist. Stoll (Bensheim).

666. Durch zwei Gegenecken C und D eines Parallelogramms $CEDF$ sind zwei Strahlen gezogen, ein fester durch D, parallel zur Diagonale EF, mit den Schnittpunkten A und B bez. auf den Seiten CE und CF und ein beweglicher durch C mit den Schnittpunkten M und N bez. auf den Seiten DE und DF. Wird dann A mit M und B mit N verbunden, so ist stets $AM \parallel BN$ in der der willkürlich veränderlichen harmonisch zugeordneten Richtung.

KOBER (Schollwitz).

667. Man sucht die Kanten eines gleichflächigen Tetraeders, wenn die Oberfläche f, der Radius r der Umkugel und a) das Volumen v, b) der Radius ϱ der Inkugel gegeben sind.

EMMERICH (Mühlheim a. d. R.).

668. Zeichne das Netz der geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, von welcher gegeben ist die Gesamtoberfläche $= m^2$ und entweder die Höhe $= h$ oder die Seitenkante $= s$ oder der Radius der Inkugel $= \varrho$.

VON SCHAEWEN (Posen).

Druckfehler-Berichtigung.

Nr. 579 am Schlufs der Analysis (XVII, 520) mufs es

$$x = \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ statt } x = \sqrt{ab} \text{ heifsen.}$$

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

(Alphabetisch geordnet.)

Auflösungen sind eingegangen von: Artzt 678. Baur 646. Bermann 638—640. 642. 643. 645. Beyel 641. 646. Beyens 600. 602. 603. 610. 612. 617. 619. 627—629. 637—639. 640. 642. 644—647. 653. 656. 657. Drees 638. 640. 643. Emmerich 637. 639—656 excl. 645 u. 651. End 637 bis 639. 645. Fuhrmann 637. 638. 642—647. Gallenkamp 639. Haluschka 616. 617. 623. 624. Helm 626. 628. 631. 634. 638. 642. 644. 645. Kober 637. 638. 641. 656. Lengauer 612. 615—619. 621—624. 626—634. 637—640. 642. 644—646 und Bemerkungen zu 626 und 633. Lukácsi 638. Meinel 626—629. 631—634. 637—647. v. Miorini 637. 638. 643—646. 651—653. 656. 657. Niseteo 633. 646. Schlegel 637. 644. Schmidt 626—629. 631 bis 634. Stammer 620. Stoll 637—647. Thieme 644. Vollhering 645. Weidenmüller 642. 644. 645. Weinmeister Bemerkungen zu eingesendeten Aufgaben. Unbekannt*) 637—639. 642.

Neue Aufgaben: Artzt (3). Beyel (3). Beyens (2). Emmerich (2). Haag (1). v. Miorini (1). Niseteo (1). Schlömilch (5). Schmitz (3). Szimányi (3). Unbekannt*) (2). Die von K. S. in U. O. eingesendete neue Aufgabe $x^2 + y = 11$ und $x + y^2 = 7$ findet sich XIII, 448.

*) Der unbekannte Herr wird gebeten der Redaktion seinen Namen mitzuteilen.

Litterarische Berichte.

A. Rezensionen.

FRANKENBACH, Dr. F. W. (Rektor der Wilhelmsschule in Liegnitz), Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Dritter Teil. Die ebene Trigonometrie. Mit 19 Figuren und zahlreichen Übungsbeispielen. Liegnitz 1887. Druck und Verlag von H. Krumbhaar. VI. 44. S.

Die beiden ersten Teile dieses wesentlich für höhere Bürgerschulen berechneten Lehrbuchs sind dem Referenten unbekannt. Was aber die vorliegende Trigonometrie anlangt, so mufs er gestehen, dafs dieselbe seinen didaktischen Anschauungen in seltenem Grade entspricht. Er hat von je die Ansicht vertreten, dafs der Unterricht in diesem Fache kaum kurz genug in seinem theoretischen Teile gefafst werden müsse, dafs nur ein Minimum von Formeln den Schülern als eiserner Besitzstand einzuprägen und alles weitere der praktischen Einübung zu überlassen sei. Ganz in diesem Sinne geht der Verf. vor; von den 44 Seiten seines Büchleins sind 14 einleitenden planimetrischen Betrachtungen, 15 der Goniometrie, 6 dem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreieck und 9 der Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks gewidmet.

In der Einleitung wird das Wesen der Projektion klar dargelegt und durch zahlreiche Beispiele erläutert. Die weiteren Hilfssätze beziehen sich auf den gewöhnlichen und den verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz, auf die Bestimmung des Dreiecksinhalts, auf die Berührungskreise des Dreiecks, auf den goldenen Schnitt und endlich auf das Theorem des Ptolemaeus, von welchem der Verf. sehr mit Recht bei Begründung der Formeln sin $(\alpha \pm \beta)$ Gebrauch macht. Die Definition der Winkelfunktionen kann sich nunmehr auf die Lehre von der Streckenprojektion stützen; die Ausdehnung auf den zweiten Quadranten wird korrekt durchgeführt, während dritter und vierter Quadrant, anscheinend absichtlich und wohl mit Rücksicht auf den nächsten Zweck des Buches, keine Beachtung finden. Der Satz chord $2\varphi = 2 \sin \varphi$ ermöglicht, wie schon gesagt, eine sehr hübsche Herleitung des Additionstheorems. Auch in der eigentlichen Trigonometrie ist die Darstellung bündig und

klar. Fügen wir hinzu, dafs für Material zu Rechnungsbeispielen reichlich gesorgt ist, und dafs die vom Programme der höheren Bürgerschule ausgeschlossenen Relationen durch einen beigesetzten Stern ersichtlich gemacht sind, so glauben wir den empfehlenswerten Leitfaden ausreichend charakterisiert zu haben.

München. Dr. S. Günther.

Geistbeck, Dr. M., der Weltverkehr. Illustrierte Bibliothek der Länder- und Völkerkunde. Freiburg i. B. 1887, Herdersche Verlagsbuchhandlung. 494 S. 8⁰.

Dieses 494 Seiten starke mit zahlreichen Illustrationen und Karten ausgestattete Werk behandelt in ausführlicher Weise das nämliche Thema, über welches Professor Dr. Paulitschke seinen trefflichen, in dieser Zeitschrift besprochenen „Leitfaden der geographischen Verkehrslehre"*) geschrieben hat. Das Werk gliedert sich in vier Teile: Telegraphie, Post, Eisenbahnen, Schiffahrt. In jedem dieser Kapitel wird so ziemlich alles Wissenswerte über den betreffenden Gegenstand in ausführlicher Weise erwähnt. Daher kann das Buch vor allem als eine anziehende und belehrende Lektüre zur Belebung des Geographieunterrichtes dienen. Für diesen Zweck dürfte dasselbe von besonderem Werte sein. Denn es ergänzt die ethnographischen Charakterbilder, welche man gewöhnlich zur Vervollständigung des geographischen Wissens gebraucht in einer bedeutungsvollen Richtung, und übertrifft die meisten derartigen Werke an einer dem jugendlichen Standpunkte entsprechenden Fafslichkeit der Darstellung. — Das Buch bringt natürlich — es mufs dies ausdrücklich erwähnt werden, um unmotivierten Erwartungen zu begegnen — keine eigentliche Originalarbeit, es ist vielmehr eine Zusammenstellung von zahlreichen auf das Thema bezüglichen Abhandlungen aus belletristischen und Fachzeitschriften, sowie aus Mitteilungen der in betracht kommenden Verkehrsinstitute. Dies verschweigt auch der Verfasser durchaus nicht, der mit grofser Gewissenhaftigkeit allüberall die Quellen seiner Arbeit nennt und dabei eine bedeutende Belesenheit bekundet. Hingegen ist die Auswahl und Anordnung des Stoffes unbestrittenes Verdienst des Verfassers.

In der That, ein Geographielehrer, der seinen Schülern interessierende Details über die Gesshichte, die Mittel und den Zustand des Weltverkehrs mitteilen wollte, könnte doch unmöglich die vielen illustrierten Blätter und Verkehrszeitungen, Koursbücher und Dampfergesellschaftsberichte durchforschen und aus der Masse des Materiales gerade das Passende aussuchen und zusammenstellen.

---

*) Ferd. Hirt, Breslau 1881, rezensiert von Ref. in ds. Z. XIII, 385. D. Red.

Während das Buch über die Geschichte und die Mittel des Verkehrs, sowie über die auf den Verkehr Einfluſs habenden physikalisch-geographischen Verhältnisse eine anziehende Lektüre bietet, ist ein beträchtlicher Teil zum Vorlesen weniger geeignet, aber deswegen nicht minder schätzenswert — der statistische. Es ist wohl nicht jedermanns Sache einer langen Reihe von Zahlen sein Interesse zuzuwenden. Wer aber einen solchen Zahlensinn besitzt, dem geben statistische Tabellen über den behandelten Gegenstand einen unzweideutigen, objektiven Aufschluſs, wie ihn die beredeste Schilderung nicht zu bieten vermag. Für den denkenden Rechner baut sich aus den Zahlen das Gerüst, auf welchem fuſsend er die in frage kommenden Einrichtungen und Verhältnisse in ihrer vollständigen Groſsartigkeit zu überschauen vermag.

Neuburg. a. D. A. Schmitz.

Einige Beurteilungen des in Heft 1, S. 44ff. besprochenen Werkes von „Pfeifer, der goldene Schnitt“ etc. nebst den zugehörigen Entgegnungen des Verfassers.*)

I. Rezension Dr. S. Günthers.**)

Mancher Leser der „Allg. Ztg.“ wird sich wohl einer kurzen Note erinnern, in welcher Herr Licealprofessor Dr. Pfeifer in Dillingen kurz über seine neuesten Arbeiten, den „goldnen Schnitt“ betreffend, berichtete und deren Beziehungen zu denjenigen von Zeising klarstellte. Heute liegt uns eine ziemlich umfangreiche und von dem wohlbekannten Verlagsinstitut sowohl hinsichtlich des Druckes, als auch hinsichtlich der Figurentafeln ganz vorzüglich ausgestattete Schrift vor, auf welche die Aufmerksamkeit auch des gröſseren Publikums hinzulenken wohl als Pflicht erscheint.

Der Ästhetiker Zeising hatte es sich zur Aufgabe, man kann wohl sagen, seines Lebens gemacht, den Nachweis zu führen, daſs allenthalben in Kunst und Natur jenes Gesetz sich wiederhole, welchem zufolge die Teilung einer Strecke durch einen Punkt dann den dem Auge wohlgefälligsten Eindruck hervorbringt, wenn das Verhältnis der ganzen Strecke zum gröſseren Abschnitt dem Verhältnis dieses gröſseren Abschnittes zum kleineren Abschnitt gleich ist. Wie es jedoch so häufig geht: in dem Bestreben, überall nach Offenbarungen dieses Gesetzes zu suchen, lieſs sich Zeising, wie gar nicht geläugnet werden kann, mancherlei Übertreibungen und unwahrscheinliche Behauptungen entschlüpfen, durch welche auch der zweifellos gesunde Kern seiner Untersuchungen einigermaſsen

*) Da teils durch (erst neuerdings eingelaufene) Privatmitteilungen über obiges Werk, teils durch einige Briefe des Verfassers selbst, mehrere Änderungen und Zusätze zu unserer Rezension (Heft 1, S. 44 u. f.) sich nötig machten und die hierdurch erforderliche einheitliche Umarbeitung derselben bei der Kürze der Zeit und im Drange der Geschäfte nicht möglich war, so geben wir einstweilen die nachstehenden Beurteilungen, die „für und wider“ das Pfeifersche Werk eintreten, sowie den daraus hervorgegangenen Meinungskampf zwischen dem Verfasser und einem Rezensenten. Daſs inzwischen Manches geschehen und geschrieben worden ist, wodurch die Ansichten auf beiden Seiten sich ändern dürften, konnte uns nicht zu Anmerkungen bewegen; vielmehr wollten wir die Beurteilungen und Entgegnungen rein und unverfälscht geben. D. Red.

**) s. Beilage zur „Allgem. Ztg.“ 1885. Nr. 302.

diskreditiert wurde. Er war sich sehr wohl bewufst, dafs nur eine gesunde Kritik an der Hand der Geometrie richtige Ergebnisse zu liefern vermöge, und bei nicht wenigen Gelegenheiten verrät er den Besitz ganz erheblicher mathematischer Kenntnisse, im ganzen jedoch gelang es ihm nicht, zwischen den nüchternen Anforderungen der Raumlehre und der eigenen dichterischen Phantasie ein befriedigendes Abkommen zu treffen. Was er vermissen läfst, die systematische Gestaltung zahlloser Einzelfunde, das bietet uns hier sein Nachfolger, aber auch rein sachlich ist derselbe ziemlich weit über Zeising hinausgegangen. Dazu kommt, dafs Herr Pfeifer in Bezug auf seine Messungsresultate zuverlässiger ist, als jener; Referent selbst hat einzelnen Messungen von Naturkörpern beigewohnt und kann bestätigen, dafs dabei mit der gröfsten Genauigkeit zu Werke gegangen ward. Ein ebenso einfaches, wie praktisches Instrumentchen, welches der Verfasser unserer Schrift selbst erfand, und welches nach seinen Angaben von Mechaniker Riefler zu Maria-Rain bei Kempten im grofsen hergestellt wird, erleichtert eben auch das Messungsverfahren ungemein; Proportionalcirkel würden wir, beiläufig bemerkt, das hübsche, kleine Werkzeug deshalb nicht nennen, weil die Geschichte der praktischen Geometrie mit diesem Worte bereits einen ganz anderen Begriff verbindet.

Um nun auf den Inhalt des Pfeiferschen Buches näher einzugehen, so sei bemerkt, dafs der Verfasser eine mathematische Einleitung voraussendet, welche sich über das Wesen der Proportion im allgemeinen und weiter besonders über jene Proportion verbreitet, welche eben den Namen des goldnen Schnittes führt. Es wird dabei auch die Erweiterung der bekannten Aufgabe in Betracht gezogen, dafs in einer gradlinigen Punktreihe nicht blofs unmittelbar an einander gränzende, sondern auch durch Zwischenglieder von einander getrennte Strecken in dem uns bekannten Verhältnis stehen. Die Mannigfaltigkeit der Ausnahmen ist hier selbstverständlich eine unbeschränkte, doch beschäftigt sich der Verfasser auch nur mit solchen Fällen, für welche er die Analogie an wirklichen Naturobjekten nachzuweisen in der Lage ist; es sind deren drei, die hier als „erste, zweite und dritte Modifikation“ bezeichnet werden. Nachdem sodann gezeigt ist, in welcher Weise der goldne Schnitt, mit der Konstruktion gewisser regelmäfsiger Polygone zusammenhängt, beginnt eine sehr interessante und von grofser Belesenheit zeugende Erörterung über die Geschichte der Teilung nach äufserem und mittlerem Verhältnis, wobei zumal auf die Arbeiten von Lucas Pacioli und Kepler gründlichst eingegangen wird. Verfasser ist wohl einer der sehr wenigen, der sich in die *„Divina Proporzione“* des ebenso geistvollen wie schwerfälligen Italieners vollständig hineingelesen hat, und da stellt sich ihm der Inhalt des abstrusen Werkes sehr viel anders dar, als manchen modernen Schriftstellern, die mit demselben wohl vertraut sind, ohne es je in der Hand gehabt zu haben. Dafs Herr Pfeifer einem dieser Herren, der in völliger Unkenntnis einer Sache die Bürgschaft für höchste Objektivität zu erkennen scheint, eine verdiente Rüge angedeihen läfst, wird ihm niemand verübeln können. Zum Schlufs dieses Abschnittes spricht sich der Verfasser bündig und treffend über sein Verhältnis zu Zeising aus. Hierauf beginnt der spezielle Teil. Nur kurz wollen wir andeuten, dafs auch in den Zahlenverhältnissen unseres Planetensystems und in geographischen Mafsen Beziehungen auftreten, welche an den goldnen Schnitt erinnern; weit bedeutsamer ist die botanische Abteilung, welche denn auch mehr als ein Viertel des Ganzen beansprucht und durch treffliche Planzenabbildungen in Naturselbstdruck unterstützt wird. Während Schimper, Braun, Bravais und Zeising die Manifestationen der *sectio aurea* wesentlich blofs in jener Schraubenlinie ausgeprägt fanden, die sich längs der Ansatzpunkte der Stiele am Stengel oder Baum hinaufwindet, kam Herr Pfeifer auf den glücklichen Gedanken, mehr die Longitudinal-Verhältnisse zu berücksichtigen. Denken wir uns einen Ast AB, von dem

aus respektive in den Punkten $C, D, E, F, G, H \ldots M, N$ Seitenzweige auslaufen, so begegnen wir sehr häufig der Thatsache, daſs die Proportionenkette $AD : AC = AC : CD = CD : DE = DE : EF = EF : FG = FG : GH = \ldots = MN : NB$ in ausgesprochenster Deutlichkeit hervortritt; bei anderen Pflanzen ist die Reinheit der Erscheinung vielleicht etwas getrübt, dafür aber kommt die zweite oder dritte Modifikation (s. o.) zur Geltung. Die Figuren ermöglichen es jedem, mit Hülfe des erwähnten Cirkels sich die Überzeugung zu verschaffen, daſs man es hier nicht mit Hypothesen und Spielereien, sondern mit wirklichen Erfahrungswahrheiten zu thun hat, und wenn man sich vergegenwärtigt, daſs es Schwendener gelungen ist, für die empirischen Befunde der oben namhaft gemachten Forscher die morphologische Grundursache zu ermitteln, so darf man die Möglichkeit nicht abweisen, daſs es dereinst noch erreichbar sein werde, die neuen Feststellungen unserer Vorlage kausal herzuleiten. Wer selbständig Bestimmungen dieser Art vorzunehmen wünscht, der halte sich an das klassische Objekt der neuen Theorie, an die Farne. Noch reiner und schärfer vielleicht als im Pflanzenreich, bethätigt sich jedoch das merkwürdige Zahlenverhältnis bei den Konchylien. Mathematik auf das Studium der Schneckengehäuse anzuwenden, ist an sich keine neue Idee, der Verfasser zeigt sich auch in den Vorarbeiten über geometrische „Konchyliometrie“ wohl unterrichtet und erörtert des näheren die Tendenzen, von welchen sich Naumann bei seinen Arbeiten über die Konchospiralen leiten lieſs. Sein Verfahren ist aber ein anderes; er miſst genau die Entfernungen derjenigen Punkte von einander, in welchen die um den Konus sich herumwindende Spirale eine und dieselbe Seiten- (oder Fall-) Linie durchschneidet, und erkennt in diesen Distanzen wiederum Fortschreitungsgesetze, welche entweder mit dem des goldnen Schnitts selber übereinstimmen oder doch den aufeinander folgenden Gliedern einer Lamé'schen Reihe sich anpassen; je zwei solche Glieder ergeben aber als Quotienten einen Bruch, der annähernd dem Verhältnis des Major einer nach goldnem Schnitt geteilten Strecke zum Minor gleich ist. Auch bei den Abmessungen der Körperteile anderer Tiergattungen, bei den Dimensionen der menschlichen Hände und Finger scheint jene Reihe, welche die Mathematiker zu den „rekurrenten“ zählen, eine gewisse Norm abzugeben. Die ästhetische Bedeutung der Schnittregel unterschätzt Pfeifer nicht, wenn er sie auch nicht gerade nach Zeising'schen Mustern in den Vordergrund stellt, immerhin glaubt er dieselbe in den Maſsverhältnissen einer Anzahl von berühmten Kirchen nachweisen zu können, und in den exakten Zahlengruppierungen, die Hultsch dem Heraion und Artemision entnommen hat, erblickt er willkommene Bekräftigungen seiner eigenen Ansichten. Das Werkchen, das wir nochmals allgemeiner Beachtung dringend anempfehlen möchten, schlieſst mit einem philosophischen Rückblick, der wesentlich dazu bestimmt ist, den Einklang der im Texte niedergelegten Anschauungen mit den in Fechners Begriffsbestimmungen einer exakt arbeitenden Schönheitslehre enthaltenen Grundsätzen darzuthun.

II. Kritik Plaſsmanns.*)

Wer es unternimmt, in der Natur bestimmte Zahlverhältnisse nachzuweisen, begiebt sich von vornherein auf ein bedenkliches und gefährliches Gebiet, wenn er nicht von sicheren mechanischen Gesichtspunkten geleitet wird. Er gerät leicht in die Gefahr, in den geschaffenen Dingen nur das zu finden, was er sucht, und die edle Einfalt der Natur durch wunderliche Formeln zu entstellen. So hat Kepler, ehe er die nach ihm benannten Gesetze auffand, die tollsten Hypothesen erfunden, um die Entfernungen und Umlaufszeiten der Wandelsterne in ein System zu

*) Erschienen in der Beilage zu Nr. 342 des Westfälischen Merkur (vom 12. XII. 1885.) D. Red.

bringen. Aber gerade das Beispiel Keplers, der nach vielen vergeblichen Versuchen endlich zur Wahrheit durchdrang, zeigt uns, dafs derartige Arbeiten nicht absolut wegzuweisen sind, auch wenn man vieles Unrichtige in ihnen auffinden sollte.

Aus diesem Gesichtspunkte möchten wir die vorliegende interessante Schrift auffassen, die ein umfangreiches und im allgemeinen wohlgeordnetes Beobachtungsmaterial aufweist. Dasselbe wird jedenfalls bei einer späteren erschöpfenden Behandlung, wovon das Thema augenblicklich noch weit entfernt ist, die gehörige Beachtung finden müssen. In ein paar einleitenden Kapiteln erörtert Verfasser die mathematische Bedeutung des goldenen Schnitts, d. h. der Teilung einer Strecke nach stetiger geometrischer Proportion. Leider befleifsigt er sich hier einer Weitschweifigkeit, die den Kenner verdriefst und den Laien weder fesselt, noch belehrt; die bekannten Begriffe Verhältnis und Proportion werden erklärt, während von dem wichtigen Satze, dafs die Zehnecks-Seite gleich dem Major des nach dem goldenen Schnitte geteilten Radius ist, der Beweis nur angedeutet wird. — Es werden drei Modifikationen aufgestellt, die für das Vorkommen der *sectio aurea* in der Natur mafsgebend sind. Jede „Modifikation" soll verschiedene „Variationen" haben. Unserer Meinung nach ist blofs die erste Variation haltbar; die folgenden sind rein zufällig beobachtet, wie sehr auch der Verfasser sich bemühen mag, durch schöne phototypische Tafeln, Naturselbstdruck, Proportional-Cirkel u. s. w. ihre durchgreifende Herrschaft nachzuweisen. Wenn die Internodien eines Stammgebildes oder die Teilblättchen eines Blattes nach oben gleichmäfsig (in geometrischer Progression) langsam abnehmen, so kann man leicht ein Blättchen finden, dessen Längenverhältnis zum ersten der Gröfse $m : M$ oder einem ihrer genaueren Näherungswerte gleich ist; ist dieses etwa das fünfte, so ist leicht einzusehen, dafs bei regelmäfsiger Abnahme das sechste zum zweiten, das siebente zum dritten u. s. w. dasselbe Verhältnis hat. Aber trotz dieser Schwäche halten wir den botanischen Teil der Arbeit doch für recht beachtenswert; es ist wenigstens Andeutung des Richtigen genug vorhanden; vielleicht wäre es gut gewesen, wenn Verfasser sich erinnert hätte, dafs es für die Pflanzengestalt nicht in dem Sinne ein Ideal geben kann, wie für die tierische oder menschliche, dafs die Pflanze viel mehr Freiheit auch in ihren Gröfsenverhältnissen hat.

Interessant sind die geschichtlichen Notizen über den goldenen Schnitt, über die Entstehung des Ausdruckes *divina proportio* und den Anteil Keplers an der Einführung der Proportion in die Botanik. In der Polemik gegen Sonnenburg, der die Bedeutung der Proportion überhaupt wegzuläugnen sucht, können wir dem Verfasser nur beistimmen. Leider findet sich in dem betr. Kapitel (S. 51, Z. 14 v. u.) ein grammatischer Fehler.*)

Wenn Verfasser die Proportion auch in der unorganischen Natur nachweisen wollte, so hätte es nahe gelegen, die wichtigsten Krystallgestalten zu untersuchen. Man hätte da Objekte gehabt, deren Gröfsenverhältnisse meistenteils sehr genau bekannt und von Zufälligkeiten nicht so abhängig sind, wie die der Pflanzenteile. Vielleicht regen diese Zeilen ihn noch dazu an. Er hat, indem er statt dessen — als Hundertster oder Tausendster — die nutzlose Arbeit unternahm, einfache Zahlenverhältnisse in das Planetensystem zu bringen, ein Kapitel geliefert, das unbedingt das schwächste in seiner Arbeit ist. Ein Beispiel möge genügen. Um die geliebte Proportion herauszubringen, wird als Sonnen-Abstand beim einen Planeten der mittlere, beim anderen der gröfste oder kleinste, oder ein dazwischen liegender genommen. Das heifst denn doch, die Natur auf das Bett des Prokrustes spannen! Und doch soll das Verhältnis $M : m$ überall deshalb realisiert sein, weil es die Störungen schön ausgleicht;

---

*) Es ist vielmehr Z. 15 u. 18, wo Pfeifer sagt der Perpendikel statt das P. Doch ist n. Dudens neuest. orth. Wörterb. beides richtig. Vgl. S. 144 Al. 5 u. S. 145 Al. 3. D. Red.

das gilt aber von jedem Irrational-Verhältnis, wie das nicht etwa „Arago und Mädler“ (S. 86), sondern viel bedeutendere Männer schon vor langer Zeit herausgefunden haben.

Über den botanischen Teil haben wir uns schon geäufsert; wir wollen noch einmal betonen, dafs die schönen und exakten Abbildungen (besonders gefiel uns *Alisma Plantago* auf Tafel VI) jedenfalls ihren Wert haben.

Von der Nachweisung der Proportion des goldenen Schnittes bei Schneckenhäusern halten wir Ähnliches, wie von der Nachweisung bei Pflanzen, dafs nämlich nur die erste Variation, wie sie z. B. bei *Turritella carinifera* (Tafel XI) angedeutet ist, sich vielleicht halten läfst. Die Nachweisung an Insekten-Körpern wird, wie wir fürchten, als ebenso nutzlose Spielerei erkannt werden, wie die an den Planeten. Es ist keine Kunst, unter den Hunderttausenden von Insekten-Arten, bei welchen Männchen und Weibchen häufig an Gestalt und Gröfse sehr verschieden sind, in den Körperabschnitten, Flügeln u. s. w. ein paar hundert Mal die Näherungswerte 5 : 8, 8 : 13 u. s. w. nachzuweisen. Es wäre ein Wunder, wenn das Wetter, das im Kalender steht, nicht zuweilen einträfe.

Ähnliches gilt von den Verhältnissen der Finger- und Mittelhandknochen. Statt der hierauf bezüglichen unklaren Ausführungen, hinter welche Verfasser selbst ein kleines Fragezeichen zu setzen sich nicht enthalten kann, hätte er besser gethan, von den Resultaten, die der verdienstvolle Zeising wirklich für den menschlichen Körper gewonnen hat, und die nicht jedem Leser zur Verfügung stehen, die wichtigsten anzuführen. Wenn er sich schliefslich hinreifsen läfst, in den Handknochen dieselben Zahlenverhältnisse zu „finden“, wie in den musikalischen Intervallen des „von der Hand erbauten und gespielten“ Saiten-Instruments, so scheint er ganz zu vergessen, wie sehr er früher das Irrational-Verhältnis beim goldenen Schnitt gepriesen hat, während die Schönheit der Intervalle bekanntlich gerade auf der Rationalität der Schwingungsverhältnisse beruht. Am Ende liefsen sich wohl gar beim Elephanten die Intervalle nachweisen, weil er die Klaviertasten liefert?

Das Kapitel „Der goldene Schnitt im Gebiete der Kunst“ enthält manches Gute, das jedoch nicht immer neu ist. Doch steht auch hier manches Wunderliche.*)

Die Schlufs-Reflexionen sind etwas unklar und zeigen das Schwanken des Verfassers zwischen mechanischer und mystischer Auffassung.

Unter den Bildertafeln ist es eine (Tafel XII), die dem Leser, der selbständige Studien treiben will, den Nachweis der Proportion praktisch erleichtert.

Es giebt Bücher, und zu ihnen ist das vorliegende zu rechnen, die Wahres, Halbwahres, Zweifelhaftes und Falsches in bunter Mischung enthalten und gerade deshalb interessant und, auf eigene Weise, auch belehrend sind.

III. Entgegnung Pfeifers auf die vorstehende Rezension Plafsmanns.**)

Beantwortung einiger wissenschaftlichen Fragen in Form einer Antikritik.

Dem Verfasser dieses Artikels ist über das von ihm herausgegebene Buch „Der goldene Schnitt in Mathematik, Natur und Kunst“, erschienen im Litterarischen Institut von Dr. Huttler, vor kurzem eine, im „West-

*) Höchst sonderbarer Weise probiert Herr Pf. es auch mit perspektivischen Abbildungen von Bauwerken. Auch hier stimmt die Proportion, und den Grund giebt er nachher (S. 205 oben) richtig an. Eine kleine Überlegung, die hierauf fufste, hätte ihm zeigen können, was es mit den Variationen der ersten Modifikation bei Pflanzen-Abschnitten auf sich hat. D. Verf.

**) s. Augsburger Postzeitung v. 13. Febr. 1886, Beil. 6. D. Red.

fälischen Merkur“ (Nr. 342, Jahrgang 1885, 12. Dez.) veröffentlichte Rezension (als Verfasser ist J. Plafsmann unterzeichnet) zugekommen, gegen welche eine Abwehr und Berichtigung nicht blofs im persönlichen, sondern auch im allgemeinen wissenschaftlichen Interesse geboten ist, weil jene Rezension bei Beurteilung des betreffenden Buches wissenschaftlich falsche Behauptungen vorbringt. Einige dieser wissenschaftlichen Irrtümer sind von der Art, dafs deren Widerlegung wohl auch für einen grofsen Teil der Leser der „Postzeitung“ von Interesse sein könnte.

Die soeben erwähnte Rezension beginnt mit dem Satze: „Wer es unternimmt, in der Natur bestimmte Zahlenverhältnisse nachzuweisen, begiebt sich von vornherein auf ein bedenkliches und gefährliches Gebiet, wenn er nicht von sicheren mechanischen Gesichtspunkten geleitet wird.“

Abgesehen davon, dafs Rezensent in jenen Worten die Meinung durchblicken läfst, der Verfasser des kritisierten Buches habe sich zu wenig von mechanischen Gesichtspunkten leiten lassen, geben die angeführten Worte zu folgender Frage Veranlassung: Ist es in solchen Fällen, wo es sich um den Nachweis bestimmter Zahlenverhältnisse in der Natur handelt, immer oder doch in der Regel möglich und notwendig, von mechanischen Gesichtspunkten sich leiten zu lassen?

Ich werde nun zeigen, dafs die Geschichte der Naturwissenschaften auf die obige Frage eine entschieden verneinende Antwort giebt.

Den ersten Beweis entnehme ich der Geschichte der Astronomie, weil hier ein Faktum vorliegt, das zur vollen Evidenz meine Behauptung bestätigt und weil ich dabei zugleich Gelegenheit habe, einen berühmten Landsmann, nämlich Kepler, gegen ein ungerechtfertigtes Urteil zu vertheidigen. Der Rezensent hat nämlich seinen obigen Satz durch eine Hinweisung auf Kepler zu begründen gesucht, indem er sagt: „So hat Kepler die tollsten Hypothesen erfunden, bevor er seine Gesetze auffand.“

Hiergegen ist vor allem zu bemerken, dafs es eine unbillige Übertreibung ist, Keplers anfänglich unrichtige Hypothesen als „die tollsten“ zu bezeichnen. Zwischen einer unrichtigen und tollen Hypothese ist noch ein grofser Abstand. Ein gewifs kompetenter Beurteiler der astronomischen Leistungen Keplers, Förster, Direktor der Berliner Sternwarte, spricht in einem Vortrage, den er über Kepler gehalten (Sammlung wissenschaftlicher Vorträge von R. Virchow, Serie VII, Heft 146, S. 18 ff.) auch von derjenigen Hypothese Keplers, welche sich nicht bewährte und zu seinen späteren Entdeckungen nur eine Vorarbeit war, mit grofser Achtung.

Doch das ist hier Nebensache. Die Hauptfrage ist, ob Kepler, als er dann seine berühmten Gesetze fand, von mechanischen Gesichtspunkten zu dieser Entdeckung geführt wurde, oder geführt werden konnte? Der bereits genannte Astronom Förster antwortet hierauf entschieden verneinend. Er sagt nämlich: „Bekanntlich verfuhr Kepler bei dem Nachweis der elliptischen Form der Planetenbahnen streng geometrisch.“ Geometrisches Verfahren ist verschieden von mechanischem. Ferner sagt Förster: „Wir verdanken der Harmonik (es ist hierbei die philosophische Idee Keplers vom Dasein harmonischer Verhältnisse im Planetensystem gemeint) noch die letzte grofse Entdeckung Keplers, welche, bevor sie als ein Resultat mechanischer Forschungen sich ergeben konnte, allein durch numerische Divinationen harmonisierenden Charakters und durch keine andere Art der Geistesthätigkeit zu finden war, nämlich das dritte Gesetz. (Dafs die Quadratzahlen der Umlaufszeiten je zweier Planeten sich verhalten, wie die Kubikzahlen der mittleren Entfernungen derselben Planeten.)

Mit diesem Urteile Försters stimmt dasjenige des Mathematikers Hauck (in seinem Vortrage: Die Stellung der Mathematik zur Kunst etc. S. 23) vollkommen überein, denn auch dieser erklärt: „Nie dürfen wir vergessen, dafs Kepler durch keine andere Geistesthätigkeit als durch

seine künstlerisch-divinatorischen Spekulationen zu der grofsen Entdeckung seines dritten Gesetzes gelangen konnte." Der Grund ist sehr einfach. Die himmlische Mechanik Newtons wurde ja erst möglich auf der Grundlage der Entdeckung Keplers; die irdische Mechanik aber konnte jenem hierbei keine leitenden Gesichtspunkte geben.

Ich habe hiermit bewiesen, dafs bei diesem wichtigen Nachweis bestimmter Zahlenverhältnisse in der Natur es gar nicht möglich war durch die Leitung mechanischer Gesichtspunkte das richtige zu finden. Es wäre leicht, aus der Geschichte der Chemie, der Botanik, der Psychologie und Psychophysik denselben Beweis zu führen. Ich will jedoch der Kürze wegen nur noch aus der Akustik einen Beweis führen und zwar aus dem Grunde, weil Rezensent über Akustik einen entschieden falschen Satz aufgestellt hat. Die Geschichte der Akustik berichtet uns, dafs schon Pythagoras die Abhängigkeit der vollkommenen Konsonanzen (der Oktave, Quinte und Quarte) von bestimmten, in kleinen ganzen Zahlen ausdrückbaren Verhältnissen der Längen der tönenden Saiten, nämlich von den Verhältnissen 1 : 2, 2 : 3 und 3 : 4 erkannt habe (vgl. Helmholz, Tonempfindungen, 3. Aufl. S. 2). Helmholz bemerkt, dafs man später an die Stelle der Saitenlängen die Schwingungszahlen der Töne setzte und zu den Verhältnissen der vollkommenen Konsonanzen noch jene der minder vollkommenen hinzufügte und insofern jene pythagoreische Entdeckung verallgemeinerte, aber er fügt bei, dafs kein Fortschritt gemacht wurde in der Beantwortung der Frage, was die musikalischen Konsonanzen mit den Verhältnissen der ersten sechs ganzen Zahlen zu thun haben. Diese Frage hat bekanntlich Helmholz beantwortet, indem er die Entstehung der Konsonanzen und Dissonanzen physikalisch erklärte.

Ziehen wir die Konsequenz. Auch in der Akustik ging der Nachweis bestimmter Zahlenverhältnisse voran, und die Erklärung der Bedeutung dieser Verhältnisse vom physikalischen oder, wenn man will, mechanischen Gesichtspunkt folgte nach.

Aber gerade diese physikalische Erklärung des akustischen Gesetzes, dafs der Wohlklang von gewissen Verhältnissen der Schwingungszahlen der Töne abhängt, hat der Rezensent sich nicht zu Nutzen gemacht, denn er spricht in seiner Rezension einen akustischen Irrtum aus, den er hätte vermeiden können, wenn er die physikalische Erklärung der Konsonanzen und Dissonanzen berücksichtigt hätte. Die betreffende Stelle der Rezension bezieht sich auf die Partie meines Buches S. 186—189 und lautet wörtlich: „Wenn er (der Verfasser) sich schliefslich hinreifsen läfst, in den Handknochen dieselben Zahlenverhältnisse zu finden, wie in den musikalischen Intervallen des von der Hand erbauten und gespielten Instrumentes, so scheint er ganz zu vergessen, wie sehr er früher das irrationale Verhältnis beim goldenen Schnitt gepriesen hat, während die Schönheit der Intervalle gerade auf der Rationalität der Schwingungsverhältnisse beruht. Am Ende liefsen sich wohl gar beim Elephanten die Intervalle nachweisen, weil er die Klaviertasten liefert."

Wir wollen doch sehen, auf welcher Seite der Fehler begangen wurde, zu unüberlegten Behauptungen sich hinreifsen zu lassen.

Ist es wahr, was Rezensent behauptet, dafs nämlich die Schönheit, oder was hier dasselbe ist, der Wohlklang der Intervalle gerade auf der Rationalität der Verhältnisse der Schwingungszahlen beruhe? Ist jene Rationalität der Grund der Schönheit oder des Wohlklangs der Intervalle? —

Auf diese Frage ist ganz entschieden mit Nein zu antworten, was sich auch sehr leicht beweisen läfst. Jeder Akustiker und theoretisch gebildete Musiker weifs, dafs bei den schneidendsten Dissonanzen die Verhältnisse der Schwingungszahlen gerade so gut rational sind, wie in den vollkommensten Konsonanzen. Tyndall bezeichnet die Verbindung zweier Töne von dem Verhältnisse 15 : 16 als schneidende Dissonanz; aber das Verhältnis dieser Schwingungszahlen ist ohne Zweifel rational.

Es kann also die Rationalität der Verhältnisse der Schwingungszahlen bei Intervallen unmöglich der wahre Grund des Wohlklangs sein, weil sonst auch die ärgsten Dissonanzen wohlklingend sein müfsten. Es ist also ein evidenter akustischer Irrtum, wenn Rezensent sagt, dafs die Schönheit der Intervalle gerade auf der Rationalität beruhe. Welches der wahre Grund des Wohlklanges und Mifsklanges sei, wird sich bald zeigen, wenn wir den kritischen Irrtum der oben citierten Stelle aufdecken. Rezensent spricht dort die Meinung aus, dafs der Verfasser des Buches in einen Widerspruch oder eine Inkonsequenz verfallen sei, weil er einerseits das irrationale Verhältnis des goldenen Schnittes und andererseits wieder die rationalen Verhältnisse der konsonanten Intervalle als schön preist. Ich könnte, um den Schein des Widerspruches zu beseitigen, einfach bemerken, dafs das irrationale Verhältnis des goldenen Schnittes eine geometrische, folglich optische, ein musikalisches Intervall aber eine akustische Erscheinung ist, und es sei wegen der totalen Verschiedenheit der optischen und akustischen Sinnesempfindungen wohl möglich und gar nicht widersprechend anzunehmen, dafs im optischen Gebiete ein irrationales, im akustischen aber ein rationales Verhältnis den Vorzug der gröfseren Schönheit habe. Ich kann jedoch den Vorwurf des Widerspruchs oder der Inkonsequenz noch auf eine andere Weise und noch gründlicher beseitigen. Wenn man etwas lobt, so mufs der Grund des Lobes vom Gegenstand unterschieden werden. Der Heiland lobt im Evangelium den ungerechten Haushalter, nicht wegen seiner Ungerechtigkeit, sondern wegen der Klugheit. Ich habe das irrationale Verhältnis des goldenen Schnittes und auch das rationale der konsonanten Intervalle als schön gelobt, das ist richtig. Aber wo ich diese verschiedenen Verhältnisse wegen ihres ästhetischen Wertes lobe, da habe ich weder das irrationale Verhältnis des goldenen Schnittes wegen der Irrationalität, noch auch das rationale der Intervalle wegen der Rationalität, sondern beide wegen einer Eigenschaft, worin sie übereinstimmen, gepriesen — diese Eigenschaft ist die Stetigkeit. Dafs ich den ästhetischen Wert und Effekt des goldenen Schnittes wesentlich der Stetigkeit zuschreibe, ist S. 41 und 314 meines Buches ausdrücklich gesagt. Dafs auch die konsonanten Intervalle ihre Wohlgefälligkeit einer gewissen Stetigkeit verdanken, ist zwar in meinem Buche nicht ausdrücklich gesagt, läfst sich aber aus der Natur der Sache und durch Zurückgehen auf den wahren Grund der Dissonanzen und Konsonanzen beweisen. Nach den Erklärungen von Helmholz und Tyndall entstehen die Dissonanzen durch jene Stöfse oder Schläge, welche sich einstellen, wenn die Schwingungszahlen zweier gleichzeitiger Töne um eine bestimmte Anzahl differieren. Nach Helmholz erzeugen 33 solcher Stöfse in einer Sekunde eine fast unerträgliche Dissonanz. Nach der Schilderung von Tyndall sind solche dissonante Akkorde durch eine „abgerissene Intermittenz" charakterisiert.

„Abgerissene Intermittenz" ist offenbar das Gegenteil von Stetigkeit und ist nach Tyndall Ursache des unangenehmen Eindruckes starker Dissonanzen. Da nun die konsonanten Intervalle durch eine entgegengesetzte Wohlgefälligkeit sich auszeichnen, so mufs diesen, im Gegensatz zur Unstetigkeit der dissonanten Intervalle, eine gewisse akustische Stetigkeit zukommen, was auch das musikalische Gehör bezeugt. Wir sehen also, dafs zwischen der Wohlgefälligkeit im optischen und akustischen Gebiete, wenn man der Sache tiefer auf den Grund geht, kein Widerstreit sondern vollkommene Harmonie besteht; in beiden Gebieten ist Stetigkeit ein Grund der Wohlgefälligkeit. Dafs Stetigkeit ein Moment der Wohlgefälligkeit ist, liefse sich auch noch an anderen Objekten oder Erfahrungen zeigen. Ich erinnere nur kurz daran, dafs jedermann einen fliefsenden Vortrag schöner findet, als einen stockenden und zerhackten, und dafs es für einen Schlittschuhläufer eine wahre Lust ist, auf spiegelglatter Eisfläche pfeilschnell dahinzugleiten, während das Fahren auf holperiger Bahn bekanntlich viel weniger angenehm ist.

Da ich nun — das ist der Schlufs aus dem soeben Gesagten — sowohl den goldenen Schnitt, als auch die musikalischen Intervalle, wo ich von dem ästhetischen Werte dieser Verhältnisse spreche, wegen einer bei beiderlei Verhältnissen gemeinsam vorkommenden Eigenschaft, nämlich wegen der Stetigkeit gelobt habe, so bin ich mir vollkommen konsequent geblieben und der Vorwurf der Inkonsequenz fällt auf den Kritiker zurück, weil er über den Grund der Wohlgefälligkeit der Intervalle eine irrtümliche Meinung hatte, indem er die Rationalität für die Ursache des Wohlklangs hielt. Ich habe jetzt noch über die ironischen Worte: „Am Ende liefsen sich wohl gar beim Elephanten die Intervalle nachweisen, weil er die Klaviertasten liefert“, etwas weniges zu bemerken.

Da Rezensent sagt: „Am Ende liefsen sich wohl gar beim Elephanten die Intervalle nachweisen“, so teile ich ihm mit, dafs er — trotz aller sonstigen Fehlgriffe — dieses Mal in der Ironie fast die richtige Taste getroffen hat, freilich nicht deshalb, weil der Elephant die Klaviertasten liefert. Es steht nämlich auf der letzten Seite meines Buches, im Nachtrage, gedruckt zu lesen, dafs ich allerdings auch Elephantenknochen hinsichtlich der Proportionen untersucht habe, nicht weil der Elephant die Klaviertasten liefert, sondern weil er ein Naturobjekt ist. Von vergleichender oder kombinatorischer Naturforschung scheint Rezensent keine, oder eine höchst sonderbare Vorstellung zu haben. Die Vergleichung von Dingen, deren Verwandtschaft nicht auf flacher Hand liegt, erscheint ihm als Unbesonnenheit oder Absurdität.

Sollte er etwa einmal in Keplers Werken (Bd. I pag. 140 ff.) die Parallele, die dort zwischen den fünf regulären Körpern der Geometrie und fünf konsonanten Intervallen derselben Oktave gezogen ist, lesen, so wird ihm wahrscheinlich diese Vergleichung ebenso toll vorkommen, wie die Hypothesen Keplers.

Es wäre zwar noch manches andere gegen jene Rezension zu sagen, doch mag dieses vorläufig genügen, nur ist noch zu bemerken, dafs Rezensent selbst eine Behauptung, dafs nämlich S. 51 meines Buches ein mathematischer Fehler stehe, berichtigt hat. Ferner hat gegen die weitere Behauptung, es sei in meinem Buche Falsches in bunter Mischung mit Wahrem enthalten, der Verfasser eine Abwehr, resp. Berichtigung im „Westfälischen Merkur“ veröffentlicht.

Nachdem Herr Plafsmann im „Westfäl. Merkur“ Nr. 19 seine frühere Behauptung, dafs in meinem Buche S. 51 ein mathematischer Fehler sei, berichtiget hat, machte derselbe in Nr. 27 des Merkur den Versuch, mir eine astronomische Unrichtigkeit nachzuweisen. Ich soll nämlich S. 88 meines Buches dem Saturn einen viel zu kleinen und dem inneren Rande des Ringes einen viel zu grofsen Durchmesser gegeben haben. Begründet wird diese Behauptung durch Hinweis auf die Bestimmungen der betreffenden Gröfsen durch beide Struve. Der Sachverhalt ist nun einfach dieser. Aufser den beiden Struve haben auch Bessel und Kaiser in Holland die betreffenden Gröfsen bestimmt und verschiedene Werte erhalten; Bessels Wert ist der kleinste, Struves der gröfste, der von Kaiser steht in der Mitte und für letztern hat Valentiner, Direktor der Sternwarte in Karlsruhe, sich entschieden in dem Buche Astronomische Bilder (Leipzig, 1881. S. 192. 199); aus diesem Buche sind meine Data entnommen, haben also jedenfalls zwei astronomische Autoritäten, Kaiser und Valentiner, für sich. Plafsmann müfste also erst beweisen, dafs die Data von Kaiser und Valentiner falsch seien.

Ferner bezeichnet Plafsmann das, was in meinem Buche S. 186—189 über die Analogie zwischen den Proportionen der von mir gemessenen Fingerglieder und den musikalischen Intervallen gesagt ist, als unwissenschaftlich und sieht darin sogar eine ernste Gefahr für die Wissenschaft, zu deren Abwendung er sich berufen fühlt. Die Phrase „unwissenschaftlich“, deren sich Plafsmann gegen mich bedient, verdient es, allen Rezen-

senten empfohlen zu werden, denn sie vereinigt viele Vorteile in sich; sie erweckt vor allem im Leser eine sehr günstige Vorstellung von der Wissenschaft des Rezensenten und eine möglichst ungünstige von der Wissenschaft des Rezensierten und damit ist schon etwas gewonnen, überdies ist die Phrase sehr bequem und überhebt den Rezensenten der lästigen Pflicht der Begründung seines Urteils. Übrigens mufs ich, da Plafsmann jetzt schon das zweite Mal seine Antipathie über die von mir gezogene Parallele zwischen gewissen anatomischen und musikalischen Zahlenverhältnissen ausgesprochen hat, zum Schlusse doch darauf hinweisen, dafs gerade in neuester Zeit der tiefere Zusammenhang und die Harmonie zwischen Natur und Kunst von Männern anerkannt und hervorgehoben wurde, deren Wissenschaftlichkeit Herr Plafsmann wohl kaum bezweifeln wird, so insbesondere von Hauck in dem schon erwähnten Vortrag S. 15; dann von Hultsch (Heraion und Artemision), ferner von Kapp in der Philosophie der Technik, Braunschweig 1877; neuestens von Frhr. Karl du Prel in der Sphinx, 1886, Heft I. Freilich scheint diese wissenschaftliche Strömung, die den Gegensatz zwischen Organik und Technik, Natur und Kunst zu vermitteln sucht, Herrn Plafsmann ganz unbekannt zu sein.

IV. Replik Plafsmanns.

Nochmals der goldene Schnitt.

Das Werk „Der goldene Schnitt“ von Dr. Pfeifer wurde mir im vorigen Jahr, ich glaube im Oktober, von der Redaktion des „Merkur“ zur Besprechung übersandt. Weil die Untersuchungen mich interessierten und mir auch für das gröfsere Publikum bemerkenswert erschienen, fiel meine Rezension, auch nachdem auf Wunsch des Herrn Redakteurs erhebliche Streichungen behufs Raumersparnis vorgenommen waren, noch immer verhältnismäfsig lang aus. Es wurde mit dem Lobe des Guten so wenig gekargt, wie mit dem Tadel des weniger Guten; hiervon kann jeder Leser durch Einsicht der Rezension (s. d. oben zit. Beilage zu Nr. 342) sich überzeugen. Ein besonnener Referent wird nur selten in die Lage kommen, eine Novität schlechthin zu empfehlen oder zu verwerfen.

Es versteht sich, dafs ich meine Kritik auch jetzt noch vollständig vertrete, natürlich abgesehen von einem Schreib- oder Druckfehler („mathematischer“ statt „grammatischer“), auf welchen ich durch den Verfasser brieflich aufmerksam gemacht wurde und um dessen schleunige Berichtigung ich selbstverständlich die Redaktion ersucht habe. Der Lohn für diese Loyalität war, dafs Pfeifer in seiner unten zu erwähnenden längeren Antikritik zweimal angab, ich hätte eine Behauptung berichtigt. Hierdurch wird den Lesern der Antikritik eine ungenaue Vorstellung vom Sachverhalt beigebracht. Dafs hierbei Absicht obgewaltet hat, soll nicht behauptet werden. Es sei noch bemerkt, dafs ich über die wahrscheinliche Entstehung des Versehens den Verfasser selbst in einem Briefe aufgeklärt hatte.

Dem mir gegenüber schriftlich ausgesprochenen Verlangen, meine Behauptung, dafs Falsches in dem Werke stehe, zu berichtigen, konnte ich nicht nachkommen. Dagegen schrieb ich Herrn Pfeifer, diese Behauptung beziehe sich besonders auf den astronomischen und den musikalischen Teil, und ich sei bereit, über alle Fragen mit ihm zu korrespondieren. Man sieht hieraus, dafs es keineswegs meine Absicht war, durch einen Federkrieg das Publikum zu langweilen, und dafs ich nur durch die nunmehr von Seiten Pfeifers erfolgende öffentliche Herausforderung im „Merkur“ zu meiner Replik veranlafst wurde. Wenn ich, wie dort zu lesen ist, an den Struveschen Werten für das Saturn-System festhalte, so geschieht das in Übereinstimmung mit Engelmann; das von Pfeifer in seiner Duplik zitierte Valentinersche Werk ist um nichts entscheidender. Es mufs befremden, dafs Pfeifer mir nun auch die älteren

Besselschen Werte entgegenhält, die ja nicht nur meiner Angabe, sondern auch der seinigen widersprechen. — Bessel ist übrigens seit 40 Jahren tot.

In den letzten Tagen erhielt ich nun von Pfeifer einen von ihm unterzeichneten Aufsatz „Beantwortung einiger wissenschaftlicher Fragen in Form einer Antikritik" zugesandt; derselbe steht auf der zweiten Hälfte eines Zeitungsblattes, dessen Titel und Datum fehlt; doch ist aus einigen Andeutungen zu ersehen, dafs es eine Nummer der „Augsburger Postzeitung" ist; dieselbe ist meines Erachtens zwischen dem 12. und 16. Februar erschienen. Was in dieser Antikritik über den Planeten Saturn gesagt ist, deckt sich fast wörtlich mit Pfeifers letzter Erklärung im „Merkur", so dafs ich mich auf das oben Gesagte beziehen kann. Aufserdem versucht nun Pfeifer, den Spiefs umzukehren und mir nachzuweisen, ich hätte „wissenschaftlich falsche Behauptungen vorgebracht".

Meine Besprechung begann mit zwei Sätzen, die es für bedenklich und gefährlich erklären, in der Natur bestimmten Zahlenverhältnissen nachzuforschen; es hiefs weiter:

„So hat Kepler, ehe er die nach ihm benannten Gesetze auffand, die tollsten Hypothesen erfunden, um die Entfernungen und Umlaufszeiten der Wandelsterne in ein System zu bringen. Aber gerade das Beispiel Keplers, der nach vielen vergeblichen Versuchen endlich zur Wahrheit durchdrang, zeigt uns, dafs derartige Arbeiten nicht absolut wegzuweisen sind, auch wenn man vieles Unrichtige in ihnen auffinden sollte. Aus diesem Gesichtspunkte möchten wir die vorliegende interessante Schrift auffassen. . . ."

Ein anderer hätte sich vielleicht angenehm dadurch berührt gefunden, dafs seine Arbeiten in dieser Weise mit denen eines der gröfsten Geister verglichen wurden; nicht so unser Autor. Der Leser wird billig erstaunt sein, zu vernehmen, dafs Pfeifer seinen „berühmten Landsmann" Kepler gegen mich in Schutz zu nehmen sucht.

Der gesperrte Satz oben zeigt ja deutlich, wie ich über Kepler denke. Letzterer bedarf also der Verteidigung Pfeifers so wenig als mein „berühmter Landsmann" Bessel, auch wenn dessen Saturns-Berechnung jetzt aufgegeben wird. — Auf einer weiteren Ignorierung jenes mit „Aber" beginnenden Satzes beruht die Entbehrlichkeit des nun folgenden historischen Nachweises, dafs unter Umständen der mechanische Gesichtspunkt erst später ins Auge zu fassen ist. Das entspricht ja gerade dem, was ich selbst sage; mithin charakterisiert sich der erste Teil der Antikritik als ein — Windmühlenkampf.

Pfeifer bestreitet nunmehr meinen Satz, „dafs die Schönheit der (musikalischen) Intervalle auf der Rationalität der Schwingungsverhältnisse beruht". Das Urteil über diese meine Behauptung will ich jedem unterrichteten Physiker überlassen und abwarten, wer sich auf Pfeifers Seite stellen wird. Dafs auch bei den Dissonanzen Rationalität stattfindet, thut nichts zur Sache, da ich von Intervallen und nicht von Consonanzen geredet habe. Doch sei zur Aufklärung der Leser, die für diese Frage sich interessieren, noch angeführt, dafs die Begriffe rational, irrational, kommensurabel, inkommensurabel in der Erfahrungs-Wissenschaft die Bedeutung nicht haben und nicht haben können, wie in der reinen Mathematik. In der Physik wird man zwei Gröfsen kommensurabel und ihr Verhältnis rational nennen, wenn letzteres innerhalb der Genauigkeits-Grenzen der Beobachtung sich durch kleine Zahlen angeben läfst. Nur unter dieser Annahme hat es ja überhaupt einen Sinn, wenn Pfeifer nach seinen Quellen angiebt, die Umlaufszeiten der Planeten seien inkommensurabel (S. 86 und 87; S. 85 giebt er selbst die richtige Erklärung); denn wer will behaupten, dafs sie es im streng mathematischen Sinne sind? weder ich noch Pfeifer, noch die reichlich von ihm zitierten Eideshelfer, noch sonst jemand kann sagen, dafs eines

dieser Verhältnisse mathematisch irrational sei; niemand kann beweisen, dafs es nicht ein endlicher oder periodischer Dezimalbruch ist. — In dem angedeuteten physikalischen Sinne wird jeder mathematisch Gebildete meine Behauptung über die Intervalle nehmen müssen.

Seine Vermutung, dafs die — übrigens individuell sehr veränderliche — Länge der Fingerknochen eine geheimnisvolle Beziehung zu den musikalischen Intervallen des „von der Hand gespielten" Instrumentes habe, verteidigt Pfeifer schliefslich auch hier. Die Naturforscher, welche er dabei zitiert, haben freilich Beziehungen zwischen Natur und Kunst anerkannt, wie er sagt, und ich habe die Beziehungen nirgends bestritten; ob aber eben diese Beziehung von anderen auch angenommen wird, davon sagt er nichts.

Von den Seitenblicken, welche Pfeifer besonders hier, am Schlufs seiner Antikritik, auf meine Person wirft, nehme ich hierdurch dankend Notiz. Eine nochmalige Entgegnung seinerseits wird von mir nur dann berücksichtigt werden, wenn sie in einer anerkannten Fachzeitung Aufnahme gefunden hat.

Notiz zur bayrischen Programmschau, Heft 1.

Durch Herrn Koll. Emmerich (Mühlheim) wurde der Unterzeichnete freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dafs eine seiner Bemerkungen über das Programm der Lateinschule zu Frankenthal in der bayrischen Programmschau*) der Berichtigung bedarf. Der Satz, dafs die Höhen eines Dreiecks zugleich die Winkelhalbierenden des Fufspunktendreiecks sind, läfst auch einen einfachen Beweis ohne Ähnlichkeitslehre zu: jedes der drei von einem Eckpunkt, zwei Fufspunkten und dem Höhenschnittpunkt gebildeten Vierecke ist ein Kreisviereck, und der Satz von der Gleichheit zweier Peripheriewinkel auf demselben Bogen thut dann das übrige. Hierdurch wird der sonstige Inhalt jenes Referates nicht beeinträchtigt.

Dr. S. Günther.

C. Bibliographie.

(Schlufs zu Heft 1, S. 56.)

2. Naturwissenschaften. (Neue Auflagen.)

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 9. Aufl. von Prof. Pfaundler. 1. Bd. (888 S.) Braunschweig, Vieweg. 12.

Wiedersheim, Prof. Dr., Lehrbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbeltiere, bearbeitet auf Grundlage der Entwickelungsgeschichte. 2. Aufl. (890 S.) Jena, Fischer. 24.

Zaengerle, Prof. Dr., Grundris der anorganischen Chemie, nach den neuesten Ansichten der Wissenschaft für den Unterr. an Mittelschulen bearb. 3. Aufl. (294 S.) Braunschweig, Vieweg. 2,80.

——, Grundris der anorganischen Chemie, nach den neuesten etc. 3. Aufl. (168 S.) Ebda. 1,40.

Mitteregger, Prof. Dr., Lehrb. der Chemie für Oberrealschulen. 1. Tl. Anorgan. Chemie. 3. Aufl. (278 S.) Wien, Hölder. 3.

Crüger, Dr., Naturlehre für den Unterricht in Elementarschulen. 18. Aufl. (92 S.) Lpz., Amelang. 1.

——, Schule der Physik. 12. Aufl. (674 S.) Ebda. 7.

Haestein, weil. Prof. Dr., Das Protoplasma als Träger der pflanzlichen und thierischen Lebensverrichtungen. 2. Ausg. (188 S.) Heidelberg, Winter. 3.

*) s. Heft 1, S. 49—50. D. Red.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Die höheren Schulen Norwegens.*)

Von Krumme-Braunschweig.

Von allen Staaten hat wohl Norwegen diejenige Einrichtung des höheren Schulwesens, welche den Forderungen der Jetztzeit am besten entspricht. Die gegenwärtige Organisation des norwegischen Schulwesens wurde durch das Gesetz vom 17. Juni 1869 festgestellt und stimmt vollkommen mit der in der „Täglichen Rundschau“ so nachdrücklich empfohlenen Gestaltung des deutschen Schulwesens überein, welche die Reform desselben als Ziel zu erstreben hat. Diese auf den ersten Blick überraschende Thatsache erweist sich bei näherer Prüfung durchaus nicht als besonders auffallend. Denn mögen auch die Verhältnisse in den verschiedenen Kulturstaaten stark von einander abweichen, drei Forderungen des Lebens, für welche die Einrichtung des höheren Schulwesens von entscheidender Bedeutung sind, treten überall gebieterisch in den Vordergrund.

Alle höheren Schulen müssen einen gemeinsamen Unterbau haben, damit nicht von vornherein mit der Wahl der Schule der Wahl des Berufs vorgegriffen zu werden braucht. Die Dauer des Lehrgangs ist so zu bemessen, dass der abgehende Schüler das für den Eintritt in das gewerbliche Leben geeignete Alter hat; auch muſs der Lehrplan auf einen Abschluſs berechnet und so angelegt sein, daſs der abgehende Schüler eine fruchtbare und darum auch haltbare Bildung ins Leben mitnimmt. Endlich ist in der letzten, der Vorbereitung für die Studien gewidmeten Zeit der Unterricht so einzurichten, daſs die Schüler sich mit sprachlichen oder mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern eingehender beschäftigen können. Denn nach der einen oder der anderen dieser Richtungen ist wohl durchgehends ein Schüler begabt, und daſs jemand sich sowohl mit sprachlichen als auch mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Gegenständen eingehender beschäftigen könnte, ist ganz unmöglich.

Das norwegische Schulgesetz vom 17. Juni 1869 und das dänische vom 1. April 1871 erkennen jene drei Forderungen unumwunden an und legen sie der Einrichtung ihres höheren Schulwesens zu Grunde. Die Lösung der gestellten Aufgabe ist jedoch in den beiden Ländern eine verschiedene; sie ist in Dänemark eine weniger glückliche als in Norwegen, auf dessen Schulwesen ich hier näher eingehen will.

Jeder Versuch, die Einrichtung des höheren Schulwesens zu ändern, führt sofort zu der Frage, welche Stellung die alten Sprachen bei der neuen Einrichtung einnehmen sollen. Diese Frage war denn auch der Angelpunkt in den Verhandlungen des norwegischen Stortings, die schlieſslich zu dem Gesetze von 1869 führten. Obgleich diese Verhandlungen

---

*) Mit gütiger Erlaubnis des Verfassers abgedruckt aus der „Täglichen Rundschau“ Unterhaltungsbeilage) Nr. 300 (1886). Die Red.

auch jetzt noch von hohem Interesse für deutsche Leser sind, so will ich doch hier nicht näher auf dieselben eingehen, umsoweniger, als alles Wesentliche in den Verhandlungen der schwedischen zweiten Kammer sich wiederfindet, die in der Schrift von Dr. H. Klinghardt, „Das höhere Schulwesen Schwedens“, Leipzig 1887, Klinkhardt, eingehende Berücksichtigung gefunden haben.

Nur will ich nicht unterlassen, eine charakteristische Aufserung des damaligen Odelstingspräsidenten Johann Sverdrup, des jetzigen Ministerpräsidenten, hier wiederzugeben. „Die klassische Bildung“, führte Sverdrup aus, „hat ehedem der germanischen ein Obdach gewährt. Die Letztere hat lange neben der klassischen bestanden und wird ihrerzeit hoch über dieselbe hinausragen. Dann wird es wie eine alte Sage klingen, dafs man einstens es für nötig hielt, seine Zuflucht zu den alten Sprachen zu nehmen, um sich die höhere allgemeine Bildung anzueignen. Nur durch die Entwickelung ihrer angeerbten Eigenschaften können die Völker etwas Gesundes hervorbringen; alles andere wird sich nur als schlechte Kopie bewähren. In diesem Sinne ist die Rolle aufzufassen, welche die alten Sprachen gespielt haben. Wir sind ein auf unseren eigenen Boden aufgewachsenes Volk und haben jetzt nicht mehr nötig, unsere Zivilisation von den Griechen und Römern zu borgen.“ Im weiteren Verlaufe seiner Rede sprach Sverdrup seine Ansicht dahin aus, dafs das Lateinische auch fernerhin gelehrt werden solle, dagegen wollte er das Griechische aus dem Lehrplane der höheren Schulen verbannt wissen. Diese letzte Forderung fand jedoch in dem Gesetze keine Berücksichtigung.

Die Grundlage des gesamten höheren Schulwesens bildet in Norwegen die Mittelschule. „Sie ist die Vorschule des Gymnasiums (des Lateingymnasiums sowohl als des Realgymnasiums); zugleich soll sie den Schülern, welche aus der Mittelschule ins Leben übergehen, eine abgeschlossene und auf ihre Bedürfnisse berechnete allgemeine Bildung geben. Die Mittelschule soll einen sechsjährigen Lehrgang haben.“

I.

Lehrplan der Mittelschule.

(R = Reallinie, L = Lateinlinie.)

Klasse	I.	II.	III.	IV. R	IV. L	V. R	V. L	VI. R	VI. L
Normales Alter beim Eintritte	*9*	*10*	*11*	*12*		*13*		*14* Jahre	
1. Religion	3	3	3	2		2		2	
2. Norwegisch	8	5	5	4		3		3	
3. Deutsch	—	6	5	4		4	3	4	3
4. Englisch	—	—	—	5	—	5	—	5	—
5. Lateinisch	—	—	—	—	7	—	7	—	7
6. Geschichte	3	3	4	3		3		3	
7. Erdkunde	4	2	2	2		2		2	
8. Naturkunde	—	2	2	2		3		2	
9. Rechnen u. Mathematik	4	4	5	6		5		6	
10. Zeichnen	—	2	2	2	—	1	—	1	—
11. Schreiben	4	3	2	—		—		—	
Im Ganzen .	26	30	30	30		28		28	

In V. und VI. sind 2 Stunden Französisch wahlfrei.

Die Forderungen bei der Aufnahme in die unterste Klasse sind so ziemlich dieselben wie bei uns.

Wer später ins Lateingymnasium übergehen will (der Latinist), erhält von der vierten Klasse ab besonderen Unterricht im Lateinischen, wie denn auch alle übrigen (die Realisten) von derselben Klasse ab im Eng-

lischen und im Zeichnen besonders unterrichtet werden; der Unterricht in allen übrigen Fächern ist gemeinsam.

Auf den ersten Blick erscheint es als ein bedenklicher Übelstand, dafs ein Schüler sich bereits im Alter von 12 Jahren entscheiden mufs, ob er später das Lateingymnasium oder das Realgymnasium besuchen will. Dieser Übelstand ist indefs unvermeidlich, wenn für die alten Sprachen in „der Lateinlinie" der erforderliche Raum geschafft werden soll. Das Bedenkliche der Mafsregel wird aber dadurch gemildert, dafs den vom Realgymnasium Abgehenden alle Studien mit Ausnahme der Theologie und Philologie zugänglich sind, wenn sie sich einer nicht schwierigen Nachprüfung im Lateinischen unterziehen, auf die ich noch weiter unten zurückkommen werde.

Wer nach dem Besuche der Mittelschule ein Gymnasium besuchen oder von den gleich namhaft zu machenden Berechtigungen Gebrauch machen will, hat sich der Mittelschulprüfung zu unterwerfen. Das durch das Bestehen dieser Prüfung zu erwerbende Reifezeugnis berechtigt zum Besuch einer technischen Fachschule, auch wird ein solches Zeugnis vom Zahnarzt verlangt. Zum Besuche der Seekadettenschule und zum Eintritte in den Telegraphendienst berechtigt nur das Zeugnis der Reallinie (im letzteren Falle mit Französisch); während derjenige, der Apotheker werden will, das Zeugnis der Lateinlinie beibringen mufs.

„Die Gymnasien — das Lateingymnasium sowohl als das Realgymnasium — sollen die Vorbildung für die Universität und für die höheren Fachschulen übernehmen. Der Unterricht soll ein in sich abgeschlossenes Ganzes bilden und von dreijähriger Dauer sein."

IIA.

Lehrplan des Lateingymnasiums.

	Klasse I.	II.	III.	
Normales Alter beim Eintritt	*15*	*16*	*17*	Jahre
1. Religion	1	1	2	
2. Norwegisch und Altnorwegisch	3	3	4	
3. Latein	9	10	9	
4. Griechisch	7	7	7	
5. Französisch	4	2	2	
6. Deutsch	1	—	—	
7. Geschichte und Erdkunde	3	3	3	
8. Mathematik	2	3	3	
Im Ganzen	30	30	30	

IIB.

Lehrplan des Realgymnasiums.

	Klasse I.	II.	III.	
Normales Alter beim Eintritt	*15*	*16*	*17*	Jahre
1. Religion	1	1	2	
2. Norwegisch und Altnorwegisch	3	4	4	
3. Englisch	4	5	5	
4. Französisch	4	2	2	
5. Deutsch	1	1	—	
6. Geschichte	3	3	3	
7. Erdkunde	1	1	2	
8. Naturwissenschaften	6	5	4	
9. Mathematik	5	6	6	
10. Zeichnen	2	2	2	
Im Ganzen	30	30	30	

Das Reifezeugnis des Lateingymnasiums berechtigt zu allen Studien. Wenn aber der vom Lateingymnasium Abgegangene in die Kriegsschule aufgenommen zu werden wünscht, so mufs er sich einer mündlichen Nachprüfung in der Mathematik, in den Naturwissenschaften und einer Prüfung im Zeichnen (nicht im Englischen) unterwerfen. Die Forderungen in diesen Fächern sind dieselben wie bei der Abgangsprüfung am Realgymnasium.

Das Reifezeugnis des Realgymnasiums berechtigt zu den realistischen Studien, zum Studium der Rechtswissenschaft und zum Besuche der Kriegsschule.*)

Wenn ein vom Realgymnasium Abgegangener Medizin studieren will, so hat er eine Nachprüfung im Lateinischen zu bestehen, wobei dieselben Forderungen gestellt werden, wie bei der Mittelschulprüfung, nicht wie bei der Abgangsprüfung am Lateingymnasium. In der mündlichen Prüfung hat der Prüfling nachzuweisen, dafs er drei Bücher aus Cäsars bellum gallicum oder civile, 24 Kapitel aus Ciceros Reden und 500 Verse von Phaedrus gelesen hat. Dazu kommt noch eine schriftliche Übersetzung eines kleinen Abschnittes aus dem Norwegischen ins Lateinische, wobei der Gebrauch eines Wörterbuches gestattet ist. Dieser Prüfung unterwerfen sich auch die meisten der vom Realgymnasium Abgegangenen, welche Rechtswissenschaft studieren wollen, einmal, weil das römische Recht bei der Staatsprüfung ein wichtiges Fach ist, dann aber auch, weil sie durch das Bestehen jener Prüfung beim examen philosophicum, welches der Staatsprüfung voraufgeht, wesentliche Erleichterungen haben.

Um Theologie und Philologie studieren zu können, mufs der vom Realgymnasium Abgegangene allerdings eine mündliche Nachprüfung im Lateinischen und im Griechischen bestehen. Die Forderungen sind dabei dieselben, wie bei der Reifeprüfung des Lateingymnasiums.

Die hier dargelegte Einrichtung des höheren Schulwesens besteht in Norwegen nun schon seit 20 Jahren, so dafs sich die Wirkung derselben einigermafsen sicher beurteilen läfst. Die statistischen Erhebungen zeigen, dafs die überwiegende Mehrzahl derjenigen, welche nach dem Besuche der Mittelschule ins Leben übergehen wollen, die Reallinie dieser Anstalt besuchen. Von den Studierenden sind zwei Drittel durch das Lateingymnasium, ein Drittel durch das Realgymnasium gegangen. Zur Erklärung dieser Erscheinung sei darauf hingewiesen, dafs die Umwandlung der früheren Lateinschulen in Lateingymnasien geringe Kosten verursachte. Wo die Verhältnisse nur eine höhere Schule gestatteten, wählte man daher das Lateingymnasium, das ja auch noch einige, wenn auch nicht erhebliche Vorteile bezüglich der Berechtigungen bietet. Realgymnasien neben Lateingymnasien kommen aber nur in gröfseren Städten vor, deren Zahl ja in Norwegen sehr gering ist. So kommt es denn, dafs nur acht Städte ein Lateingymnasium und ein Realgymnasium, und zwölf nur ein Lateingymnasium haben.

Die grundsätzliche Stellung des norwegischen Gesetzes zu den Forderungen der Jetztzeit, insbesondere zu den drei eingangs näher bezeichneten, bedingte auch eine bestimmte Stellung den alten Sprachen gegenüber, die in den Lehrplänen klar zum Ausdrucke gebracht worden ist. Das norwegische Gesetz sieht in den alten Sprachen Bildungsmittel, aber keine unersetzlichen. Jedem ist es deshalb gestattet,

*) Neuerdings wird in Frankreich die Kenntnis des Lateinischen bei der Aufnahme in die Kriegsschule von St. Cyr nicht mehr verlangt; dasselbe war bei der Militärakademie zu Woolwich schon längst der Fall. Bis zum Jahre 1885 wurde aber den Zöglingen der letzteren Gelegenheit gegeben, Latein und Griechisch weiter zu treiben und sich beim Abgange von der Akademie in diesen Fächern prüfen zu lassen. Diese Einrichtung ist durch Armeebefehl vom Januar 1885 aufgehoben worden. Griechisch und Lateinisch werden seit Anfang vorigen Jahres auf der Militärakademie in Woolwich nicht mehr gelehrt.

sich seine sprachliche Bildung durch die neueren **oder** durch die alten Sprachen anzueignen. **Fernerhin ist aber auch das Lateinische (nicht das Griechische) nach den im Gesetze niedergelegten Anschauungen eine Hilfswissenschaft für diejenigen, welche gewisse Fächer studieren. Von diesen wird ein bescheidenes Maſs von Kenntnissen im Lateinischen, nämlich nur so viel verlangt, als zum Verständnis der Fachschriften unbedingt erforderlich ist; während von denjenigen, welche das Lateinische in ihrem Berufe nicht gebrauchen, die Kenntnis desselben auch nicht verlangt wird.** In Norwegen kann demnach jemand jede Stelle im Steuer- und Zollfache, im Lehr- und Baufache und im Heere einnehmen, ohne jede Kenntnis der fremden Sprachen.

Die Grundlage des gesamten höheren Unterrichtswesens ist die Mittelschule, deren Lehrplan mit dem der preuſsischen höheren Bürgerschule übereinstimmt. Diese hat auch in Preuſsen viele Freunde, und als der Herr Minister von Goſsler im Abgeordnetenhause die höhere Bürgerschule wiederholt warm empfahl, wird ihm jeder beigepflichtet haben, der diese Schulart genauer kennt. Trotzdem kann die höhere Bürgerschule in Preuſsen nicht zu einem rechten Gedeihen kommen, weil ihre Lebensbedingungen gar zu ungünstige sind. Es genügt, daran zu erinnern, daſs das Durchschnittsgehalt eines Lehrers der höheren Bürgerschule um 630 M. geringer ist als das eines Lehrers an einer neunklassigen Schule, und daſs die höhere Bürgerschule die einzige Anstalt ist, bei der das Freiwilligenzeugnis nur durch eine Prüfung erworben werden kann. Noch schlimmer ist, daſs die höhere Bürgerschule ohne allen Zusammenhang mit den neunklassigen Schulen dasteht. Dem mit dem Reifezeugnisse von der höheren Bürgerschule Abgehenden sind die höheren Berufsarten, namentlich die Studien auf der Universität, so gut wie verschlossen. Werden diese Hindernisse beseitigt, wie es in Norwegen geschehen ist; so wird auch in Preuſsen die höhere Bürgerschule frisch und fröhlich gedeihen.

Nach den nicht wenig zahlreichen Kundgebungen in der deutschen Presse scheint die in Norwegen durch das Gesetz von 1869 geschaffene Einrichtung vielen als das Ziel vorzuschweben, das auch in Deutschland die Reformer ins Auge zu fassen haben. Ich stimme dieser Ansicht durchaus zu; aber es ist auch zu bedenken, daſs in groſsen Staaten einschneidende Reformen ungleich schwieriger durchzuführen sind als in kleinen, die ihrerseits das Versuchs- und Beobachtungsfeld für die groſsen abzugeben geeignet sind, und die mir darum auch das Interesse der deutschen Leser zu verdienen scheinen. In groſsen Staaten müssen die Reformen zwar auf ein festes Ziel gerichtet sein, darum aber doch schrittweise vor sich gehen, damit die vielen Beteiligten sich allmählich in die neuen Ansichten und Einrichtungen einleben können. Überstürzende Hast müſste notwendigerweise den Miſserfolg herbeiführen. **Ein erster überaus wichtiger Schritt wäre bei uns nun der, den Realgymnasien die Berechtigungen zuzuerkennen, welche sie in Norwegen nun schon seit beinahe 20 Jahren haben.**

Ein Gegner der Schulreform.

Aus d. Tägl. Rundschau v. 21. Novbr. 1886, Nr. 275. K.

Im allgemeinen wird es von den Verfechtern der Schulreform im Sinne einer nationalen Einheitsschule lebhaft bedauert, daſs die Gegner des Gedankens fast nirgends und niemals in Blättern mit gröſserer Öffentlichkeit den Versuch unternommen haben, ihren Standpunkt gegen die immer stärker werdende Reformströmung zu vertreten. Wie es scheint, giebt ihnen das Bewuſstsein ihres bis jetzt noch ungeschmälerten Besitzstandes die Überzeugung, daſs es sich nicht lohne, an ein bisher nur

theoretisches Bestreben Worte und Eifer zu verschwenden. Andererseits freilich hegen wir die Überzeugung und haben Beweise dafür, dafs die Reformbewegung im Kreise der Gymnasiallehrerschaft mehr Freunde und unbefangene Beurteiler hat, als man vermutet. Wie man aber auch das auffällige Schweigen der an der Reform zunächst nicht Interessierten mag erklären müssen — ob aus innerer Zustimmung oder kurzsichtiger Unterschätzung der Sachlage — wir unsererseits begrüfsen es mit Freude, unseren Lesern heute einmal die Ansichten und Behauptungen eines erklärten Gegners der Schulreform unterbreiten zu können. Wir entnehmen einem Bericht der „Nat.-Ztg.", dafs in der vorgestrigen Sitzung der philosophischen Gesellschaft Herr Lasson*) bezüglich der Frage des höheren Unterrichts folgende Thesen zur Erörterung brachte:

„1) Unser deutsches Schulwesen, wie es gegenwärtig besteht, ist das eigenartige geschichtliche Produkt unserer nationalen Kulturentwicklung und läfst wohl Verbesserungen im Einzelnen zu, aber keine grundstürzenden Änderungen in den Prinzipien. Solche Änderungen würden nicht ausführbar sein; aber schon der Versuch würde nicht unternommen werden können, ohne den nationalen Geist in seiner Entwicklung zu hemmen und zu fälschen. 2) Die Schule im eigentlichen Sinne des Wortes hat nicht Fachbildung, sondern allseitige Geistesbildung und insbesondere Disziplinierung des Verstandes, des Willens und Gemütes zum Ziele. Die höhere Schule ist nicht Vorbereitungsanstalt zur Universität und zu spezifisch wissenschaftlichem Beruf. Ihre soziale und politische Bedeutung liegt darin, dafs sie ihre Zöglinge dazu ausrüstet, dem leitenden Stande in vorbildlicher Würdigkeit angehören zu können. 3) Das wesentliche Mittel aller Schulthätigkeit ist der Sprachunterricht als die Anleitung, den Geist in seiner vornehmsten Ausdrucksform zu erfassen und im Verständnis wie im eigenen Gebrauche der sprachlichen Bezeichnungsweise Fertigkeit zu erlangen. Solche Schulung des Geistes zum Verstehen fremder Gedanken und zur kritischen Beherrschung des eigenen Gedankenganges wird am sichersten erreicht durch das Medium der antik-klassischen Sprachen und Litteraturen, an die sich jeder anderweitige Sprachunterricht anzulehnen hat. Jede Einbufse der klassischen Studien für den leitenden Stand in unserem Volke bedeutet eine Schädigung und Verkümmerung des nationalen Geistes. 4) Unter den sogenannten Realien steht die Mathematik an formal bildender Kraft den Sprachen zunächst und bildet etwa in der jetzt geltenden Ausdehnung ihre notwendige Ergänzung.**) Durch überwiegend inhaltliche Bedeutung fällt der Religions- und Geschichtsunterricht ins Gewicht; dem letzteren hat die Geographie zu dienen. Die Naturwissenschaften kommen auf jeder Art von Schulen erst an dritter Stelle in Betracht und müssen sich mit demjenigen Mafse von Raum und Kraft begnügen, das ihnen die wichtigeren Zwecke der Schule übrig lassen, und zwar dies, weil die Naturwissenschaften mit dem, wodurch sie Wissenschaften sind, für die Schule zu hoch stehen, weil sie nicht zur Natur hin, sondern von derselben weg führen und ein dem früheren Jugendalter nicht ungestraft zuzumutendes Mafs von Abstraktion (?)***) verlangen. 5) Das moderne Realgymnasium in seiner Koordination neben dem humanistischen Gymnasium ist ein geschichtlich berechtigtes Produkt unserer modernen Entwickelung. Es kann aber seine Bedeutung als Schule für den leitenden Stand nur so lange behaupten, als auch es wesentlich darauf ausgeht, humane Bildung zu erteilen und sich dafür in erster Linie des Mediums der lateinischen Sprache und Litteratur bedient."

---

*) Professor der Philosophie an der Universität Berlin. Die Red.

**) Von uns schon im J. 1867, also vor 20 J., in einem Programm eines sächs. Gymn. ausgeführt. (Vgl. Jahrg. I, S. 15). Die Red.

***) Abstraktion? Wir haben bisher immer geglaubt, ein dem Jugendalter zuzumutendes Mafs von Anschauung! Die Red.

Der Referent bemerkt hierzu:

„In der sich anschliefsenden lebhaften Debatte, an der sich die Herren Fredericbs, Pappenheim, Vogel, v. Heydebreck, Vocke, Hoffmann beteiligten, fanden diese Thesen und ihre Motivierung von mehreren Seiten Zustimmung.“

Die Redaktion der Täglichen Rundschau knüpft hieran folgende Bemerkungen:

Die Zustimmung „von mehreren Seiten“ bedeutet wohl, dafs es an Widerstand von anderen Seiten nicht fehlte. Und das ist nicht überraschend; denn an Abstraktheit, die mehrfach geradezu an Unverständlichkeit grenzt, lassen die obigen Thesen kaum etwas zu wünschen; auch in Verkennung der offenkundigsten Thatsachen unseres Bildungstandes leisten sie das Menschenmögliche. Wir möchten sagen: — wenn ein chinesischer Mandarin all das verstaubte und verknöcherte Wesen, welches wir mit dem Wort „Chinesentum“ zu bezeichnen pflegen, gegen eine Reformbewegung in Schutz zu nehmen hätte, so würde er in ähnlich unbewiesenen Behauptungen die Interessen des „leitenden Standes in vorbildlicher Würdigkeit“ wahrnehmen, wie es hier geschehen ist. Herr Lasson prägt unbewiesenermafsen aus dem bisherigen Geiste der höheren Schulen den „nationalen Geist“, der nicht gehemmt und gefälscht werden dürfe. Dafs der nationale Geist durch die Thatsachen des Jahres 1870, durch ihre Folgerungen für die Weltmachtstellung des Deutschtums und endlich durch die immer dringender werdende soziale Frage neue Aufgaben erhalten haben könnte, die er u. a. mit Hilfe einer verbesserten Schule lösen oder auf Kosten unserer Existenz ungelöst lassen mufs — davon scheint Herrn Lasson noch gar keine Ahnung aufgegangen zu sein. Ihm ist die Schule „im eigentlichen Sinne“ (d. h. wohl in den Wolken?) nicht Vorbereitungsanstalt für die Universität, sondern sie rüstet ihre Zöglinge dazu aus, dafs sie dem „leitenden Stande in vorbildlicher Würdigkeit angehören“ können. Dafs diese Schulen aus Gründen lokaler Art und aus Rücksicht auf das Einjährig-Freiwilligen-Zeugnis thatsächlich eine stets wachsende Masse von jungen Leuten ohne jede abgeschlossene Bildung, also Halbgebildete mit aller Leistungsunfähigkeit und Arbeitsunlust, die solchen eigen ist, erzeugen, scheint Herrn Lasson nicht zu bekümmern. Ihm ist der antik-klassische Unterricht, an welchen sich „jeder anderweitige Sprachunterricht anzulehnen hat“, noch immer die einzig richtige Grundlage der höheren Bildung; selbst das Realgymnasium ist ihm nur insofern brauchbar, als es sich um den lateinischen Unterricht verdient macht. Und wiederum macht es ihn nicht im Geringsten stutzig, dafs thatsächlich bei dieser Methode der Spracherlernung gut 75 Prozent aller Schüler weder in den klassischen Sprachen, noch in den neueren, irgend welche nennenswerte Fertigkeit erlangen und dafs sie thatsächlich von der modernen Litteratur noch weniger Bruchstücke kennen, als von der klassischen, obgleich diese Bruchstücke nur sehr klein sind. — Wir können uns unter Hinweis auf die mannigfachen Erörterungen, die in diesen Blättern zu Gunsten einer wahrhaft nationalen, d. h. den Bedürfnissen des neuen Zeitgeistes und des neuen Deutschlands angepafsten Schulreform stattgefunden haben, auf obige kurze Bemerkungen beschränken und überlassen fachmännischen Federn die eingehende Widerlegung. Höchst bemerkenswert aber scheint es und fast ein stärkerer Beweis für die Dringlichkeit einer Schulreform, als alle bekannten thatsächlichen Übelstände, dafs ein deutscher Gelehrter auf die guten Gründe der Reformen mit diesen über alles Mafs abstrakten und nichtssagenden Thesen antworten konnte.

Dr. Friedrich Lange,
Redakteur der Täglichen Rundschau.

Zur Beglückwünschung eines Gelehrten.*)

Es werden bald 25 Jahre, dafs Eugen Dühring für Vermehrung und Reform der Wissenschaft in mehreren Gebieten als Denker und Philosoph, als Nationalökonom, als Mathematiker und Naturwissenschafter und nicht zum wenigsten als populärer und nationaler Schriftsteller und zwar mit immer neuer Hervorkehrung frischer Kräfte des Geistes und Charakters gewirkt hat. In jedem der letzten zehn Jahre sind entweder neue Auflagen früherer oder ganz neue Werke von ihm erschienen. Den abgesetzten circa vierzigtausend Bänden entspricht eine ansehnliche Zahl von überall hin zerstreuten Anhängern. Eine Beglückwünschungsadresse zu dem 25jährigen Wirken wird an ihn erlassen werden, nicht in der Absicht einer Ceremonie, sondern als Gelegenheit für Viele, aus der gegenseitigen Isolierung herauszutreten.

Wer sich in diesem Sinne, sei es zunächst durch Unterzeichnung, sei es durch Aufsuchung anderer Anhänger, beteiligen will, wird ersucht, namentlich behufs Übermittlung von Exemplaren der bereits gedruckten und in weiter Cirkulation begriffenen Adresse, dem Korrespondenten der unterzeichneten Gruppe, Dr. Emil Döll, Sidonienstr. 40 Mitteilung zu machen.

S. Steinhauser, Oberamtspfleger in Waldsee i W.,
Hermann Regen, Bankkassierer in Berlin, Waldemarstr. 14,
Fritz Krull, Civilingenieur und Maschinenfabrikant in Helmstedt i. Br.,
Johannes Leonhard, Dr. Karl Rübel und Georg Bert, Oberlehrer am Realgymnasium zu Dortmund,
Professor Dr. Ludwig Külp, in Darmstadt,
Dr. Emil Döll, ord. Lehrer an der Handelsschule zu Leipzig.

Nekrolog.

(Emsmann †.)

Am 26. Dezember v. J. verschied zu Frankfurt a/O. der durch seine litterarische Bethätigung weiteren Kreisen wohlbekannte Oberlehrer Professor Dr. Gustav Emsmann. Derselbe — ein jüngerer Bruder des zu Stettin lebenden Oberlehrers Professor Dr. Hugo Emsmann — wurde am 6. Dezember 1820 zu Eckartsberga in der Provinz Sachsen geboren.

Durch die öffentliche Schule seiner Vaterstadt vorgebildet, bezog er im J. 1834 das Domgymnasium zu Naumburg a/S., ein Jahr später die Landesschule Pforta, die er Ostern 1841 mit dem Maturitätszeugnisse verliefs. Er widmete sich nun an den Universitäten Leipzig, Halle und Berlin vorzugsweise dem Studium der Mathematik und Physik, bestand gegen Weihnachten 1844 zu Berlin das Examen *pro facultate docendi* und promovierte kurze Zeit darauf in Leipzig zum Doktor der Philosophie. Nach Absolvierung des Probejahres am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Berlin, wurde er Collaborator an dem Erziehungsinstitute zu Jenkau bei Danzig, sodann Hilfslehrer an der Königlichen Realschule zu Berlin, und darauf Adjunkt an dem Königlichen Pädagogium zu Putbus, — in jeder dieser 3 Stellungen nur kurze Zeit verweilend. Am 1. Juli 1847 nahm er die Stelle eines ordentlichen Lehrers an der damaligen berechtigten höheren Bürgerschule, dem jetzigen Realgymnasium, zu Frankfurt a/O. an. Nahezu 4 Dezennien wirkte er ununterbrochen und unermüdlich an dieser Anstalt. Im Jahre 1859 wurde er zum Oberlehrer befördert und im Jahre 1882 erhielt er den Titel Professor.

Die Zahl der von ihm veröffentlichten Arbeiten ist ziemlich grofs; fast alle verfolgen mehr den Zweck, dem Unterrichte in der Schule zu dienen, als dem, die Wissenschaft direkt zu fördern. Als die hauptsäch-

*) Aus der Beilage zur „Naturw. Rundschau". Nr. 52 (1886).

lichsten seien erwähnt: Über einen merkwürdigen Punkt im Dreieck. Halle 1854; Fünfzehn geometrische Aufgaben nebst ihren ausführlich erörterten Lösungen. Halle 1855; Vorbereitender Kursus der Experimentalphysik. Frankfurt a/O. 1863; Höhere algebraische Gleichungen. Halle 1867; Sechzehn mathematisch-physikalische Probleme. Leipzig 1869; vor allen aber seine: Mathematische Excursionen, Halle 1872; eine Lehrern und Schülern höchst willkommene Zusammenstellung einer grofsen Zahl eingehend erörterter Probleme aus allen Gebieten der elementaren Mathematik, einschliefslich der analytischen Geometrie. Aufserdem veröffentlichte er mehrere recht fleifsige Arbeiten in den Schulprogrammen und eine beträchtliche Zahl beachtenswerter Artikel in wissenschaftlichen Zeischriften, wie in Grunerts Archiv der Math. u. Phys., in den Berliner Jahrbüchern für Erziehg. u. Unterr., und besonders in dieser Zeitschrift. Hier machte er auch u. a. im Anschlufs an seine Abhandlung: Zur Teilung des Winkels (Jahrg. VII, 1876*) zuerst Mitteilung von dem von ihm konstruierten, sehr einfachen Trisektor; Zeichnung und Gebrauchsanweisung gab er später (Jahrg. VIII, 1877**). Dieser Trisektor, beruhend auf einer Eigenschaft des Descartesschen Blattes, ist sehr leicht zu handhaben und läfst sich ohne nennenswerte Kosten mit dem Transporteur des Reifszeuges verbinden.

Ein sehnlicher Wunsch des Professor Dr. Emsmann war der, auch das fünfte Dezennium seiner Berufsthätigkeit in kräftiger Gesundheit vollenden und sich dann in den wohlverdienten Ruhestand zurückziehen zu können. Leider sollte dieser Wunsch nicht in Erfüllung gehen. Zu Anfang Dezember v. J. streckte den bisher noch rüstigen und thatkräftigen Mann ein Schlaganfall auf das Krankenlager. Als er sich bereits scheinbar wieder auf dem Wege der Genesung befand, ereilte ihn am 26. Dezember ein zweiter Schlaganfall, der seinem Leben ein jähes Ende machte und so ein segensreiches Wirken plötzlich zum Abschlufs brachte.

H. Dreger,
Realgymnasiallehrer.

Zu den höchsten Bauwerken der Erde.

(Vergl. Bd. XIV, 478.)

Durch Hrn. Lycealprofessor Pfeifer in Dillingen (Baiern) gehen uns hierüber folgende Notizen zu:

1) Die Pyramiden.

Clemens Riefler, Fabrikant mathem. Mefsinstrumente, der i. J. 1885 in Agypten bei den Pyramiden war, macht folgende Mafsangaben über die Höhe einiger Pyramiden:

1. Pyramide des Cheops: Länge der Basis 233 m
   (Senkr.) Höhe 146 m
   (also 9 m mehr, als in Bd. XIV, 478 angegeben).
2. Pyramide des Cephren: Länge der Basis 215,7 m
   Höhe 138,44 m

2) Die Höhe der Kölner Domtürme.

In Jahrgang XIV. S. 478 NB. hat die verehrliche Redaktion dieser Zeitschrift darauf aufmerksam gemacht, dafs in den Angaben der Höhen der höchsten Bauwerke der Erde Differenzen bestehen. Die Höhe der Kölner Domtürme ist z. B. in dieser Zeitschrift selbst in XIII, 90 zu 157 m, dagegen in XIV, 478 zu 156 m angegeben. Das ist eine Differenz von 1 Meter und zu grofs, als dafs sie aus Ungenauigkeit der Messungen zu erklären wäre. Der scheinbare Widerspruch löst sich sehr einfach. Bei genauer und wiederholter Messung der sehr grofsen Aufrisse der Türme im

---

*) S. 107 u. 292. — **) S. 42. —D. Red.

Werke von **Schmitz** („Der Dom zu Köln") zeigt es sich nämlich, dafs die Höhe der Türme, wenn vom äufseren, vor dem Dome befindlichen Pflaster an gemessen wird, wenigstens volle 157 m, vielleicht noch ein wenig darüber, wenn aber vom inneren Kirchenpflaster, oder von der Horizontallinie, wo die Turmpfeiler ansetzen, gemessen wird, 156 m beträgt. Es sind also beide Höhenangaben richtig. Beide Angaben bieten überdies ein mathematisches Interesse und zwar die Angabe von 157 m dieses, dafs diese Höhe der Türme durch Rektifikation des Umfanges eines dem Kölner Domchore zu Grunde liegenden Kreises sich ableiten läfst.*) Der Chor des Kölner Domes ist aus sieben Seiten eines regulären Zwölfeckes konstruiert. Wenn man nun den Kreis, der diesem Zwölfeck zu Grunde liegt, vom Centrum des Chores aus vollständig konstruiert und die Peripherie gerade so grofs macht, dafs sie die äufsersten Ecken der (kleinen) Chorstrebepfeiler berührt und hiermit zugleich den ganzen Chorbau umfafst, dann beträgt der Radius dieses Kreises gerade 25 m und folglich der rektifizierte Umfang des Kreises $50 \text{ m} \times 3{,}14159 \ldots = 157{,}079$ m. Es ist also die Turmhöhe der rektifizierte Umfang des vervollständigten Chorkreises — ob infolge von Absicht oder von Zufall, mag dahin gestellt sein. Die andere Höhenangabe (156 m) läfst sich mathematisch (bis auf eine Differenz von anderthalb Zoll) ableiten, wenn man im Grundrifs eine Diagonale zieht. Wie diese zu ziehen, werde ich mitteilen, wenn diese Mitteilung Interesse findet.**)

Fragekasten.

80) K. W. in Brbg. In welchen deutschen Schriften, mit Ausnahme von Cantors Gesch. d. Math. und Kästners geom. Abhandl. ist Geschichtliches über die Rektifikation des Kreises und Quadratur der Kreisfläche in einiger Ausführlichkeit geboten? (Hier dürften gewifs manche Programme zu nennen sein. Die Redaktion.)

81) Derselbe. Dr. A. Sonnenburg teilt in seiner „Ebenen Geometrie", S. 223, mit, dafs eine Näherungs-Zeichnung für π von Euler und Olbers vorhanden sei. Ist einer der geehrten Leser in der Lage, diese Zeichnung näher anzugeben?

82) Derselbe. Nach R. v. Schleusings „Versuch einer näherungsweisen geometrischen Darstellung der $\sqrt{\pi}$", besprochen von Herrn Prof. Günther in VIII, 229 dieser Zeitschr., beträgt die auf diesem Wege erhaltene Seite der der Kreisfläche inhaltsgleichen Quadratfläche um etwa 19 Hundertmillionstel des Halbmessers weniger, als die wahre Wurzel aus π. Zeichnet man dagegen ein rechtwinkl. Dreieck, dessen eine Kathete die Seite des umgeschriebenen regelmäfsigen Fünfecks und dessen andere gleich dem um $\frac{1}{10} \cdot \frac{639}{1000} r$ verlängerten kleinen Halbmesser des einge-

*) Diese Fassung („sich ableiten läfst") gab, wie zu erwarten war, Veranlassung zu einem Mifsverständnis, da wir nicht begreifen konnten, wie man aus dem Umfang der Grundfläche einer Pyramide (eines Kegels) allein, ohne jede andere Daten, die Höhe derselben finden könne. Wir frugen daher bei dem Herrn Verfasser an, wer (oder wie man) dieses Kunststück fertig gebracht habe. Der Herr Verfasser antwortete uns hierauf: „Wenn der Umfang des Kreises, der den Chorbau des Kölner Domes umfasst, rektifiziert wird, so ist die so erhaltene Dimension gleich der Höhe der Türme, nämlich = 157 m. Um dieses sagen zu können, brauchte ich nichts weiter zu wissen, als den Radius jenes Kreises, der sich aus dem Plan entnehmen läfst. Die wirkliche Turmhöhe konnte ich ja ebenfalls aus den Aufrissen entnehmen. Es war nur zu zeigen, dafs die auf anderem Wege gefundene Dimension mit derjenigen der Türme übereinstimmt."

Es ist also hiernach (wie der Herr Verfasser später auch selbst bemerkt) entweder Zufall (oder Absicht des Baumeisters?) gewesen, dafs die Länge jenes Grundkreises = der Turmhöhe wurde, aber dann war der Ausdruck „sich ableiten läfst" falsch angewandt. Übrigens liegt jener Grundkreis gar nicht einmal in der Grundfläche der Türme; denn die Türme stehen nicht über dem Chor, sondern erheben sich an der Westfaçade. D. Red.

**) Im Zusammenhange mit dieser Mitteilung steht die Frage (Nr. 83) des Verf. im „Fragekasten" dieses Heftes. Die Red.

schriebenen regelmäfsigen Zehnecks ist, dann liefert die Hypotenuse dieses Dreiecks einen Wert, der nur um etwa 7 Hundertmillionstel des Halbmessers von $r\sqrt{\pi}$ abweicht. Ist diese Näherungs-Zeichnung für $\sqrt{\pi}$ bereits bekannt?

33) Pf. in D. Ist seit Vollendung des Kölner Doms irgend eine Publikation erschienen, welche speziell und eingehend die mathematischen Verhältnisse dieses Bauwerks behandelt? (Die vorwiegend historischen Schriften über den Dom sind dem Fragesteller bekannt.)

34) B. v. G. (Schweden). Für welches x ist

$$(n^2 + n + 1)^x - (n + 1)^x - n^x = \text{Quadrat?}$$

(würde sich vielleicht für's Aufg.-Repert. eignen. D. Red.)

35) H. i. L. Was ist richtiger: In einer Zahl aufgehen oder in eine? In einem wissenschaftl. Werke eines Mathematikers fanden wir letztere Schreibweise.

36) M. i. N. Wer kann über Dr. F. Schaffers-Bern Apparat zur Luftprüfung (zu beziehen v. Desaga-Heidelberg) Auskunft geben? Eine Besprechung desselben wäre zu wünschen.

37) Y. in Ung.-Ostra (Name unleserlich). a., Kann man das Alter der Vögel, speciell der Hausarten bestimmen? Und welche sind die Merkmale? b., Welches ist die neueste und beste wissenschaftl. Abhandlung über den Cholera-Bacillus?

38) F. i. Schl. Wie erklärt es sich, dafs in einer entkorkten Selterswasserflasche, in einem eingegossenen Champagnerglase, in einer unter dem Luftpumpenrecipienten oder sonst infolge Druckverminderung siedenden Wassermasse (beim Sieden über Feuer könnte zunächst an die unmittelbare Nachbarschaft der Flamme gedacht werden) und in ähnlichen Fällen die Gasentwicklung vom Boden des Gefäfses ausgeht?

39) Vom Herausgeber. In der bisher von Krebs-Frankfurt redigierten und bei Enke-Stutgart erscheinenden Zeitschrift „Humboldt", welche seit Neujahr mit dem „Kosmos" verschmolzen ist und von Dr. O. Dammer-Berlin redigiert wird, ist eine unserm Fragekasten ähnliche Abteilung „Verkehr, Fragen und Anregungen" eingerichtet worden, welche im Januarhefte 12 Nummern enthält. Unter diesen ist auch eine Frage (wie es scheint von einem Dilettanten in der Physik), die aber eine hübsche Frage für Schüler abgiebt: Wenn man auf die eine Schale einer Waage ein Gefäfs mit Wasser setzt und tariert, sodann in das Gefäfs einen (lebendigen*)) Fisch wirft, um ihn zu wägen, würde dann sein Gewicht (auf Grund des Archimed. Prinzips) nicht zu leicht gefunden werden? (Vergl. Weinhold, Vorsch. d. Exp.-Phys. 3. Aufl. S. 133) Es liefse sich aber hieran die Frage knüpfen: Welchen Einflufs hat auf das Gewicht des Fisches die durch das Athmen des Thieres bewirkte Volumenveränderung?

40) Vom Herausgeber. An die Herren Chemiker unter den Lehrern: *a*) Wie bewahrt man bei der traurigen Beschaffenheit der jetzt käuflichen säurehaltigen und stahlangreifenden Tintensorten Stahlfedern nach dem Gebrauch vor dem zu schnellen Verderben (Rosten)? Giebt es nicht ein anderes Mittel als das jedesmalige sorgfältige und zeitraubende Abwischen nach dem Gebrauch? *b*) Wie beseitigt man am leichtesten und sichersten Petroleumgeruch von den Händen (Fingern)? Essig soll ein Mittel sein. Giebt es ein besseres?

NB. Die Herren Fragesteller werden ersucht, ihre Fragen recht leserlich zu schreiben, weil sie denselben in der Regel zur Korrektur nicht zugesandt werden.

---

*) Nur wenn der Fisch lebendig ist, hat diese Manipulation einen Sinn. Einen toten Fisch wiegt man ohne Wassergefäfs.

Berichtigungen.

In Heft 1, S. 40 ds. Ztschr. mufs es im Titel des Güntherschen Werkes statt Physik heifsen Geophysik.

Zum Jubiläumsbericht S. 64 etc.

S. 65, Z. 7 v. u. lies Lahmeyer statt Lohmeyer.

„ 66, „ 2 „ „ „ bestieg „ bestig.

Zu „ 65, „ 22 ist zu bemerken, dafs Lichtenstein nach Niederschrift des Berichts, Ende v. J. verstorben ist.

Bezügl. unserer Fufsnote in diesem Bericht lauf. Jahrg. Heft 1, S. 64 („Kassel, Orthogr. des Berichterstatters") erklärt uns der Berichter, „dafs die Schulorthographie, die wir unserer Zeitschrift zu Grunde legen, für ihn nur bei der Korrektur der Schülerhefte mafsgebend sei."

Hierauf erlauben wir uns zu bemerken, dafs kein Mitarbeiter, wenn einmal die Zeitschrift in neuer Orthographie gedruckt wird, das Recht hat, uns seine eigene Orthographie aufzuzwingen (zu octroiren). Wir liefsen die Orthographie Kassel stehen, in der Meinung, sie sei vielleicht offiziell; sie scheint aber schwankend zu sein. Während in dem deutschen Schulkalender, der doch für uns mafsgebend sein soll, Cassel steht, schreiben Daniel-Volz (Lehrb. d. Geogr. 1885) und Guthe-Wagner (Lehrb. d. Geogr. 1883) Kassel, während das letztgenannte Buch in der alten Auflage (1879) noch Cassel schreibt. Wer hat nun Recht? Ist denn der Name einer Stadt nicht auch „ein Privateigentum, welches anzutasten niemandem zusteht", als dem Besitzer selbst? (Vgl. Schlömilch in XVII_2, 188). Darnach hat die Stadt Cassel allein über die Änderung ihrer Namensorthographie zu verfügen. Die Redaktion.

Bei der Redaktion eingelaufen.

(December 1886.)

Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. 2. T. Arithmetik d. komplexen Zahlen. Leipzig, Teubner. 1886.

Graefe, Auflösungen und Beweise der Aufgaben und Lehrsätze aus d. analyt. Geometrie. ib. 1886.

Weyr, die Elemente der projektivischen Geometrie. 2. Heft. Wien, Braumüller. 1887.

Müller, (Metz) die Elemente der Planimetrie. 2. Aufl. Metz-Diedenhofen. Scriba (ohne Jahreszahl.)

— Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? ib.

Kröge, Leitfaden f. d. Geometrie-Unterricht in Mittelschulen und gehobenen Volksschulen. Hamburg, O. Meifsner. 1886.

Klein, Leitfaden u. Repetitorium d. Physik etc. (mit Einschlufs d. Chemie u. mathem. Geogr.) Leipzig, Teubner. 1886.

Graf, der Mathematiker Joh. Georg Tralles (1763—1822) biogr. Skizze etc. Bern, Wyfs. 1886.

Augustin, Wegweiser für Käfersammler. Hamburg, Meifsner. 1886.

Günther, Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen. München, Ackermann. 1887.

Lehmann, Vorlesungen über Hülfsmittel und Methode des geogr. Unterrichts. 3. Heft. Halle, Tausch u. Grosse. 1886.

Zeitschriften. Paed. Archiv XXXIII, 10. — Zeitschrift f. d. R.-W. XI, 11. — C.-O. (f. d. J. d. R.-W.) XIV, 44—47. — Zeitschr. f. Schulgeogr. VIII, 2. — Bot. Monatsschr. Nr. 11—12. — Zeitschr. z. F. d. phys. Unt. III, 7.

(Januar 1887)

Burmester, Lehrbuch der Kinematik. I. Bd. (Die ebene Bewegung.) 2. Lfg. S. 257—560. (Nebst Atlas) Leipzig 1886, Felix.
Legorjü (Julie), der Handarbeits-Unterricht als Klassenunterricht. 4. unveränderte Aufl. Kassel 1882, Kay.
Astronomischer Kalender für 1887. Neue Folge. 6. Jahrg. Nach dem Muster des Littrowschen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte in Wien. Wien, Gerold.
Leuckart-Nitsche, Zoologische Wandtafeln. Lief. 17.
Mascart-Wallentin, Handbuch der statischen Elektricität. II. Bd. 1. Abt. Wien 1886, Pichlers Wtw. u. S.
Mik, Verzeichnis der Art-Namen in Schiners Fauna Austriaca. Wien, ebenda.
Mik, Leeres Herbarium mit Etiquetten in Mappe. Ebenda.
Rothe, Vollst. Verzeichnis der Schmetterlinge Österr.-Ungarns, Deutschlands und der Schweiz. Wien 1886. Ebenda.
Zeitschriften. Central-O. XIV, Nr. 50. 51. 52; XV, 1. — Ztschr. f. d. R.-W. XI, 12. — Ztschr. f. Schulgeogr. VIII, 3. — Ztschr. z. Förd. d. phys. Unterr. III, 8. — Päd. Archiv XXIX, 1.

Briefkasten.

A) Besonderer: S. i. S. B. Pr.-Sch. ist ja schon da und überdies ist die Ihrige unvollständig. Auch nicht die richtige Form! — B. i. N. (Wpr.) Sie kommen mit Ihren litter. Hinweisen zu spät. Schon gebracht im Antwortkasten XVII_8, 638. — B. i. Z. Osculation und vierp. Berührung etc. — Fr. i. Gr. Broschüre: Konvergenz d. Kugelfunktions-Reihen. — Em. Jv. i. Sofia. 1) Zur elementaren Behandlung der Bewegungsgesetze der Planeten. 2) Noch eine Auflösungsmethode der Gl. 4. Gr. 3) Geometrische Sätze und Formeln. — K. i. M. Über periodische Kettenbrüche und Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. — Kr. i. Br. Zeitungs-Art. erh. — R. i. M. „Falsche Wurzeln etc." Rh. i. L. Referat Frary (Der Kampf etc.) — S. i. Dr. Betrachtungen über das Unendliche. Über die Differentiation der Potenz etc. Beiträge zur algebr. Analysis. — S. i. Philippopel. Lehrbücher über Stereom. u. über Trigon. und Log.-Tafeln von Studnička, alle drei Bücher in bulgarischer Sprache. Es freut uns, dafs unsere Zeitschrift auch bis an die Grenze der Türkei gedrungen ist. — An die Herren Schm., P. u. P. Wie Sie sehen, schon in diesem Hefte vom Verf. selbst berichtigt. — Sch. i. P. Aufl. d. irrat. Gl. (2. Manuskr.) — Sch. i. S. Progr.-Sch. — Tr. i. B. (Livland). Quadrat- u. Kubikwurzeln aus Dezimalbrüchen. — W. i. Br. Fragen f. d. Frage-K. — W. i. Th. Stereom. Art. „Über die Körper etc."

B) Allgemeiner: 1) Wir wiederholen das im Briefkasten XVII_8, 639 (auf Anregung der Red. des pädagog. Archivs) ausgesprochene und XVII_2, 160 sub 4) wiederholte Gesuch an die Herren Mitarbeiter: in ihren für d. Z. bestimmten Artikeln nur solche Fremdwörter zu gebrauchen, die sich durch gleichwertige deutsche Ausdrücke **nicht** ersetzen lassen; doch mit dem ausdrücklichen Zusatz: dafs wir hierin **nicht radikal** vorgehen, sondern dem gemäfsigten Fortschritte huldigen.

2) Für sofort gewünschte Antworten bezw. Auskünfte bitten wir die geehrten Leser d. Z., sich immer der Antwort-Postkarten mit aufgeschriebener Adresse zu bedienen. Sie können dann versichert sein, dafs ihnen — wenn irgend möglich — die Antwort sogleich erteilt wird, da dieselbe hierdurch uns sehr erleichtert wird.

3) Wir wiederholen unsere im Allg. Briefk. (XVII_2, 159) gestellte Bitte an die Einsender von Beiträgen, ihre für d. Z. bestimmten Artikel nicht „zur Umarbeitung" zurückzuverlangen, sondern sie erst „nach Anlegung der letzten Feile und endgiltiger (definitiver) Abfassung" einzusenden, da die Rücksendung geeignet ist, den Redaktionsbetrieb zu stören.

Betrachtungen über das Unendliche.

Von Dr. O. Schlömilch, Geh. Rat a. D. in Dresden.

I. Wie ein Erbstück aus alter Zeit findet sich noch in manchen neueren Werken die Behauptung, daſs eine endliche Constante ε gegen eine unendlich wachsende Zahl ω vernachlässigt, mithin $\omega + \varepsilon$ durch das einfache ω ersetzt werden dürfe. Sonderbarer Weise ist dieser Satz niemals bewiesen worden, er scheint vielmehr als eine Art Glaubensartikel gegolten zu haben. Die Unrichtigkeit desselben läſst sich aber leicht an ganz elementaren Fällen zeigen. Z. B. wenn schon ε gegen ω vernachlässigt werden darf, so müſste um so mehr $\frac{\varepsilon}{\omega}$ gegen ω verschwinden, und dann wäre

$$\left(\omega + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 - \omega^2 = \omega^2 - \omega^2 = 0,$$

wogegen der wahre Wert 2ε beträgt. Ebenso ist nicht

$$\sqrt{\omega(\omega + \varepsilon)} - \omega = \omega - \omega = 0$$

sondern der richtige Grenzwert $= \frac{1}{2}\varepsilon$.

II. Viel häufiger und selbst in Werken mittlerer Güte begegnet man der Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$; auch diese ist geradezu falsch. Jedermann wird zugestehen, daſs sich kein bestimmter Wert von ω angeben läſst, für welchen $\frac{1}{\omega}$ „rund und nett“ gleich Null wird; wo aber keine genaue Gleichheit vorhanden ist, darf man auch das Gleichheitszeichen nicht benutzen. Darauf könnte Jemand mit hochgezogenen Augenbrauen erwidern: „ja aber, wenn ω unendlich groſs geworden ist!“ Nun, was heiſst das? Vom Unendlichgroſsen lassen sich nur zwei Definitionen geben, eine negative und eine positive. Bei der ersten hält man sich

an die sprachliche Bedeutung der Sylbe „Un“, d. h. nach Analogie von Unrecht = Nichtrecht, Unglück = Nichtglück etc. erklärt man das Unendliche für das Nichtendliche. Die Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$ lautet jetzt in wörtlicher Übersetzung: „der reciproke Wert einer nichtendlichen Zahl ist gleich Null.“ Bei der Unbestimmtheit des Begriffs „nichtendliche Zahl“ hat man damit etwas ganz Vages gesagt und höchstens eine neue Lesart des alten Satzes fertig gebracht, dafs $\frac{1}{\omega}$ für kein endliches ω verschwindet. Im Übrigen ist man so klug wie zuvor, denn von einer nichtendlichen Zahl weifs man nichts Positives und am allerwenigsten, ob der Operation des Dividierens, die für jeden endlichen Divisor ε ihre sichere Bedeutung hat, auch bei dem unbekannten Divisor Nicht-ε irgend ein vernünftiger Sinn zukommt. — Nach der zweiten Definition heifst es: „Das Unendlichgrofse ist eine, jede Grenze übersteigende, also die gröfste mögliche Zahl.“ Wegen der Unvollendbarkeit der Zahlenreihe ist dieses ∞ keinenfalls etwas Bestimmtes; versucht es Jemand, sich jenseits des Unvollendbaren noch etwas Bestimmtes vorzustellen, so geht ihm einfach der Atem des Denkens aus, und es bleibt wieder die unbeantwortbare Frage übrig, ob mit einem unvorstellbarem Nenner dividiert werden kann. — Man mag also die Sache besehen wie man will, zu einem B e w e i s e der Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$ gelangt man nicht.

Um auch a posteriori die Unrichtigkeit der Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$ nachzuweisen, mögen folgende Beispiele Platz finden. Wenn die positiven echten Brüche

$$t_1, \; t_2, \; t_3, \ldots\ldots$$

so abnehmen, dafs sie kleiner sind als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1^\mu}, \; \frac{1}{2^\mu}, \; \frac{1}{3^\mu}, \ldots\ldots$$

worin $\mu > 1$ ist, so convergiert die Reihe $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$ und besitzt eine endliche Summe S; man kann nun die Frage stellen, welche Werte die drei n-gliederigen Reihen

$$U_n = \sqrt{t_1^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{t_2^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{t_3^2 + \frac{1}{n}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \sqrt{t_n^2 + \frac{1}{n}},$$
$$V_n = \sqrt{t_1^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{t_2^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{t_3^2 + \frac{1}{n^2}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \sqrt{t_n^2 + \frac{1}{n^2}},$$
$$W_n = \sqrt{t_1^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \sqrt{t_2^2 + \frac{1}{(n+2)^2}} + \sqrt{t_3^2 + \frac{1}{(n+3)^2}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \sqrt{t_n^2 + \frac{1}{(n+n)^2}}$$

für $n = \infty$ erhalten, wenn alle Wurzeln positiv genommen werden. Mittelst der Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$ findet sich hier

$$U_\infty = V_\infty = W_\infty = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots = S;$$

alle drei Resultate sind aber gründlich falsch, die richtigen Werte lauten dagegen

$$U_\infty = \infty, \quad V_\infty = S + 1, \quad W_\infty = S + l2.$$

Ebenso gehen die Produkte

$$P_n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+3}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+n}\right),$$
$$Q_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{n}{n^2}\right)$$

nicht in $P_\infty = Q_\infty = 1$ über, sondern es ist

$$P_\infty = \frac{1}{2^\varepsilon}, \quad Q_\infty = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Da hiernach $\frac{1}{\infty}$ und 0 verschiedene Dinge sind, so müssen sie auch durch verschiedene Bezeichnungen auseinander gehalten werden. Man könnte z. B. eine gerechte und vollkommene runde Null von einer unvollkommenen eckigen Null unterscheiden oder statt des Gleichheitszeichens ein Zeichen der Annäherung (etwa $\doteq$) einführen; das zweckmäfsigste bleibt aber jedenfalls, den Satz „der Grenzwert von $\frac{1}{\infty}$ ist die Null" wörtlich in die Sprache der Mathematik zu übersetzen und zu schreiben Lim. $\frac{1}{\infty} = 0$. Man halte das nicht für Pedanterie; im Gegenteil, wer da meint,

statt des Satzes „die Grenze von $\frac{1}{\infty}$ ist Null“ dürfe er einfacher sagen „$\frac{1}{\infty}$ ist Null“, der verfährt ebenso lüderlich, als wenn er das Axiom „die Grenze jeder Polygonfläche ist eine Linie“ abkürzt in „jede Polygonfläche ist eine Linie“.

Der Übergang zu einer asymptotischen Grenze läfst sich recht wohl als ein transcendentaler Akt bezeichnen, weil dabei etwas in abstracto anticipirt wird, was man in concreto (durch Zahlenrechnung) nicht erreichen kann. Eine so kühne Operation will begründet sein, und ausserdem müssen die Regeln festgestellt werden, nach denen sie in complicirten Fällen anzuwenden ist. Es fragt sich daher, ob und unter welchen Bedingungen gesetzt werden darf

$$\mathrm{Lim}\,(X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_k)$$
$$= \mathrm{Lim}\, X_1 + \mathrm{Lim}\, X_2 + \ldots\ldots + \mathrm{Lim}\, X_k,$$
$$\mathrm{Lim}\,(X_1\, X_2 \ldots\ldots X_k) = \mathrm{Lim}\, X_1 \,.\, \mathrm{Lim}\, X_2 \ldots\ldots \mathrm{Lim}\, X_k,$$
$$\mathrm{Lim}\,(X^Y) = (\mathrm{Lim}\, X)^{\mathrm{Lim}\, Y} \text{ u. dergl. m.}$$

Eine genaue Untersuchung hat bekanntlich gezeigt, dafs diesen Gleichungen keine Allgemeingültigkeit zukommt, dafs es also hier wie in manchen anderen Gebieten der Arithmetik Sätze giebt, die zwar für jede endliche Zahl, nicht aber für eine unendlichgrofse Zahl richtig sind.*)

III. Bis in die Gegenwart herein tauchen von Zeit zu Zeit Versuche auf, die Differentialrechnung ohne Hülfe des Unendlichkleinen zu begründen oder, allgemeiner ausgedrückt, den Begriff einer gegen die Null konvergierenden Gröfse zu vermeiden. Unter dem letzteren Gesichtspunkte betrachtet, sind diese Bemühungen sehr alt, sie stecken schon in den dialektischen Künsten der Eleaten und Sophisten. So sagt z. B. Zenon von Elea: „Zerlegt man einen Körper in Teile, diese in neue Teile u. s. f., so ist der letzte Teil, zu dem man gelangt, ent-

*) Z. B. Jede endliche Anzahl rationaler Summanden giebt eine rationale Summe; eine unendliche Summandenmenge braucht diese Eigenschaft nicht zu besitzen. In einer endlichen Reihe ist die Anordnung der Glieder ohne Einflufs auf deren Summe; in einer unendlichen und convergirenden Reihe können verschiedene Anordnungen zu verschiedenen Summen führen.

weder etwas oder nichts; im ersten Falle kann er wieder geteilt werden und dann war er nicht der letzte; im zweiten Falle ist er ein Punkt, und da alle Teile zusammen das ursprüngliche Ganze bilden, so müfste sich aus Punkten ein Körper zusammensetzen lassen; beide Fälle führen also zu Widersprüchen." Dem völlig analog würde Zenon den modernen Satz, dafs der Krümmungsmittelpunkt der Durchschnitt zweier unendlich naher Normalen ist, mit folgender Argumentation bestritten haben: „Bezeichnen P und Q die beiden Curvenpunkte, deren Normalen sich in O schneiden, so ist arc PQ entweder etwas oder nichts; im ersten Falle kann O, je nach der Gröfse von arc PQ, sehr verschiedene Lagen haben, ist also ein unbestimmter Punkt; im zweiten Falle decken sich PO und QO durchaus und geben keinen Durchschnitt; in beiden Fällen gelangt man nicht zum sogen. Krümmungsmittelpunkte."

Diese Schlufsweise läfst sich absolut nicht widerlegen, solange das Axiom festgehalten wird: „A ist entweder B oder Nicht-B, tertium non datur." Für den reinen Logiker, der es nur mit starren Begriffen zu thun hat (wie z. B. der Richter bei der Entscheidung über schuldig oder nichtschuldig) reicht jene Dichotomie aus, Naturphilosophen, Mathematiker und Physiker dagegen bedürfen eines Tertiums, um das Gebiet des Stetigveränderlichen zu beherrschen, welches nicht aus Begriffen sondern aus der Anschauung stammt, wie Kant in seiner „Kritik der reinen Vernunft" klar genug erörtert hat. Jenes tertium comparationis lautet: „A ist weder B noch Nicht-B, sondern im Übergange von B zu Nicht-B begriffen und zwar so, dafs A gegen die Asymptote Nicht-B convergiert." Hierin liegt die Berechtigung des Unendlichkleinen.

Leider ist dieser Name unglücklich gewählt*), weil er kein positives Merkmal enthält und daher die Vermutung aufkommen läfst, das Nichtendlichkleine sei ebenso unbestimmt wie das Nichtendlichgrofse. Zwischen beiden besteht aber ein wesentlicher Unterschied. Die Zahlenreihe läuft nach oben ins Unbegrenzte hinaus, gestattet daher keine positive Definition des

*) Im I. Teile meines Compendiums d. höh. Analysis kommt das Wort erst gegen das Ende der Differentialrechnung vor (S. 250) und zwar als historischer Kunstausdruck.

Unendlichgrofsen und läfst nur eine unbestimmte Negative übrig; nach unten dagegen ist die natürliche Zahlenreihe begrenzt, und daher kann das Unendlichkleine positiv als eine gegen die Null convergierende Zahl definiert werden. Wäre es notwendig oder besonders wünschenswert, einen besseren Namen einzuführen, so empföhle sich vielleicht das Wort „Zeroid", welches kurz ist und die Asymptote zero andeutet.

Dafs es solche Zeroide giebt, lehren schon die Quotienten $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ u. s. w. wenn n die natürliche Zahlenreihe durchläuft; die Abstände der Hyperbelpunkte von der Asymptote liefern dazu eine geometrische Illustration; was auf der Welt kann man denn mehr verlangen um die reale Existenz und die Klarheit des Objektes nachzuweisen! Freilich aber mufs man sich aus der Klemme des B oder Nicht-B zu befreien und in eine neue Vorstellung hineinzufinden wissen.

An jeder Aufgabe der höheren Analysis läfst sich nun leicht zeigen, dafs das Differential ein Zeroid ist. Wird z. B. jeder der Schenkel $CA = CB = c$ eines gleichschenkligen Dreiecks in n gleiche Teile geteilt und sind, von C nach A hin gezählt, $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ die Teilpunkte von CA, und analog $B_1, B_2, \cdots B_{n-1}$ die Teilpunkte von CB, so bilden die Geraden $A_1B_{n-1}, A_2B_{n-2}, \cdots A_{n-1}B_1$ ein Polygon, dessen Ecken auf einer Curve liegen. Um die Gleichung der letzteren zu finden, nimmt man CA und CB als Coordinatenachsen, setzt k solcher Teile etwa $CA_k = t$ und hat als Gleichungen der Geraden A_kB_{n-k} und $A_{k+1}B_{n-(k+1)}$

$$\frac{x}{t} + \frac{y}{c-t} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{t+\frac{c}{n}} + \frac{y}{c-\left(t+\frac{c}{n}\right)} - 1 = 0.$$

Durch Wegschaffung der Brüche, Subtraktion der Gleichungen und Elimination von t erhält man als Gleichung der Curve

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 - \left(\frac{c}{n}\right)^2 = 0.$$

Geht man zur Grenze für unendlich wachsende n d. h. für stetig aufeinanderfolgende A_1B_{n-1}, A_2B_{n-2} etc. über, so gelangt man zur Gleichung der Einhüllenden:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0.$$

Denselben Gang befolgt die Differentialrechnung, wenn sie aus den Gleichungen

$$(c-t)\,x + ty - t\,(c-t) = 0,$$
$$\frac{\partial\,[(c-t)\,x + ty - t\,(c-t)]}{\partial t} = 0.$$

die Variabele t eliminiert; nur bezeichnet sie $\frac{c}{n}$ bei endlichen n mit Δt (als Zunahme von t) und beim Grenzenübergange mit ∂t. Thatsächlich ist also ∂t ein Zeroid.

Entsprechen in irgend einer Curve den Abscissen $\frac{a}{n}$, $\frac{2a}{n}$, $\frac{3a}{n}$, $\cdots \frac{na}{n}$ die Ordinaten $y_1, y_2, y_3, \cdots y_n$, so gilt für die über der Strecke a stehende Fläche die bekannte Formel

$$F = \operatorname{Lim}\left(y_1 \frac{a}{n} + y_2 \frac{a}{n} + \cdots + y_n \frac{a}{n}\right)$$
$$= \operatorname{Lim} \sum y \frac{a}{n} = \operatorname{Lim} \sum y \Delta x = \int_0^a y\,dx,$$

und hier ist dx wiederum ein Zeroid, weil es bedeutet, dafs $\Delta x = \frac{a}{n}$ bei unendlich wachsenden n gegen die Null convergiert.

Nach diesen Betrachtungen müssen alle Versuche zur Elimination des richtig aufgefafsten Unendlichkleinen als wissenschaftliche und pädagogische Rückschritte bezeichnet werden. Statt jenen, schon in den Elementen auftretenden Begriff zu voller Klarheit zu entwickeln und sich damit das gewaltige Instrument zur Beherrschung des Stetigen zu verschaffen, schiebt man ihn beiseite, kommt wieder auf die Alternative, ob das Differential etwas oder nichts ist, und gerät schliefslich in die antiken Sophismen vom ὄν und μὴ ὄν, vom πέρας und ἄπειρον.

Über die rationalen Lösungen der Gleichung $a^a = b^2 + c^2$.

Von Prof. Dr. Worpitzky in Berlin.

Im vorigen Jahrgange (1886) dieser Zeitschrift S. 257 und 499 habe ich des pädagogischen Interesses wegen eine kurze, auf ganz elementare Betrachtungen gegründete Bestimmungsweise aller rationalen Zahlen a und b von der Beschaffenheit vorgeführt, dafs die Ausdrücke $\sqrt{b^2 - a^3}$ und $\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}}$ rational werden.

Es sollte den Schülern bei ihrer ersten Bekanntschaft mit der Ferroschen Auflösung der kubischen Gleichungen die klare Erfassung der Methode nicht durch das Dazwischentreten irrationaler Wurzeln, deren numerische Darstellung die Aufmerksamkeit von der Hauptsache zu sehr ablenkt, erschwert werden.

Etwas wissenschaftlich neues damit zu schaffen, vermeinte ich nicht, da es auf den von den berufensten Männern fortwährend emsig bearbeiteten und in pädagogischer Absicht immer wieder zu bearbeitenden Gebieten der Mathematik wohl kaum etwas stofflich neues giebt, manches aber, das der einzelne sich von neuem selbst zurechtlegen mufs, weil er aus dem Grunde, dafs es kein wichtiges Glied in dem vorschwebenden wissenschaftlichen Gebäude bildet, seine Aufmerksamkeit noch nicht darauf gerichtet hatte. Diese Zeitschrift erwirbt sich in den Kreisen der Lehrenden dadurch Dank, dafs sie das Erstenrecht nicht in den Vordergrund stellt, wenn es sich darum handelt, pädagogisch verwertbare Dinge vor dem Vergessen zu bewahren.

Dadurch entschuldigt sich auch wohl meine Unachtsamkeit darauf, dafs Herr Kummer in den Berichten der Akademie der Wissenschaften (Berlin, 15. November 1880) dieselbe Frage von einem etwas andern Gesichtspunkte aus bereits beantwortet

hatte, wo er die kubischen Gleichungen mit solchen rationalen Lösungen ins Auge faſst, bei deren Berechnung nur rationale Wurzeln vorkommen.

Ein Unterschied ist natürlich nicht vorhanden bezüglich des Resultates, der Weg aber abweichend, da ich jene algebraischen Wurzelformen nur zahlentheoretisch behandelt habe, indem ich mich darauf stützte, daſs $\sqrt{b^2 - a^3} = c$ wird, wenn $b + c = na$, $b - c = \frac{a^2}{n}$ ist.

Es kam auf die rationale Lösung der Gleichung $a^3 = b^2 - c^2$ an, und es würde keinen wesentlichen Unterschied ausgemacht haben, wenn der Exponent 3 durch eine andere Zahl ersetzt wäre.

Ich will jetzt eine ganz elementare Behandlung der Aufgabe vorführen:

„Die Gleichung $a^\alpha = b^2 + c^2$ rational zu lösen." Daſs man dabei nur ganze Zahlen a, b, c ins Auge zu fassen braucht, leuchtet ohne weiteres ein, weil die Multiplikation mit $m^{2\alpha}$ zur Gleichung

$$(m^2 a)^\alpha = (m^\alpha b)^2 + (m^\alpha c)^2$$

führt, in welcher die Zahl m immer so gewählt werden kann, daſs $m^2 a$, $m^\alpha b$ und $m^\alpha c$ ganze Zahlen sind, welche rationalen Werte die Zahlen a, b und c auch haben mögen.

Es wird sich im Verlauf der Untersuchung u. a. zeigen, daſs nur solche Lösungen möglich sind, welche nach der Ausmerzung eines ähnlichen Faktors, wie es oben $m^{2\alpha}$ ist, ein a von der Form $m^2 + n^2$ übrig lassen, und daſs man die Anzahl der verschiedenen Lösungen bei demselben a leicht von vorne herein abzählen kann, so wie auch die Anzahl derjenigen Lösungen, in denen b und c relative Primzahlen sind.

1. Daſs es bei jedem ganzen α Lösungen der Gleichung

$$a^\alpha = b^2 + c^2 \tag{1}$$

giebt, läſst sich leicht feststellen.

Denn bei jedem ungeraden α gilt offenbar die Relation:

$$(m^2 + n^2)^\alpha = \left[m\,(m^2 + n^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\right]^2 + \left[n\,(m^2 + n^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\right]^2; \tag{2}$$

und bei jedem graden α, weil

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

ist, die Relation:

(3) $$(m^2+n^2)^\alpha = \left[(m^2-n^2)(m^2+n^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}\right]^2 + \left[2mn(m^2+n^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}\right]^2,$$

was man auch für m und n setzen mag.

Es bleibt also die Frage zu erörtern, ob es aufser den Lösungen (2) und (3) noch andere giebt, und wie die verschiedenen Lösungen unter einander zusammenhängen.

2. Da $b^2 + c^2 = (b + ic)(b - ic)$ ist, so mufs, b und c als relative Primzahlen vorausgesetzt, jeder rationale Teiler von $(b^2 + c^2)$ einen rationalen Faktor von der Form $(\beta + i\gamma)$ haben und daher auch einen zweiten mit dem Werte $(\beta - i\gamma)$. Die Vereinigung beider giebt aber $(\beta + i\gamma)(\beta - i\gamma) = \beta^2 + \gamma^2$ als reellen Faktor.

Hieraus folgt:

Die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen ist entweder eine Primzahl, oder sie läfst sich in der Form

(4) $$b^2 + c^2 = \prod_s (\beta_s^2 + \gamma_s^2)^{k_s}$$

als ein Produkt von Potenzen solcher Primzahlen darstellen, welche Summen zweier Quadratzahlen sind.

3. Der so eben bewiesene Satz läfst sich umkehren. Ist nämlich $\beta^2 + \gamma^2 = p$ eine Primzahl, so kann man

$$\beta = \sqrt{p} \cdot \cos\varphi, \qquad \gamma = \sqrt{p} \cdot \sin\varphi$$

setzen; und man erhält:

(5) $$(\beta_1^2 + \gamma_1^2)(\beta_2^2 + \gamma_2^2) = (\beta_1\beta_2 \mp \gamma_1\gamma_2)^2 + (\gamma_1\beta_2 \pm \gamma_2\beta_1)^2$$

oder in andrer Form:

$$(\beta_1^2 + \gamma_1^2)(\beta_2^2 + \gamma_2^2)$$
$$= [\sqrt{p_1p_2} \cdot \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2)]^2 + [\sqrt{p_1p_2} \cdot \sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)]^2.$$

Demnach ist

(6) $$(\beta_1^2 + \gamma_1^2)(\beta_2^2 + \gamma_2^2)\cdots(\beta_\mu^2 + \gamma_\mu^2) = m^2 + n^2$$

für

(7) $$\begin{cases} m = \sqrt{p_1p_2\cdots p_\mu} \cdot \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \cdots \pm \varphi_\mu), \\ n = \sqrt{p_1p_2\cdots p_\mu} \cdot \sin(\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \cdots \pm \varphi_\mu). \end{cases}$$

Da hier die Vorzeichen nach Belieben gewählt werden dürfen, so können also m und n je $2^{\mu-1}$ verschiedene Werte erhalten. Es ist aber auch denkbar, dafs die aus (7) entspringenden Werte teilweise gleich sind oder verschwinden. Wir wollen untersuchen, wie es damit steht.

4. Zunächst werde vorausgesetzt, dafs die Primzahlen $p = \beta^2 + \gamma^2$ in (6) sämtlich ungleich sind.

Dann kann keine von den Zahlen m und n verschwinden, weil dies nach (7) für die andere den irrationalen Wert $\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_\mu}$ zur Folge hätte; während doch aus (5) hervorgeht, dafs m und n stets rationale Werte erhalten. M. a. W.: es kann $(\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \cdots \pm \varphi_\mu)$ kein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ werden. Ebenso ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dafs dieser Arkus ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ werde, weil dann $m = \pm n = \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2 \cdots p_\mu}$ hervorginge, was wiederum eine irrationale Zahl ist, da wohl eine von den Primzahlen p den Wert 2 haben und sich mit $\frac{1}{2}$ wegheben kann, die andern aber bestehen bleiben.

Ändert man in dem fraglichen Arkus irgend welche Vorzeichen, so erhält man für ihn zwei Werte von der Form $(\theta + \omega)$ und $(\theta - \omega)$, wo nach dem obigen weder θ noch ω ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ werden kann. Deshalb können auch nicht zwei m^2 oder zwei n^2 gleich werden, weil hierzu nötig wäre, dafs

$$\cos(\theta + \omega)^2 = \cos(\theta - \omega)^2, \quad \sin(\theta + \omega)^2 = \sin(\theta - \omega)^2,$$

mithin dafs

$$\sin\theta \cos\theta \sin\omega \cos\omega = 0$$

würde.

Soll ferner ein m^2 einem n^2 für einen veränderten Arkus gleich werden, so erfordert dies, dafs

$$\cos(\theta + \omega)^2 = \sin(\theta - \omega)^2, \quad \sin(\theta + \omega)^2 = \cos(\theta - \omega)^2,$$

mithin dafs

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = 0$$

wird. Und das ist nach dem obigen ebenfalls unmöglich: mit Ausnahme des einen einzigen Falles, dafs der eine Primfaktor $p_1 = 2$ ist, und dafs man bei der Bildung der beiden Arkus

$(\theta + \omega)$ und $(\theta - \omega)$ alle in (7) geschriebenen Vorzeichen geändert, mithin $\theta = \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ angenommen hat.

Es gilt also der Satz:

Das Produkt

$$(\beta_1^2 + \gamma_1^2)(\beta_2^2 + \gamma_2^2) \cdots (\beta_\mu^2 + \gamma_\mu^2)$$

läfst sich auf $2^{\mu-1}$ Arten als die Summe zweier Quadratzahlen darstellen, wenn seine Faktoren lauter von einander verschiedene ungerade Primzahlen sind. Ist der eine Primfaktor $= 2$, so erhält man nur $2^{\mu-2}$ Arten der Darstellung.

Kein Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ läfst sich durch Addition und Subtraktion aus solchen von einander verschiedenen Arkus zusammensetzen, deren Kosinus und Sinus die Form $\beta : \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$ haben, unter $(\beta^2 + \gamma^2)$ eine ungerade Primzahl verstanden.

5. Sind die mit einander multiplizierten Primzahlen $\beta^2 + \gamma^2 = p$ sämtlich gleich, so werden es auch alle φ. Und es folgt, wenn man λ Minuszeichen in (7) wählt, dafs

$$(\beta^2 + \gamma^2)^\mu = m^2 + n^2$$

entsteht für:

$$m = p^\lambda \cdot (\sqrt{p})^{\mu - 2\lambda} \cos(\mu - 2\lambda)\varphi,$$

$$n = p^\lambda \cdot (\sqrt{p})^{\mu - 2\lambda} \sin(\mu - 2\lambda)\varphi.$$

Daraus folgt:

$$m = p^\lambda \cdot m_{\mu - 2\lambda}, \quad n = p^\lambda \cdot n_{\mu - 2\lambda}, \tag{8}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} m_k &= (\sqrt{p})^k \cos k\varphi = \beta^k - \binom{k}{2}\beta^{k-2}\gamma^2 + \binom{k}{4}\beta^{k-4}\gamma^4 - \cdots, \\ n_k &= (\sqrt{p})^k \sin k\varphi = \binom{k}{1}\beta^{k-1}\gamma - \binom{k}{3}\beta^{k-3}\gamma^3 + \binom{k}{5}\beta^{k-5}\beta^5 - \cdots \end{aligned}\right. \tag{9}$$

gesetzt ist.

Die letzten Ausdrücke in (9) sind einfache Folgerungen aus der Entwickelung von

$$\cos k\varphi + i \cdot \sin k\varphi = (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^k$$

nach dem binomischen Satz.

6. Ist $p = 2$ und daher $\varphi = \frac{\pi}{4}$, so folgt aus (9):

$$m_k = (\sqrt{2})^k \cdot \cos\frac{k\pi}{4}, \quad n_k = (\sqrt{2})^k \cdot \sin\frac{k\pi}{4};$$

weshalb die eine von den beiden Zahlen m_k und n_k bei einem geraden k verschwindet, während sich

$$m_{2k+1} = n_{2k+1} = 2^k$$

ergiebt.

Daher kann man die geraden Potenzen von 2 gar nicht in der Form $(m^2 + n^2)$ und ihre ungeraden Potenzen nur auf eine Weise in dieser Form darstellen.

7. Halten wir jetzt die Voraussetzung fest, dass p eine ungerade Primzahl ist, so leuchtet zunächst ein, dafs $k\varphi$ bei keinem Werte von k ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ sein kann, weil sonst m_k und n_k, absolut genommen, den irrationalen Wert $(\sqrt{p})^k \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ erhalten würden.

Daher kann $k\varphi$ auch bei keinem Werte von k ein gerades Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ werden; denn es liefse sich k als ein solches Vielfaches einer zweiten Zahl k' annehmen, dafs $k'\varphi$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ würde. Mithin sind m_k und n_k sowohl von einander als auch von Null verschieden. Auch haben sie keinen gemeinsamen Teiler; denn wegen der Gleichung

$$m_k + i \,.\, n_k = (\sqrt{p})^k \,.\, (\cos k\varphi + i \,.\, \sin k\varphi)$$
$$= (\sqrt{p} \,.\, \cos\varphi + i \,.\, \sqrt{p} \,.\, \sin\varphi)^k = (\beta + i\gamma)^k$$

müfste die k^{te} Wurzel eines gemeinsamen Teilers von m_k und n_k auch in β und γ aufgehen, während doch β und γ relative Primzahlen sind.

Aus dem obigen folgt:

Ist $\beta^2 + \gamma^2 = p$ eine ungerade Primzahl, so läfst sich ihre μ^{te} Potenz als die Summe zweier Quadratzahlen auf folgende Arten darstellen:

$$\begin{aligned}(\beta^2 + \gamma^2)^\mu &= m_\mu^2 + n_\mu^2 \\ &= (p \,.\, m_{\mu-2})^2 + (p \,.\, n_{\mu-2})^2 \\ &= (p^2 \,.\, m_{\mu-4})^2 + (p^2 \,.\, n_{\mu-4})^2 \\ &\text{u. s. w.,}\end{aligned}$$

wo die m_k und n_k relative Primzahlen sind, von denen

keine verschwindet. Die Anzahl der verschiedenen Arten, in denen hier p^{μ} dargestellt ist, kommt der gröfsten ganzen Zahl in $\frac{1}{2}(\mu+1)$ gleich.

Kein aliquoter Teil eines Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$ hat einen rationalen Tangens von der Beschaffenheit, dafs die Summe der Quadrate seines Zählers und seines Nenners eine ungerade Primzahl ist.

8. Um die verschiedenen Formen der Darstellung von $p_1^{\mu_1} . p_2^{\mu_2}$ als Summe zweier Quadratzahlen abzuzählen, hat man zu bedenken, dafs die gesuchte Zahl der Anzahl derjenigen Werte gleich ist, welche das Quadrat des Kosinus (oder Sinus) von $(\mu_1 \varphi_1 \pm \mu_2 \varphi_2)$ annehmen kann, wenn μ_1 und μ_2 schrittweise um 2 so weit vermindert werden, dafs sie nur nicht beide verschwinden.

Bei $\mu_1 = 2\mu'_1$ und $\mu_2 = 2\mu_2'$ ist dieselbe offenbar

$$= 2\mu_1' \mu_2' + \mu_1' + \mu_2' = \frac{1}{2} \cdot [(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) - 1].$$

Bei $\mu_1 = 2\mu_1'$ und $\mu_2 = 2\mu_2' - 1$ ist sie

$$= 2\mu_1' \mu_2' + \mu_1' = \frac{1}{2} \cdot (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1).$$

Bei $\mu_1 = 2\mu_1' - 1$ und $\mu_2 = 2\mu_2' - 1$ ist sie

$$= 2\mu_1' \mu_2' = \frac{1}{2}(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1).$$

Mithin ist sie die gröfste in $\frac{1}{2}(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1)$ enthaltene ganze Zahl.

Fügt man einen dritten Faktor $p_3^{\mu_3}$ hinzu, so tritt für die Betrachtung zu $(\mu_1 \varphi_1 \pm \mu_2 \varphi_2)$ noch $\pm \mu_3 \varphi_3$ hinzu; und so fort bei jedem neuen Faktor.

Man findet als allgemeines Ergebnis:

Sind die einzelnen Faktoren des Produkts

$$(\beta_1^2 + \gamma_1^2)^{\mu_1} \cdot (\beta_2^2 + \gamma_2^2)^{\mu_2} \cdots (\beta_\nu^2 + \gamma_\nu^2)^{\mu_\nu}$$

ungerade Primzahlen, so läfst sich dasselbe als Summe zweier Quadratzahlen auf so viel verschiedene Arten darstellen, wie die gröfste ganze Zahl in

$$\frac{1}{2} \cdot (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) \cdots (\mu_\nu + 1)$$

anzeigt. Auf zwei Arten geschieht dies durch relative Primzahlen.

Kein aliquoter Teil eines Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$ hat einen rationalen Tangens, bei welchem die Summe der Quadrate des Zählers und des Nenners das Produkt von Potenzen ungerader Primzahlen von der Gestalt $(\beta^2 + \gamma^2)$ ist.

9. Die Anwendung auf die Auflösung der Gleichung (1) bedarf keiner weiteren Erläuterung, da jeder Faktor von a^α auch in $(b^2 + c^2)$ vorkommen mufs. Es folgt:

Setzt man in der Gleichung $a^\alpha = b^2 + c^2$ für a einen Ausdruck von der Form

$$a = (\beta_1^2 + \gamma_1^2)^{\mu_1} \cdot (\beta_2^2 + \gamma_2^2)^{\mu_2} \cdots (\beta_\nu^2 + \gamma_\nu^2)^{\mu_\nu}, \tag{10}$$

in welcher die $(\beta^2 + \gamma^2)$ ungerade Primzahlen bedeuten, so erhält man für die rechte Seite so viele verschiedene Darstellungen, wie die gröfste ganze Zahl in

$$\frac{1}{2} \cdot (\alpha\mu_1 + 1)(\alpha\mu_2 + 1)\ldots(\alpha\mu_\nu + 1)$$

anzeigt; in zweien von diesen sind b und c relative Primzahlen. — Für $\alpha = 1$ ergiebt sich hieraus, wie oft a selbst als Summe zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann.

Man darf auch $a' = 2^\mu \cdot a$ einsetzen, ohne dafs sich dadurch an dem obigen etwas anderes ändert, als dafs dann nicht mehr zwei zusammengehörige b' und c' vorkommen, welche relativ prim wären. — Es folgt nämlich:

$$b' = 2^{\frac{\mu\alpha}{2}} \cdot b,\ c' = 2^{\frac{\mu\alpha}{2}},$$

$$\text{oder: } b' = 2^{\frac{\mu\alpha - 1}{2}} \cdot (b + c), \quad c' = 2^{\frac{\mu\alpha - 1}{2}} \cdot (b - c),$$

je nachdem $\mu\alpha$ gerade oder ungerade ist.

Desgleichen wird die Anzahl der verschiedenen Formen der Auflösung nicht geändert, wenn man a durch $a'' = g \cdot a' = g \cdot 2^\mu \cdot a$ ersetzt, wo g eine ganze Zahl bedeutet, welche keinen Faktor von der Form $(\beta^2 + \gamma^2)$ hat und bei einem ungeraden α selbst eine Quadratzahl sein mufs; — denn dann wird $b'' = g^{\frac{\alpha}{2}} \cdot b'$, $c'' = g^{\frac{\alpha}{2}} \cdot c'$.

Bei einem geraden α braucht α'' nicht die Summe zweier Quadratzahlen zu sein, sondern nur die Form $g \cdot (m^2 + n^2)$ zu haben.

Lösungen der Gleichung (1) von einer andern Beschaffenheit giebt es nicht.

10. Innerhalb des ersten Hunderts der Zahlenreihe findet man folgende 35 Summen zweier Quadratzahlen: 2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 53, 58, 61, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100.

Die Form (10) haben von ihnen: 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97; dagegen keinen Faktor von solcher Form: 2, 8, 18, 32, 72.

Da die fünf letztgenannten Zahlen aber den Faktor 2 besitzen, so kann man ihre ungeraden Potenzen auf eine Weise in der Form $(b^2 + c^2)$ darstellen — z. B. $72^5 = (2^7 . 3^5)^2 + (2^7 . 3^5)^2$ — ihre geraden Potenzen auf keine Weise.

11. Um ein numerisches Beispiel vorzuführen, in welchem a die Form (10) hat, so werde

$$a = (2^2 + 1^2)^2 . (3^2 + 2^2)^1, \quad \alpha = 3$$

gesetzt. Es mufs wegen $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ im ganzen

$$\frac{1}{2}(3.2 + 1)(3 \cdot 1 + 1) = 14$$

Arten der Darstellung von a^3 in der Form $b^2 + c^2$ geben. Dieselben sind:

$$\begin{aligned}
325^3 &= 5778^2 + 971^2 = 4986^2 + 3077^2 \\
&= (5 . 1167)^2 + (5 . 106)^2 = (5 . 1041)^2 + (5 . 538)^2 \\
&= (5 . 13 . 86)^2 + (5 . 13 . 27)^2 = (5 . 13 . 69)^2 + (5 . 13 . 58)^2 \\
&= (5^2 . 211)^2 + (5^2 . 102)^2 = (5^2 . 174)^2 + (5^2 . 157)^2 \\
&= (5^2 . 13 . 18)^2 + (5^2 . 13)^2 = (5^2 . 13 . 17)^2 + (5^2 . 13 . 6)^2 \\
&= (5^3 . 46)^2 + (5^3 . 9)^2 = (5^3 . 13 . 3)^2 + (5^3 . 13 . 2)^2 \\
&= (13 . 439)^2 + (13 . 102)^2 = (13 . 366)^2 + (13 . 263)^2.
\end{aligned}$$

12. Oben ist mehrfach die nahe Verwandtschaft zutage getreten, in welcher die Aufgabe, die Gleichung $a^\alpha = b^2 + c^2$ aufzulösen, zu derjenigen steht, $\frac{\pi}{4}$ oder ein Vielfaches dieser Zahl in Summanden zu zerlegen, deren Tangenten rational sind.

Die letztere kommt darauf hinaus, in der Gleichung

$$e^{i.2\Sigma\mu.\operatorname{arc\,tng}\frac{\gamma}{\beta}} = \prod\left(\frac{\beta+i\gamma}{\beta-i\gamma}\right)^\mu = \frac{b+ic}{b-ic}$$

die Zahlen β, γ, μ so zu bestimmen, dafs $b = \pm c$ wird; wobei in den einzelnen Faktoren die Zahlen β und γ als relative Primzahlen gedacht werden von der Beschaffenheit, dafs $(\beta^2 + \gamma^2)$ eine Primzahl ist. — Denn da

$$b^2 + c^2 = \prod(\beta^2 + \gamma^2)^\mu$$

ist, so kommt der im 2. Abschnitt aufgeführte Satz zur Geltung.

Wegen der Forderung, dafs $b = \pm c$ werde, mufs nun aber bei unserer neuen Aufgabe die eine von diesen Primzahlen $= 2$ sein und einen ungeraden Exponenten haben, weil nach den Ausführungen der früheren Abschnitte sonst unmöglich $b = \pm c$ werden kann.

Es bleibt wenig hinzuzufügen übrig. Denn, verlangt man z. B., dafs

$$\operatorname{arc\,tng}\frac{q}{p} + \Sigma\mu\,.\operatorname{arc\,tng}\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\pi}{4} + k\,.\,\pi$$

werde, so sind wegen der ersten Gleichung dieses Abschnitts p und q so zu bestimmen, dafs in dem Ausdruck

$$\frac{b+ic}{b-ic}\cdot\frac{p+iq}{p-iq} = \frac{(bp-cq)+i(bq+cp)}{(bp-cq)-i(bq+cp)}$$

die Gleichung stattfindet:

$$bp - cq = bq + cp$$

d. i.:

$$(b-c)p = (b+c)q.$$

Diese wird erfüllt, wenn man

$$p = b + c,$$
$$q = b - c$$

setzt.

Es ist das die bekannte Eulersche Zerlegung, nach welcher beispielsweise wegen

$$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2\cdot\frac{p+iq}{p-iq} = \frac{3+i\,.\,4}{3-i\,.\,4}\cdot\frac{p+iq}{p-iq}$$

die Werte $p = +3 + 4 = +7$, $q = +3 - 4 = -1$ hervorgehen, woraus

$$-\operatorname{arc\,tng}\frac{1}{7} + 2\,.\operatorname{arc\,tng}\frac{1}{2} = +\frac{\pi}{4}$$

gewonnen wird.

Kleinere Mitteilungen.

Vollständige Tafeln Pythagoreischer Dreiecke für die Katheten und Hypotenusen von 1 bis 100.*)

Von A. TIEBE,
ordentlichem Lehrer am Königlichen Marienstifts-Gymnasium zu Stettin.

Nach Absolvierung des Pythagoreischen Lehrsatzes macht sich das Bedürfnis geltend, diesen Satz, den man als einen überaus wichtigen vorgeführt hat, in einer Reihe von Aufgaben vielseitig zu üben und zu verwerten. Aufser den einfacheren verdienen dabei Aufgaben wie die folgenden Beachtung:

Man soll den Flächeninhalt eines Dreiecks aus b, c, h_1;
den Flächeninhalt eines Trapezes aus b, c, d, h;
die Seiten und den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus h_1, p berechnen,

weil sie das Kombinationsvermögen der Schüler in ähnlicher Weise üben wie jede andere einfache trigonometrische oder wie eine einfache Konstruktions-Aufgabe.

Leider ermöglichen es die vorhandenen Tafeln nicht, solche Aufgaben in gröfserer Anzahl und Mannigfaltigkeit zu stellen oder auch nur mehrere derselben Art, vielleicht zu einer häuslichen Arbeit, auf die Schüler zu verteilen. Dieselben setzen nämlich voraus, dafs man rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathete besitzt, während die Tafeln bei den einzelnen Zahlen nur je ein Dreieck angeben.

Ich habe daraus Veranlassung genommen, eine Tafel aller Pythagoreischen Dreiecke für die Katheten 1 bis 100 zu berechnen (Tafel I) und aus derselben eine solche für die Hypotenusen 1 bis 100 zusammenzustellen (Tafel II). In denselben bedeuten a und b die Katheten, c die Hypotenuse.

Die Aufgabe, Pythagoreische Dreiecke zu berechnen, läfst sich, abweichend vom bisherigen Verfahren, folgendermafsen formulieren:

Zu einer gegebenen ganzen Zahl (a) soll man eine ganze Zahl (x) finden, deren 2. Potenz zu der 2. Potenz der ersten addiert die 2. Potenz einer Zahl giebt, welche sich durch eine ganze Zahl (y) Einheiten von der zweiten unterscheidet.

---

*) Ähnliche Tafeln finden sich von Bretschneider im 1. Teil von Grunerts Archiv; sie sind abgedruckt in Liebers trigon. Aufgaben (am Schlufs). Auch Reidt hat sie in seine Trigonometrie (Anh. 2, S. 29) aufgenommen, doch mit Bretschneiders Druckfehlern (Nr. 77 (608, 105, 617). D. Red.

Diese Aufgabe führt zu der Gleichung

$$a^2 + x^2 = (x + y)^2,$$

deren Lösung ist

$$2x = \frac{a^2}{y} - y,$$

worin y zunächst jede ganze Zahl 1, 2, 3 ... bedeuten kann.

Da $x > 0$ sein soll, so mufs $y < a$ sein.

Da ferner für x Brüche ausgeschlossen sind, so mufs $\frac{a^2}{y}$ eine ganze Zahl, also y ein Faktor von $a \,.\, a$ sein.

Unter diesen Faktoren von a^2 sind indess nur diejenigen zu verwerten, welche den Ausdruck $\frac{a^2}{y} - y$ zu einer geraden Zahl machen. Eine leichte Überlegung zeigt, dafs man y bei geradem a gerade, bei ungeradem a ungerade wählen mufs.

Tafel I.

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	18	80	82	27	36	45	36	160	164
4	3	5	18	24	30	28	195	197	36	105	111
5	12	13	19	180	181	28	96	100	36	77	85
6	8	10	20	99	101	28	45	53	36	48	60.
7	24	25	20	48	52	28	21	35	36	27	45
8	15	17	20	21	29	29	420	421	36	15	39
8	6	10	20	15	25	30	224	226	37	684	685
9	40	41	21	220	221	30	72	78	38	360	362
9	12	15	21	72	75	30	40	50	39	760	761
10	24	26	21	28	35	30	16	34	39	252	255
11	60	61	21	20	29	31	480	481	39	80	89
12	35	37	22	120	122	32	255	257	39	52	65
12	16	20	23	264	265	32	126	130	40	399	401
12	9	15	24	143	145	32	60	68	40	198	202
12	5	13	24	70	74	32	24	40	40	96	104
13	84	85	24	45	51	33	544	545	40	75	85
14	48	50	24	32	40	33	180	183	40	42	58
15	112	113	24	18	30	33	56	65	40	30	50
15	36	39	24	10	26	33	44	55	40	9	41
15	20	25	24	7	25	34	288	290	41	840	841
15	8	17	25	312	313	35	612	613	42	440	442
16	63	65	25	60	65	35	120	125	42	144	150
16	30	34	26	168	170	35	84	91	42	56	70
16	12	20	27	364	365	35	12	37	42	40	58
17	144	145	27	120	123	36	323	325	43	924	925

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
44	483	485	56	390	394	66	360	366	77	264	275
44	240	244	56	192	200	66	112	130	77	36	85
44	117	125	56	105	119	66	88	110	78	1520	1522
44	33	55	56	90	106	67	2244	2245	79	3120	3121
45	1012	1013	56	42	70	68	1155	1157	80	1599	1601
45	336	339	56	33	65	68	576	580	80	798	802
45	200	205	57	1624	1625	68	285	293	80	396	404
45	108	117	57	540	543	68	51	85	80	315	325
45	60	75	57	176	185	69	2380	2381	80	192	208
45	28	53	57	76	95	69	792	795	80	150	170
45	24	51	58	840	842	69	260	269	80	84	116
46	528	530	59	1740	1741	69	92	115	80	60	100
47	1104	1105	60	899	901	70	1224	1226	80	39	89
48	575	577	60	448	452	70	240	250	80	18	82
48	286	290	60	297	303	70	168	182	81	3280	3281
48	189	195	60	221	229	70	24	74	81	1092	1095
48	140	148	60	175	185	71	2520	2521	81	360	369
48	90	102	60	144	156	72	1295	1297	81	108	135
48	64	80	60	91	109	72	646	650	82	1680	1682
48	55	73	60	80	100	72	429	435	83	3444	3445
48	36	60	60	63	87	72	320	328	84	1763	1765
48	20	52	60	45	75	72	210	222	84	880	884
48	14	50	60	32	68	72	154	170	84	585	591
49	1200	1201	60	25	65	72	135	153	84	437	445
49	168	175	60	11	61	72	96	120	84	288	300
50	624	626	61	1860	1861	72	65	97	84	245	259
50	120	130	62	960	962	72	54	90	84	187	205
51	1300	1301	63	1984	1985	72	30	78	84	135	159
51	432	435	63	660	663	72	21	75	84	112	140
51	140	149	63	280	287	73	2664	2665	84	80	116
51	68	85	63	216	225	74	1368	1370	84	63	105
52	675	677	63	84	105	75	2812	2813	84	35	91
52	336	340	63	60	87	75	936	939	84	13	85
52	165	173	63	16	65	75	560	565	85	3612	3613
52	39	65	64	1023	1025	75	308	317	85	720	725
53	1404	1405	64	510	514	75	180	195	85	204	221
54	728	730	64	252	260	75	100	125	85	132	157
54	240	246	64	120	136	75	40	85	86	1848	1850
54	72	90	64	48	80	76	1443	1445	87	3784	3785
55	1512	1513	65	2112	2113	76	720	724	87	1260	1263
55	300	305	65	420	425	76	357	365	87	416	425
55	132	143	65	156	169	76	57	95	87	116	145
55	48	73	65	72	97	77	2964	2965	88	1935	1937
56	783	785	66	1088	1090	77	420	427	88	966	970

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
88	480	488	91	312	325	96	2303	2305	98	336	350
88	234	250	91	60	109	96	1150	1154	99	4900	4901
88	165	187	92	2115	2117	96	765	771	99	1632	1635
88	105	137	92	1056	1060	96	572	580	99	540	549
88	66	110	92	525	533	96	378	390	99	440	451
89	3960	3961	92	69	115	96	280	296	99	168	195
90	2024	2026	93	4324	4325	96	247	265	99	132	165
90	672	678	93	1440	1443	96	180	204	99	20	101
90	400	410	93	476	485	96	128	160	100	2499	2501
90	216	234	93	124	155	96	110	146	100	1248	1252
90	120	150	94	2208	2210	96	72	120	100	621	629
90	56	106	95	4512	4513	96	40	104	100	495	505
90	48	104	95	900	905	96	28	100	100	240	260
91	4140	4141	95	228	247	97	4704	4705	100	105	145
91	588	595	95	168	193	98	2400	2402	100	75	125

Tafel II.

c	b	a	c	b	a	c	b	a	c	b	a
5	4	3	37	35	12	61	60	11	82	80	18
10	8	6	39	36	15	65	63	16	85	84	13
13	12	5	40	32	24	65	60	25	85	77	36
15	12	9	41	40	9	65	56	33	85	75	40
17	15	8	45	36	27	65	52	39	85	68	51
20	16	12	50	48	14	68	60	32	87	63	60
25	24	7	50	40	30	70	56	42	89	80	39
25	20	15	51	45	24	73	55	48	90	72	54
26	24	10	52	48	20	74	70	24	91	84	35
29	21	20	53	45	28	75	72	21	95	76	57
30	24	18	55	44	33	75	60	45	97	72	65
34	30	16	58	42	40	78	72	30	100	96	28
35	28	21	60	48	36	80	64	48	100	80	60

Bemerkungen zur elementaren Behandlung des Kreiselproblems.

I.

Von Oberl. Dr. Franke in Schleusingen.

(Mit 1 Fig. i. T.)

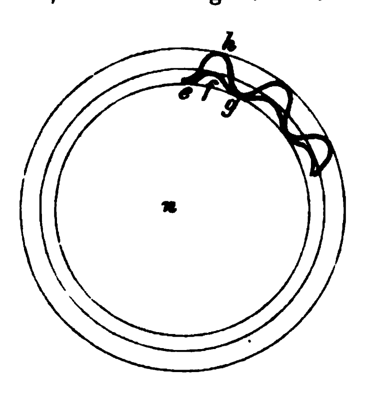
Den Bemerkungen über das Kreiselproblem in Heft 6 des vorigen (XVII.) Jahrganges ist noch einiges hinzuzufügen. Dafs dort zu Zeile 5 v. o. Leitlinie statt Seitenlinie zu lesen, und dafs in Fig. 1 die Gerade *oa* die in Fig. 2 dargestellte Lage, in Fig. 2 dagegen diejenige von Fig. 1 haben mufs, ist bereits in Hft. 8, S. 640 des vorigen Jahrgangs berichtigt worden.

Zur Sache meine ich, dafs die Nutation der Kreiselachse doch nicht wohl vernachlässigt werden kann. Zunächst um ihrer Gröfse willen. Sie ist auch beim schnell rotierenden Kreisel grofs genug, um direkt wahrgenommen zu werden, und grofs genug, um den Ton zu erzeugen, der die Rotation eines schief stehenden Kreisels begleitet. Ich bitte jeden, der hierauf noch nicht aufmerksam geworden ist, die Achse eines rotierenden Kreisels anzusehen; das Schwanken ist ohne alle weiteren Hilfsmittel zu beobachten und giebt der Achse das Ansehen eines ausgiebig schwingenden Stimmgabelzinkens; auch ein sanftes Anlegen des Fingers ist geeignet von der Gröfse der Amplitude zu überzeugen. Nach einer vorläufigen Rechnung beträgt diese Amplitude bei gewöhnlichen Verhältnissen immerhin eine Anzahl Minuten; ich bin mit Versuchen beschäftigt diese sowie die anderen in Frage kommenden Gröfsen direkt zu messen und behalte mir vor eventuell darauf zurückzukommen.

Aber auch in theoretischer Hinsicht erscheint es kaum angängig die Nutation zu vernachlässigen. Zunächst führt die Grunderklärung des Ganzen, die Zusammensetzung der beiden Rotationen um *oa* und *od*, wie in Heft 6 gezeigt ist, mit Notwendigkeit auf das Sinken und Steigen der Achsen; ich sehe thatsächlich keine Möglichkeit einer Erklärung, die auf diesen Punkt nicht eingings. Zweitens erscheint es notwendig auch von dem Grunde des Kreiseltons Rechenschaft zu geben. Und drittens sei darauf hingewiesen, dafs die Vorstellung eines Fortschreitens der Kreiselachse auf einer Rotationskegelfläche in sich eine mechanische Unmöglichkeit ist, da sie in Widerspruch mit dem Satz der Energiekonstanz steht. Denn betrachtet man den Kreisel in dem Zeitpunkte, wo man ihn losläfst, und in einem späteren, so würde die anfänglich in der Rotationsbewegung vorhandene Energie um die in der Präzessionsbewegung liegende vermehrt sein, ohne dafs anderswo solche verbraucht wäre.

Es sei gestattet von letzterem Gesichtspunkt aus nochmals auf den Vorgang selbst zurückzukommen, um dabei noch einen Punkt zu erwähnen, in welchem ich von der Anschauung des Herrn Verf. des ersten Artikels abweiche. Ich kann weder bei der Nachtgleichen-

präzession noch bei der Kreiselbewegung mich überzeugen, dafs, wenn man die Bewegung als das Rollen zweier Kegel auffafst, der im Raum feste Kegel, den also die augenblickliche Drehachse beschreibt, ein Rotationskegel sei.*) Es widerspricht dem die Thatsache, dafs die Drehachse nicht in der Ebene *aob* (dann würde er ein solcher sein), sondern in *aod* sich verschiebt. Speciell beim Kreisel geht die Bewegung so vor sich, dafs die augenblickliche Drehachse *oa* auf der wellenförmigen Leitlinie, welche in nebenstehender Figur zwischen den beiden inneren Hilfskreisen gezeichnet ist, entlang rückt, und die Kreiselachse *oc* gleichzeitig auf derjenigen zwischen dem ersten und dritten Kreise. In *e*, den wir als Anfangspunkt der Bewegung denken, liegen beide Achsen vereinigt. Während *a* von *e* nach *f* rückt, bewegt sich *c* von *e* nach *h* und zwar in der Art, dafs die Ebene *noc* hinter *noa* zurückbleibt. In *f* und *h* kommen beide Achsen gleichzeitig an. Zwischen *fg* bezw. *hg* liegt *noc* vor *noa*, in *g* fallen beide wieder zusammen. Es ist eine Eigentümlichkeit der Kreiselbewegung, dafs, wie die analytische Theorie des Problems zeigt, die auf *oc* bezogene Komponente der Winkelgeschwindigkeit während der ganzen Bewegung konstant bleibt. In *e* ist diese die einzige vorhandene lebendige Kraft. Zwischen *e* und *h* sinkt der Schwerpunkt ein Stück; die hierbei verbrauchte potenzielle Energie geht in kinetische über, in Gestalt der aufgetretenen anderen Komponenten der Winkelgeschwindigkeit. Dieser Zuwachs verwandelt sich während der Bewegung von *h* nach *g* in potenzielle zurück, so dafs in *g* genau der Anfangszustand wieder eingetreten ist.



Die Analogie mit der Pendelbewegung liegt auf der Hand; vielleicht ist dieselbe geeignet den Vorgang in ein noch helleres Licht zu bringen.

II.

Von Dr. Wilh. Hess an der Kreisrealschule in München.

In dem zweiten Hefte des vorigen (XVII.) Jahrgangs ist von Hrn. Prof. Hauck der dankenswerte Versuch gemacht worden, die Erscheinungen, welche sich bei der Rotation des Kreisels darbieten,

*) Auch die Darstellung von Poinsot „Neue Theorie der Drehung der Körper" (S. 11 in der Übersetzung von Schellbach) entspricht dem Vorgange nicht, ein Umstand, der auch durch die letzten Worte des § 9 daselbst angedeutet wird und für den rein phoronomischen Zweck der dortigen Auseinandersetzung auch nicht wesentlich ist.

in elementarer Behandlung vorzuführen und so den Zwecken des Unterrichts zugänglich zu machen. Eine Beschreibung in dieser Form mufs offenbar gleichzeitig zwei Bedingnisse erfüllen: dieselbe soll sich nicht über die Vorstellungskraft der Schüler erheben, und da sie dieses nur erreicht, wenn sie zu Annäherungen ihre Zuflucht nimmt, so soll sie dann die angenäherten Erscheinungen in möglichst exakter Weise erläutern und keinen Zweifel in die Richtigkeit der nunmehr entwickelten Theorie offen lassen. Bei dem Interesse, welches das in Rede stehende Problem für mich schon früher gewonnen hat, möchte ich mir nun bezüglich des letzterwähnten Punktes einige Bemerkungen erlauben, lediglich zu dem Zwecke, zur möglichsten Klarstellung des Problems beizutragen.

Zunächst vermisse ich im § 2 der Abhandlung von Hauck, welcher sich mit der Zusammensetzung zweier Drehbewegungen befafst, den markanten Hinweis darauf, dafs das Parallelogramm der Rotationen nur für unendlich kleine Drehungen — Drehungen, welche dem Zeitelemente dt proportional sind —, nicht aber für beliebige Rotationen Giltigkeit besitze. Es darf nicht vergessen werden, zu bemerken, dafs die daselbst verwendeten Geschwindigkeiten ew und $e'w'$ sich eigentlich auf je einem Kreise um die zugehörige Rotationsachse vollziehen und demgemäfs nur bei sehr kleiner Drehungsamplitude als geradlinig angenommen werden können. Rotationen von endlicher Gröfse um zwei sich schneidende Achsen sind zwar auch äquivalent einer einzigen Rotation, aber um eine Achse, welche mit den vorigen ein Dreikant in der Weise bildet, dafs die an den alten Achsen liegenden Flächenwinkel desselben bezw. gleich sind den halben daselbst auftretenden Drehungswinkeln; eine Vertauschbarkeit der Reihenfolge der successiven Drehungen ist überdies ausgeschlossen. (Auch einer anderen, die Kreiselbewegung elementar und fafslich behandelnden Arbeit von Hrn. Prof. Schmidt*), möchte ich die vorstehende notwendige Beschränkung, betreffend das unendlich Kleine, beigefügt wissen.)

Was die Bewegung des Kreisels um seinen Unterstützungspunkt anlangt, so halte ich es ferner für unerläfslich, zu betonen, in welcher Weise denn der rotierende Kreisel zur Bewegung angeregt wurde. Ist es doch in Bezug auf die Erscheinungen von einschneidender Wichtigkeit, ob man dem Körper eine blose Drehung um seine Umdrehungsachse (von den französischen Mathematikern die „Achse der Figur" genannt) oder nebenbei auch einen seitlichen Stofs erteilt hat! Aus der ganzen Art der Behandlung glaube ich, schliefsen zu dürfen, dafs die eingangs citierte Arbeit eine Drehung um die Figurachse allein, als das weitaus Gebräuchlichste, voraussetzt. Der von dieser Achse im Raume beschriebene Kegel ist nun

*) Die elementare Behandlung des Kreiselproblems. Math.-naturw. Mitt. Tübingen 1886.

von Hrn. Prof. Hauck als Kreiskegel gefolgert worden, allerdings irrtümlich, wie später (S. 422) Hr. Dr. Franke gezeigt hat, indem eine Vertauschung der instantanen Drehungsachse mit der geometrischen Achse des Kreisels vorlag. Hr. Prof. Hauck gibt die Richtigkeit dieser Thatsache zu, bemerkt jedoch gleichzeitig, dafs, wenn auch der fragliche Kegel strikte genommen ein Rotationskegel nicht sei, er doch von einem solchen unendlich wenig abweiche, und begründet dies mit dem Hinweis auf die Rotation unseres Erdsphäroids, für welches instantane Drehachse und Figurachse als fast zusammenfallend erachtet werden könnten.

An diesen Abschnitt über den von der Achse des Kreisels erzeugten Kegel möchte ich einige Erörterungen knüpfen, die meines Erachtens als in den Rahmen dieser Zeitschrift passend gefunden werden dürften.

In einer Abhandlung „über das Gyroskop"*) habe ich an der Hand der strengen analytischen Theorie die Erscheinungen, welche bei der Rotation eines Kreisels zu Tage treten, untersucht, unter der Voraussetzung, dafs derselbe, wie gewöhnlich geschieht, durch eine blofse Drehung um seine Achse zur Bewegung angeregt werde. Unter der ziemlich grofsen Anzahl von Sätzen, welche die völlige Erhellung eines derartigen Problems mit sich führt, war eine Reihe solcher, welche mir bei dem Interesse, welches man allerseits den Rotationserscheinungen entgegenbringt, wichtig genug erschienen, um sie in einer eigenen Note**) dem Experimentator sowohl als dem Konstrukteur in einer Weise vorzuführen, die vielleicht auch nach der pädagogischen Seite hin Anspruch auf Billigung erheben dürfte. Freilich wurden die Resultate nur für ein mathematisches Gyroskop, unter Ausschlufs von Reibungswiderständen und anderen Hemmnissen gewonnen; es läfst sich jedoch wie bei jedem derartigen Problem erwarten, dafs dieselben bis auf einen gewissen Grad hin mit den aus der Beobachtung geschöpften Thatsachen übereinstimmen. In der That sollen, wie mir Hr. Prof. Günther in einem früheren Briefe mitzuteilen die Güte hatte, meine Ergebnisse durch Hrn. Dr. Schubert in Hamburg mit besonders exakt gearbeiteten Kreiseln eine befriedigende Bestätigung erfahren haben.

Unter denselben befinden sich besonders zwei Sätze, welche mit den Untersuchungen des Hrn. Prof. Hauck in nähere Beziehung gestellt werden dürften. Es ergab sich nämlich:

I. Die Figurachse des Kreisels beschreibt im Raume einen Kegel um die Vertikale, welcher sich auf den durch die Anfangslage repräsentierten Kreiskegel mit Rückkehrkanten aufsetzt, während er zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrkanten in Ausbuchtungen verläuft, die ihrerseits wieder von einem zweiten, dem

*) Math. Annalen. Bd. 19. S. 121—154.

**) Über die Bewegung der Achse eines Gyroskops. Carls Repertor. 18. S. 233—243.

ersteren konzentrischen und koaxialen Kreiskegel umhüllt werden. Die Figurachse vollführt also, während sie sich um die Vertikalachse dreht (Präzessionsbewegung), gleichzeitig „Schwankungen“ (Nutationen) gegen diese Achse. Diese Schwankungen sind nun einerseits um so gröfser, je gröfser das Gewicht des Apparates und der Abstand von Schwerpunkt und Unterstützungspunkt, je kleiner das Trägheitsmoment um die Figurachse und je gröfser dasselbe senkrecht hierzu, je kleiner*) endlich die Winkelgeschwindigkeit ist, welche man dem Körper um seine Figurachse erteilt hat. Andererseits ist die Zeit, innerhalb welcher diese Schwankungen vollführt werden, um so gröfser, je kleiner das Gewicht und der Schwerpunktsabstand, je kleiner das Trägheitsmoment um die Figurachse und je gröfser dasselbe senkrecht hiezu, je kleiner schliefslich wieder die dem Kreisel erteilte Drehgeschwindigkeit gewählt ist.

II. Der Kegel, welchen die für den Körper konstruierten instantanen Drehungsachsen bilden, ist ein transcendenter Kegel, welcher stets innerhalb eines um die Figurachse beschriebenen Kreiskegels eingeschlossen bleibt. Der letztere wird dabei um so breiter, je gröfser das Gewicht und der Schwerpunktsabstand für den Kreisel, je kleiner das Trägheitsmoment um die Figurachse und je kleiner die Drehgeschwindigkeit um diese Achse genommen ist.

Aus den Sätzen I geht evident hervor, dafs man, um die Nutationen der Kreiselachse dem Auge möglichst sichtbar zu machen, bei der Konstruktion des Apparates das Trägheitsmoment um die Achse der Figur möglichst klein und jenes senkrecht zu derselben möglichst grofs zu machen sich bestreben und, bei dem Experimente, eine möglichst geringe Drehung um die Achse in Anwendung bringen mufs. Ebenso wird ein sehr langer Kreisel die Erscheinung viel günstiger zeigen, als ein solcher, bei welchem Schwerpunkt und Fufspunkt sehr nahe an einander liegen.

Gegenüber diesen unzweideutigen Raisonnements gestaltet sich die Entscheidung über den Einflufs, den eine Vergröfserung des Gewichtes mit sich führt, ziemlich schwierig, nicht nur, weil dieselbe nach den Sätzen I und II teilweise reciprokes Verhalten im Gefolge hat, sondern auch, weil eine ad libidum vorgenommene Veränderung am Gewichte — wegen der Veränderung der Masse — in ihrer Wirkung auf die Gröfse der Trägheitsmomente nicht allgemein übersehen werden kann. Unter diesen Umständen halte ich es für sehr fraglich, ob das von Hrn. Prof. Hauck (S. 423) angeführte Beispiel der Bewegung der Erde zur Begründung der Form des Kegels der Figurenachsen herangezogen werden darf — ich bin

*) Danach bitte ich, einen Druckfehler in Carls Rep. a. a. O. S. 241 zu berichtigen.

vielmehr der Meinung, dafs es nicht allzuschwer sein müsse, nach dem oben Gesagten die Nutationserscheinung einer Kreiselbewegung auch zu Beginn der Bewegung schon genügend sichtbar zu machen. In dem von Hrn. Dr. Franke gerechneten Beispiele eines wirklichen Kreisels*) wenigstens findet sich für das Maximum der Nutation $5^1/_2$ Bogenminuten angegeben, ein Resultat, welches für den jedenfalls beliebig herausgegriffenen Kreisel um so beachtenswerter erscheint, als die im Sinne der Präzession gerechnete Länge einer Ausbuchtung eben auch nur $13^2/_3$ Bogenminuten betrug.

III.

Von G.-R. Prof. Dr. G. Hauck.

Zu vorstehenden interessanten Mitteilungen möchte ich mir zunächst gestatten zu bemerken, dafs ein Näherungsverfahren innerhalb der Grenzen seiner Giltigkeit nicht an relativem Wert verliert dadurch, dafs es sich aufserhalb jener Grenzen als unzureichend erweist. Bei der Pendelbewegung z. B. verliert die Näherungsformel $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für kleine Schwingungsweiten dadurch nicht an Wert, dafs die ihr zu Grunde liegenden Vernachlässigungen für gröfsere Schwingungsweiten sich nicht mehr als angängig erweisen. In gleicher Weise dürfte auch das in Frage stehende Näherungsverfahren für die Behandlung des Kreiselproblems innerhalb desjenigen Erscheinungsgebietes, wo die Abweichung der instantanen Drehachse von der geometrischen Achse verschwindend gering ist, seinen relativen Wert behalten, trotz der Einwände, die sich auf Erscheinungen aufserhalb jenes Gebietes beziehen. Die Erscheinung der Präzession der Erdachse fällt thatsächlich innerhalb des Giltigkeitsgebietes des Näherungsverfahrens, und diese Erscheinung war es ja, deren Erklärung auf elementarem Wege ich in erster Linie im Auge hatte (vergl. die Einleitung meines Aufsatzes).

Anders mufs ich jetzt freilich über den pädagogischen Wert des Näherungsverfahrens urteilen. In dieser Hinsicht ist mir das dritte von Herrn Dr. Franke geäufserte Bedenken allerdings ausschlaggebend. Auch Herr Prof. A. Schmidt hat in dem bereits citierten Artikel*) hierauf hingewiesen mit den Worten:

„Die meisten unserer Schüler werden von dieser Erklärung sehr befriedigt sein. Dem einen oder dem andern dürfte aber vielleicht sein mechanischer Instinkt sagen, dafs das, was ihm an der Kreiselbewegung wunderbar erschien, nun erst recht zum Wunder geworden ist; er wird spüren, dafs hier wie bei den Erfindungen des Perpetuum mobile Kraft ohne Weg Energie erzeugen mufs."

*) Über die Bewegung rotierender Kreisel. Progr. d. Gymn. Seehausen i. A. (1878) 1874.

**) S. die in der Anm. S. 184 zitierten Mitteilungen.

Für den naturwissenschaftlichen Unterricht dürfte gewifs der oberste Grundsatz mafsgebend sein, dafs es sich weniger darum handelt, abgerissene Einzelerscheinungen dem Schüler mehr oder weniger plausibel zu machen, als vielmehr darum, ihm in der unendlichen Mannigfaltigkeit der Erscheinungen das Walten von einheitlichen und allgiltigen Naturgesetzen nachzuweisen. Der Rücksicht auf dieses höhere pädagogische Prinzip dürfte allerdings das in Rede stehende Näherungsverfahren zum Opfer fallen müssen.

Auf die von Herrn Dr. Hess gemachte Ausstellung sei mir gestattet zu erwidern, dafs mir die Beschränkung auf Drehungen innerhalb unendlich kleiner Zeitabschnitte schon durch die Bezeichnung „momentane Geschwindigkeit" ausgedrückt zu sein schien.

Berlin, Februar 1887.

Sprech- und Diskussions-Saal.

Bemerkungen zu Aufsätzen des 2. Heftes.

Von G.-Oberl. Meyer in Halle.

I. Nachtrag zur Lösung der Aufgabe 608 S. 126 in Hft. 2.

Den Lösern der Aufgabe: „Aus welchem Punkte werden zwei ungleiche Kreise in gleiche invertiert?" scheint die Bemerkung entgangen zu sein, dafs der Ort jenes Punktes der äufsere Potenzkreis der beiden gegebenen Kreise ist.

II. Zu Herrn Schlegels Notiz über die fünfte Fundamentalaufgabe.

In der schätzbaren Bemerkung des Herrn Kollegen Schlegel (pag. 112, Heft 2 dieses Jahrganges) vermisse ich seine Definition einer Fundamentalaufgabe. Dafs die daselbst angegebene, auch wohl anderweitig vorgezeichnete Lösung, die „einfachste" sei, dürfte bestritten werden. Nur der Ansatz ist einfach, obschon komplizierter als derjenige der Kosinusregel; die Berechnung von s aus der bestechenden Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{ah}{2s(s-a)}$$

führt augenscheinlich auf eine quadratische Gleichung nach s. Um die Auflösung für logarithmische Rechnung brauchbar zu machen, mufs man

$$2h \cot\frac{\alpha}{2} = a\,(\mathrm{tg}\,2\varphi)^2$$

setzen, wodurch man erhält

$$s = \frac{a\,(\cos\varphi)^2}{\cos 2\varphi}.$$

Nun kennt man erst s und mufs sich an die Lösung von a, $b + c$, α machen.

Hierdurch glaube ich bewiesen zu haben, dafs Herrn Schlegels Lösung den Wettkampf mit der Kosinusregel, namentlich wenn es auf numerische Rechnung ankommt, keineswegs aufnehmen kann.

Zur Parallelen-Konstruktion.

Von Dr. Schlegel,
Oberlehrer an d. h. Gewerbeschule in Hagen i. W.

Um die Frage nach der besten Parallelen-Konstruktion (vgl. S. 427 v. J.) beantworten zu können, mufs man wohl erst über die zulässigen Instrumente Bestimmung getroffen haben. — Das Winkelmodell resp. Dreieck ist ein in der Praxis allerdings vielfach angewandtes, von der Theorie aber, welche doch herkömmlicher Weise die Beschränkung auf Lineal und Zirkel verlangt, ausgeschlossenes Instrument. Läfst man diese Beschränkung fallen, so ist allerdings die Konstruktion mit Lineal und Dreieck jeder anderen, auf Lineal und Zirkel angewiesenen, an Kürze und Handlichkeit überlegen, dürfte aber durch andere Instrumente, namentlich ein Parallelogramm mit veränderlichen Winkeln, noch überboten werden.*) Vergleicht man aber nur die mit demselben Apparat, nämlich Lineal und Zirkel, arbeitenden Methoden untereinander, so ist die a. a. O. angeführte, auf den Eigenschaften des Parallelogramms beruhende, sehr viel einfacher und auch hinsichtlich der Genauigkeit zuverlässiger, als die in den Lehrbüchern meist allein beschriebene mittelst korrespondierender Winkel. Ich habe daher auch in meinem „Lehrbuch der element. Math.“ Tl. II. S. 68 die Parallelogramm-Methode in ihrer einfachsten Gestalt beschrieben, und diejenige mittelst Lineal und Dreieck an einer früheren Stelle nur als „vorläufige“ gegeben.

*) Dies dürfte sehr zu bezweifeln sein, da die bei diesem Instrumente (Parallel-Lineal) notwendigen Stifte (Achsen) an den Drehpunkten die Ursachen ebenso vieler Fehlerquellen werden können. Bei der Verschiebungs-Methode bedarf es nur — die Kanten des Lineals und Winkels als völlig eben und gerade vorausgesetzt — des durch Druck zu bewirkenden Festliegens des Lineals. H.

Zum Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Prof. Dr. Lieber-Stettin und C. Müsebeck-Waren.

A. Auflösungen.

615. 2. Auflösung.*) Die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte unter den n Personen an diesem Tage ihren Geburtstag haben, ist $\left(\frac{1}{365}\right)^k$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs die übrigen $n-k$ Personen an diesem Tage nicht ihren Geburtstag haben, ist $\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs k Personen, aber auch nur diese, an jenem Tage ihren Geburtstag haben, ist daher $\left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs irgend k unter den n Personen an jenem Tage ihren Geburtstag haben, ist also $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}$. Daher ist

$$w = \sum_1^n {}^k \binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k} = \left(\frac{364}{365}+\frac{1}{365}\right)^n - \left(\frac{364}{365}\right)^n = 1-\left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

Emmerich. Schmitz.

616. (Gestellt von Emmerich XVII$_6$, 446.) Welche Identität verbindet a, b, c, wenn $(x-y)(x-z) = ayz$, $(y-z)(y-x) = bzx$, $(z-x)(z-y) = cxy$ ist?

1. Auflösung. Es ist $(y-z)(z-x)(x-y) = yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x)$, also $\frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{zx}{(y-z)(y-x)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)} = 1$, mithin $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$.

Fuhrmann (Königsberg i. Pr.). Kober (Schollwitz). Simon (Berlin).

2. Auflösung. Multipliziert man die drei Gleichungen miteinander, zieht die Quadratwurzel aus und dividiert die entstehende Gleichung der Reihe nach durch die drei gegebenen Gleichungen, so erhält man das lineare System $ay - az = \pm xi\sqrt{abc}$; $bz - bx = \pm yi\sqrt{abc}$; $cx - cy = \pm zi\sqrt{abc}$, dessen Determi-

*) S. die 1. Aufl. Hft 2, S. 131.

nante verschwindet. Die Entwickelung derselben ergiebt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

BERMANN (Liegnitz). EMMERICH (Mühlheim a. d. R.). HALUSCHKA (Trautenau). VON JETTMAR (Wien). KOBER. LENGAUER (München). SCHMIDT (Spremberg). SCHUMACHER (Schweinfurt). SIEVERS (Frankenberg i. S.). STOLL (Bensheim). SZIMÁNYI (Trenchin).

617. (Gestellt von Woelfer XVII_6, 446.) Die folgenden Gleichungen zu lösen:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x^3 - xyz &= a\sqrt{x^3+y^3+z^3} \\ y^3 - xyz &= b\sqrt{x^3+y^3+z^3} \\ z^3 - xyz &= c\sqrt{x^3+y^3+z^3} \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x^3 - xyz &= a\sqrt{xyz} \\ y^3 - xyz &= b\sqrt{xyz} \\ z^3 - xyz &= c\sqrt{xyz} \end{aligned}$$

Auflösung. a) Man setze $\sqrt{x^3+y^3+z^3} = u$ und $xyz = v$; dann gehen die drei Gleichungen über in

$$x^3 = v + au, \quad y^3 = v + bu, \quad z^3 = v + cu.$$

Durch Addition derselben erhält man $u^2 - (a+b+c)\,u = 3v\,(1)$, und durch Multiplikation derselben

$$(a+b+c)\,v^2 + (ab+bc+ca)\,uv + abc\,u^2 = 0\ (2).$$

Aus (1) und (2) sind u und v zu berechnen.

b) Die drei Gleichungen gehen über in $x^3 = v + a\sqrt{v}$, $y^3 = v + b\sqrt{v}$, $z^3 = v + c\sqrt{v}$; durch Multiplikation derselben ergiebt sich $(a+b+c)\,v + (ab+bc+ca)\sqrt{v} + abc = 0$; mithin v zu berechnen.

BEYENS (Cadix). BERMANN. EMMERICH. FUHRMANN. HALUSCHKA. HODUM (Stassfurt). LENGAUER. SCHMIDT. SCHUMACHER. SIEVERS. SIMON. STOLL. SZIMÁNYI. TREUMANN (Birkenruh i. Livland). WOELFER (Zeitz).

618. (Gestellt von Szimányi XVII_6, 446.) Jemand legt n Jahre hindurch am Anfang eines jeden Jahres Beträge in eine Sparkasse, welche wie die Quadrate der natürlichen Zahlen wachsen, also aM, $4aM, \ldots n^2aM$. Zu welcher Summe S bei $p\%$ ganzjähriger Verzinsung (Zinseszins) werden diese Beträge am Ende des $n$ten Jahres anwachsen?

Auflösung. Wird $1 + \frac{p}{100} = q$ gesetzt, so ist $S = aq^n + 4aq^{n-1} + 9aq^{n-2} + \cdots + (n-2)^2aq^3 + (n-1)^2aq^2 + n^2aq$ (1). Multipliziert man (1) mit $(q-1)$, so erhält man $S(q-1) = aq^{n+1} + 3aq^n + 5aq^{n-1} + \cdots (2n-3)aq^3 + (2n-1)aq^2 - n^2aq$ (2). Multipliziert man ferner (2) mit $q-1$, so erhält man $S(q-1)^2 = aq^{n+2} + 2aq^{n+1} + 2aq^n + \cdots 2aq^3 - (n^2+2n-1)\,aq^2 + n^2aq = aq^{n+2} + \frac{2aq^3(q^{n-1}-1)}{q-1} - (n^2+2n-1)\,aq^2 + n^2aq$; mithin

$$S(q-1)^3 = aq\left[q^{n+2} + q^{n+1} - (n+1)^2q^2 + (2n^2+2n-1)\,q - n^2\right].$$

BERMANN. DREES (Oldenburg). EMMERICH. END (Würzburg). FUHRMANN. HELM (Liegnitz). HODUM. LENGAUER. NISETEO (Zara). SCHMIDT. SCHUMACHER. SIEVERS. STOLL. SZIMÁNYI.

Herr Niseteo bemerkt, dafs sich die Aufgabe auch lösen läfst, wenn die eingezahlten Beträge wie die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen wachsen. Die allgemeine Aufgabe findet sich ohne Lösung in der älteren Ausgabe von Meier Hirsch am Ende von Abschnitt XXI; in die neuere von Bertram besorgte Ausgabe scheint dieselbe nicht aufgenommen zu sein. Aufserdem ist sie von v. Schaewen gestellt X, 197 Nr. 74; die Lösung findet sich X, 347.

619. (Gestellt von Raschig XVII_6, 446.) $(2n-1)^2$ Würfel von verschiedener Farbe auf jeder Seite, jedoch unter sich gleich, sollen zur Bildung quadratischer Mosaiks, die für alle Hauptlinien des Quadrates symmetrische Anordnung haben, verwandt werden. Wie viele solcher Zusammenstellungen sind möglich?

Auflösung. Das durch die Würfel gebildete Quadrat sei $ABCD$, O sei sein Mittelpunkt und E, F, G, H seien die Mittelpunkte von resp. AB, BC, CD, DA. Wegen der geforderten Symmetrie ist nur die Zahl der Zusammenstellungen für diejenigen Würfel zu berücksichtigen, welche einem der acht Teile angehören, in welche das Quadrat durch Diagonalen und Mittellinien zerfällt, also z. B. dem Dreieck AEO. Da an der Seite AB $2n-1$ Würfel liegen, so liegen an AE n Würfel (von zwei Würfeln nur Teile); in der darüber liegenden Schicht befinden sich $n-1$ Würfel u. s. w., in der letzten Schicht bei O liegt ein Würfel; mithin ist die Anzahl aller in dem Dreieck AEO vorkommenden Würfel $\frac{n(n+1)}{2}$. Die Anzahl aller möglichen Kombinationen, welche man im Dreieck AEO vornehmen kann, erhält man, wenn man die Variationen mit Wiederholung aus sechs Elementen zur Klasse $\frac{n(n+1)}{2}$ bildet; die Anzahl ist $6^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Beyens. Hodum. Lengauer. Raschig (Schneeberg). Sadtler (Linz). Schmidt.

620. (Gestellt von Schumacher-Traunstein XVII_6, 446.) Es seien n Punkte gegeben, durch welche $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}$ Ebenen bestimmt sind. Man verlangt die Zahl jener Punkte, in welchen sich diese Ebenen schneiden und die nicht mit den gegebenen Punkten zusammenfallen.

1. Auflösung. Die gesuchten Schnittpunkte liegen auf den Geraden, welche je zwei Punkte des Systems verbinden. Die Gerade 12 wird von den $\binom{n-2}{3}$ Ebenen, welche keinen der Punkte 1, 2 enthalten, in $\binom{n-2}{3}$ Punkten geschnitten. Da nun $\binom{n}{2}$ Verbindungslinien vorhanden sind, so ist die gesuchte Zahl

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{3} = 10\binom{n}{5}.$$

Emmerich. Hodum. Schmidt. Sievers.

2. Auflösung. Mit dieser Aufgabe reciprok ist die andere: „Es sind n Ebenen gegeben, durch welche $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}$ Punkte gegeben sind; man verlangt die Anzahl der Ebenen, welche durch drei solcher Punkte gehen, die nicht mit den gegebenen Ebenen zusammenfallen." Da drei Punkte eine Ebene und drei Ebenen einen Punkt bestimmen, so ist die Antwort auf die letzte Aufgabe identisch mit der gegebenen. Es möge nun diese letzte Aufgabe behandelt werden. — Vier Ebenen bestimmen ein Tetraeder und drei solcher Schnittpunkte geben keine Ebene, die nicht schon da ist. Nun seien fünf Ebenen gegeben. Um die Anzahl der nun bestimmten Ebenen zu finden, zerlegen wir sie in zwei Teile; nämlich in die Ebenen, welche durch eine Kante des Tetraeders der ersten vier Ebenen und den Punkt gehen, in welchem die fünfte Ebene die Gegenkante schneidet, dies giebt 6; und ferner in die Ebenen, welche durch eine Ecke des Tetraeders und die Gerade gehen, in welcher die fünfte Ebene die Gegenfläche schneidet, dies giebt 4; also im ganzen 10 Ebenen. Da also 5 Ebenen 10 solcher neu bestimmen, so erhalten wir bei n Ebenen $10\binom{n}{5}$. Fuhrmann.

621. (Gestellt von Weinmeister XVII_6, 446.) Ist eine beliebige Anzahl Strecken gegeben und hat man aus ihnen als Seiten in willkürlicher Reihenfolge ein Kreisvieleck gebildet, so ist der Flächeninhalt desselben durch die gegebenen Strecken eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist aus den gegebenen Strecken ein Kreisvieleck konstruiert, und verändert man in dem Kreise die Reihenfolge der Seiten, so wird der Flächeninhalt des Polygons nicht geändert, weil es sich dabei nur um eine Vertauschung seiner Teile handelt. Versucht man aber aus denselben Strecken ein Kreisvieleck zu konstruieren, welches einem gröſseren Kreise eingeschrieben sein soll wie das erste, so ist dies nicht möglich, weil im zweiten Fall zu den gegebenen Sehnen kleinere Centriwinkel gehören würden als im ersten, während doch die Summe aller Centriwinkel in beiden Fällen dieselbe ist.

Bermann. Emmerich. Fuhrmann. Hodum. Lengauer. Schmidt. Sievers. Weinmeister (Tharand).

Anmerkung. Hieraus geht hervor, daſs sich die Heron'sche Formel von der Dreiecksfläche, die sich bekanntlich auf das Kreisviereck übertragen läſst, zu einer Formel für die Fläche des Kreisvielecks erweitern lassen muſs. Weinmeister.

Vergleiche: Edler. Über Maxima und Minima bei ebenen Figuren (X, 245). Ferner La Frémoire. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben der Elementar-Geometrie übersetzt von Kauffmann. Abschnitt IV, S. 149 u. flgd.

622. (Gestellt von Emmerich XVII_6, 447.) Gegeben Kugel S (Mittelpunkt S), auf ihr Kreis C (Radius r) und im Raume zwei Punkte P und Q. Man soll C auf S so verschieben, daſs das Verhältnis der Entfernungen des Punktes P von dem nächsten und entferntesten Punkte der Peripherie gleich $1:m$, und das Verhältnis der Entfernungen des Punktes Q von dem nächsten und entferntesten Punkte der Peripherie gleich $1:n$ wird.

Auflösung. Zur Lösung ist folgende planimetrische Hülfsaufgabe erforderlich: Gegeben ist ein Kreis S und ein Punkt P; man soll in den Kreis eine Sehne $XY = 2r$ so legen, daſs $PX : PY = 1 : m$ ist. Legt man die Sehne $X'Y' = 2r$ beliebig in den Kreis, so ist der Ort für alle Punkte P', deren Entfernungen von X' und Y' sich wie $1:m$ verhalten, ein Apollonischer Kreis; der zweite Ort ist der Kreis mit SP um S; man kennt so $PX = P'X'$ und $PY = P'Y'$, kann also XY konstruieren. — C sei nun der Mittelpunkt des gesuchten, der Gröſse nach gegebenen Kreises; die Ebene SCP schneide denselben in dem Durchmesser AB, so muſs $PA : PB = 1 : m$ sein; es kommt also darauf an, nach dem durch die Ebene SCP ausgeschnittenen gröſsten Kugelkreis S von P zwei Gerade PA und PB so zu ziehen, daſs $AB = 2r$ und $PA : PB = 1 : m$ ist. Hierdurch ist auch PC bestimmt und die mit PC um P beschriebene Kugel ist ein Ort für C. Entsprechend ist ein zweiter Ort für C die mit QC um Q beschriebene Kugel; ein dritter ist die Kugel mit SC um S.

EMMERICH. FUHRMANN. HODUM. LENGAUER. SCHMIDT. STEGEMANN (Prenzlau).

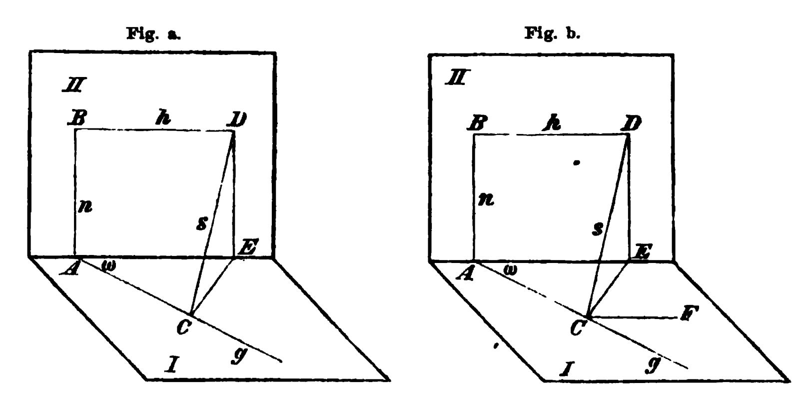
623. (Gestellt von Haluschka XVII_6, 447.) Es seien zwei windschiefe Gerade g und h durch ihren Normalabstand n und ihren Neigungswinkel ω gegeben; bezeichnen ferner: s eine Strecke von g zu h, α und β die Winkel (sg) und (sh), so ist der Abstand sn zu suchen, wenn s gegeben und a) $\alpha = 90^0$ b) $\alpha = \beta$ ist.

Analysis. Man wähle die Projektionsebenen I, II so, daſs g in I, h in II fällt und daſs h parallel zur Projektionsachse ist, also $n = AB$ in II und mit seinem einen Endpunkt A in die Projektionsachse fällt. Ferner seien C in g und D in h die Endpunkte von s. Eine durch CD senkrecht zu I gelegte Ebene schneide die Projektionsachse in E.

a) Fig. a. $\triangle\, CDE$ ist bestimmt aus $CD = s$, $DE = n$ und $\sphericalangle\, CED = 90^0$; mithin auch $\triangle\, ACE$ bestimmt aus CE, $\sphericalangle\, CAE = \omega$ und $\sphericalangle\, ACE = 90^0$ (denn $\sphericalangle\, ACD = 90^0$). AC ist dann der gesuchte Abstand sn.

b) Fig. b. Man ziehe durch C zu h die Parallele CF. Da $\sphericalangle\, ACD = \alpha$ und $\sphericalangle\, BDC = \beta$, so ist $\sphericalangle\, ACD = BDC$, mithin auch $\sphericalangle\, ACD = FCD$, also $\sphericalangle\, ACE = FCE$ und $\sphericalangle\, ACE = AEC$. $\triangle\, CDE$ ist wie in a) bestimmt. Ferner ist das gleichschenklige

Dreieck EAC bestimmt aus CE und $\sphericalangle EAC = \omega$. Der gesuchte Abstand sn ist die Senkrechte von A auf CE. Die wirklichen



Endpunkte der kürzesten Entfernung von s und n sind die Mittelpunkte von CD und AB.

Emmerich. End. Haluschka. Hodum. Lengauer. Schmidt.

624. (Gestellt von Schlömilch XVII_6, 447.) Im Innern eines gegebenen Dreiecks soll der Punkt O so bestimmt werden, daſs die Winkel BOC, COA, AOB mit den Supplementen der Dreieckswinkel übereinstimmen. Hierbei sind die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle BOC &= 180^0 - \alpha, & COA &= 180^0 - \beta, & AOB &= 180^0 - \gamma\\
&= 180^0 - \beta, & &= 180^0 - \gamma, & &= 180^0 - \alpha\\
&= 180^0 - \gamma, & &= 180^0 - \alpha, & &= 180^0 - \beta
\end{aligned}$$

Auflösung. Die verlangten Punkte sind der Höhenschnittpunkt und die beiden Brocard'schen Punkte (Segmentärpunkte) vergl. Nr. 119, XII, 107.

Bermann. Drees. Emmerich. Fuhrmann. Kober. Haluschka. Hodum. Lengauer. Schlömilch. Schmidt. Sievers. Simon. Stegemann. Stoll. Szimányi.

625. (Gestellt von Kiehl, XVII_6, 447.) Satz über den Brocard'schen Kreis. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten (vgl. Nr. 522 und 523 XVII_1, 33) der drei durch ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks bestimmten Parabeln sind parallel den Asymptoten der Hyperbel der neun Punkte (vgl. Nr. 395 bis 398, XV, 609.)

1. Beweis. Für die eine Tangente ergab sich die Bedingung, daſs sie die Spitzen von gleichschenkligen Dreiecken verbindet, deren Basiswinkel bestimmt ist durch $\sin(2\varphi + \vartheta) = 2\sin\vartheta$ (1). Zunächst sei bemerkt, daſs es zwei solcher Winkel giebt. Sind dieselben μ und ν, so ist natürlich $2\mu + \vartheta + 2\nu + \vartheta = 180^0$, also $\mu + \nu + \vartheta = 90^0$ (2). Diesen beiden Winkeln entsprechen die beiden Geraden als Tangenten an die drei Parabeln, von denen sich auch direkt beweisen läſst, daſs sie aufeinander senkrecht stehen. Aus den Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich leicht:

$$2 \sin\mu \,.\, \sin\nu = \sin\vartheta, \quad \sin(\mu - \nu) = \sqrt{1 - 4\sin\vartheta^2},$$
$$\operatorname{tg}\mu \,.\, \operatorname{tg}\nu = \frac{1}{3},$$

also $\cos\mu \,.\, \cos\nu = \frac{3}{2}\sin\vartheta$. Es schneide nun der Durchmesser HK des Brocard'schen Kreises über K hinaus den Kreis in L; die zu L gehörende Simson'sche Gerade ist eine Asymptote der Hyperbel Γ, welche also einer der angegebenen Tangenten parallel sein soll. Sind L_a, L_b, L_c die Lote von L auf BC, CA und AB, so ist LBL_aL_c ein Kreisviereck, also $\sphericalangle LBL_c = LL_aL_c$ und $LBL_c = LCA = \frac{1}{2} LMA$. Nun ist aber von Artzt bewiesen: $LMA = (BC, B'C')$ d. h. gleich dem Winkel, den die Seite BC mit der entsprechenden Seite des Brocard'schen Dreiecks bildet. $\sphericalangle LL_aL_c$ ist der Winkel, den die eine Asymptote mit dem Lote zu BC bildet; es ist also nachzuweisen, dafs eine der gemeinschaftlichen Parabeltangenten $A_1B_1C_1$ mit dem Lote von BC denselben Winkel bildet. Nun ist für $(BC, B'C') = \varphi_a$ nach Nr. 467, XV, 351 $\sin\varphi_a = \frac{\sin(\beta - \gamma)\sin\vartheta}{\sin\alpha\sqrt{1 - 4\sin\vartheta^2}}$. Die Spitzen der drei Dreiecke, welche eine Parabeltangente bestimmen, seien $A_\mu B_\mu C_\mu$ und das zweite System $A_\nu B_\nu C_\nu$; dann ist, wenn a_0 der Mittelpunkt von BC ist $a_0A_\nu = r\sin\alpha \operatorname{tg}\nu$, $a_0A_\mu = r\sin\alpha\operatorname{tg}\mu$, also $A_\nu A_\mu = r\sin\alpha\operatorname{tg}(\nu - \mu) = \frac{r\sin\alpha\sin(\nu-\mu)}{\cos\mu\cos\nu} = \frac{2r\sin\alpha\sqrt{1 - 4\sin\vartheta^2}}{3\sin\vartheta}$. Ist nun E der Schwerpunkt des Dreiecks, so ist $EA_\mu A_\nu$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $A_\mu A_\nu$, die Höhe desselben ist der Abstand des Schwerpunktes E von der Mittelsenkrechten $A_\mu A_\nu$. Im rechtwinkligen Dreieck giebt aber die Höhe dividiert durch die halbe Hypotenuse den Sinus des doppelten spitzen Winkels; die Höhe in $EA_\mu A_\nu$ ist $\frac{1}{3} r\sin(\beta - \gamma)$; also erhalten wir für den doppelten Winkel ω_a, den die eine Parabeltangente mit dem Lote zu BC bildet, die Gleichung $\sin\omega_a = \frac{\frac{1}{3}\sin(\beta-\gamma)\, 3\sin\vartheta}{r\sin\alpha\sqrt{1-4\sin\vartheta^2}} = \frac{\sin(\beta-\gamma)\sin\vartheta}{\sin\alpha\sqrt{1-4\sin\vartheta^2}} = \sin\varphi_a$. Da also $\frac{1}{2}\omega_a = \frac{1}{2}\varphi_a$ ist, so sind die angegebenen Geraden parallel, also auch die Senkrechten dazu.

Anmerkung. Aus dem Beweise folgt noch, dafs BC, $B'C'$, sowie CA, $C'A'$, AB und $A'B'$ mit jeder der Tangenten gleichschenklige Dreiecke bilden. Halbiert man die Winkel dieser Dreiecke, so erhält man die Richtungen der beiden gemeinschaftlichen Parabeltangenten.

Fuhrmann.

2. Beweis. (Vgl. Artzt, Programm. Recklinghausen S. 11.) Man bestimme die Gleichung der Parabel bc in Linienkoordinaten; aus dieser und der Gleichung des Schwerpunktes E die Gleichungen

der Tangenten, welche den drei Parabeln (bc), (ca) und (ab) gemeinsam sind und durch den Schwerpunkt E gehen. Dann läfst sich zeigen, dafs dieses Linienpaar und die Hyperbel Γ die unendlich ferne Gerade in denselben Punkten schneiden. Emmerich.

Stoll ähnlich mit Benutzung von Nr. 196, XIII, 358.

B. Neue Aufgaben.

669. Ist $x_1 + x_2 + \cdots x_n = a$ (wo $x_1, x_2 \cdots x_n$ wenigstens nicht alle gleich sind), so ist

$$\text{a)}\ \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^2; \qquad \text{b)}\ \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots x_n^3}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^3.$$

Szimányi (Trenchin).

670. In jedem sphärischen Dreieck, dessen Seiten nicht alle einander gleich sind, ist $2\,\mathrm{tg}\varrho < \mathrm{tg}\,r$, wo ϱ der Radius des Inkreises, r der des Umkreises ist. Emmerich (Mülheim a. d. R.).

671. Die Lote, welche man von einem Punkte der Höhe eines schiefen Kreiskegels auf die Geraden des Kegels fällen kann, haben ihre Fufspunkte in einem Kreise. (Wechselschnitt.)

Thieme (Posen).

672. Die Horizontalprojection eines Würfels, von welchem eine Seitenfläche horizontal liegt, ist ein Quadrat $ABCD$; stellt man dagegen eine Diagonale desselben Würfels vertikal, so besteht der Contour der Horizontalprojektion des Körpers aus einem regelmäfsigen Sechseck $EFGHIK$, dessen Inkreis gleich ist dem Umkreise des vorigen Quadrats. Demzufolge läfst sich das Quadrat so in das Sechseck einsetzen, dafs die Umfänge beider Figuren keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, dafs mithin die Differenz beider Flächen eine ringförmig geschlossene Fläche ist. Denkt man sich den Würfel in seiner zweiten Lage vertikal so durchbohrt, dafs $ABCD$ die Horizontalprojektion der Öffnung ist, so hat man den Satz: „ein Würfel kann durch einen ihm kongruenten Würfel so hindurch gesteckt werden, dafs der vom letzteren übrigbleibende Rest einen allseitig zusammenhängenden ringförmigen Körper bildet.“ Es fragt sich nun, ob die genannte Eigenschaft des Würfels nur diesem oder auch anderen regulären bezw. unregelmäfsigen Körpern zukommt. Schlömilch.

673. Auf dem Mantel eines Umdrehungscylinders (r, h) ist eine Schraubenlinie von n Gängen gezogen. An irgend einer Stelle sind zwei aufeinanderfolgende Schraubengänge durch eine Ganghöhe verbunden, und es ist über letzterer nach aufsen zu ein gleichseitiges Dreieck so angebracht, dafs seine erweiterte Ebene durch die Cylinderachse geht. Wird nun dieses Dreieck längs der Schraubenlinie verschoben, und dreht sich zugleich seine Ebene um die Achse, so beschreibt es ein scharfes Schraubengewinde. Man soll den

körperlichen Inhalt der aus diesem Gewinde und dem Cylinder zusammengesetzten Schraubenspindel berechnen. WEINMEISTER (Tharand).

674. Von einem beliebigen Punkte P einer Dreiecksseite ausgehend stumpfe man die drei Ecken des Dreiecks durch die gebrochene Linie $PQRS$ gleichschenklig ab (P und S auf BC, Q auf AB, R auf AC). a) P, Q, R, S liegen auf einem Kreise, der mit dem Inkreis koncentrisch ist. b) Setzt man die Konstruktion von S aus in derselben Richtung fort, so liegen auch die weiteren Punkte T und U auf demselben Kreise. c) $PS = QT = RU$ d) PS, QT, RU werden durch die Berührungspunkte des Inkreises des gegebenen Dreiecks halbiert. SIMON (Berlin).

675. Innerhalb oder aufserhalb eines Kreises sind zwei Punkte P und Q gegeben. Es soll auf dem Kreise ein Punkt C so bestimmt werden, dafs $\sphericalangle PCQ$ einen gröfsten oder kleinsten Wert annimmt. SPORER (Weingarten).

676. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben eine Ecke A, der Grebe'sche Punkt K und a) der Mittelpunkt H des Umkreises, b) der Schwerpunkt E. EMMERICH (Mülheim a. d. R.).

677. a) In welchem Falle ist ein Dreieck seinem Schwerlinien-Dreieck ähnlich? In einem solchen Dreieck a) ist $\cot \vartheta = \frac{3}{4} c^2 : F = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$. b) Berührt CK den Kreis mit dem Durchmesser MK, CS den mit dem Durchmesser SH (S Schwerpunkt, H Höhenschnittpunkt, K Grebe'scher Punkt, M Mittelpunkt des Umkreises) ARTZT (Recklinghausen).

678. Satz über den Brocard'schen Kreis. (Im Anschlufs an Nr. 625, siehe die vorhergehenden Auflösungen.) Sind A_2, B_2, C_2 die Brennpunkte der drei Parabeln, welche durch ähnliche Punktreihen auf den Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC erzeugt werden, und verbindet man dann den Schwerpunkt E mit A und A_2, resp. mit B und B_2, C und C_2, so sind die Halbierungslinien der Winkel AEA_2, BEB_2, CEC_2 die gemeinschaftlichen Parabeltangenten der drei Parabeln. FUHRMANN (Königsberg i. Pr.).

C. Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften.

Die mit † versehenen Auflösungen sind von den Redakteuren des Aufgaben-Repertoriums hinzugefügt.

Geometrische Konstruktions-Aufgaben.

Fortsetzung von Nr. 303 bis 313; XVII_7, 527 und XVIII_1, 37.

314. In ein Rechteck $ABCD$ ($AB = a$, $AD = b$) ein gleichseitiges Sechseck zu zeichnen und das Verhältnis von a und b zu bestimmen, wenn das Sechseck gleichwinklig sein soll.

Analysis. E sei die Mitte von AB, F die von AD; die Seite des Sechsecks, welche auf AB liegt, sei GH; eine Ecke des Sechsecks fällt in F. Dann ist über EF als Basis ein Dreieck zu konstruieren, dessen Spitze G auf AE liegt und dessen Seiten FG und GE sich wie $2:1$ verhalten. Soll das Rechteck auch gleichwinklig sein, so mufs $\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ sein.

Educat. Times.

315. Gegeben sind drei Kreise K, K', K'', welche durch denselben Punkt O gehen; man soll durch O eine Gerade ziehen, welche die drei Kreise resp. in A, A', A'' trifft, so dafs $AA' : AA'' = p : q$ ist.

Analysis. Von A ziehe man an K' und K'' resp. die Tangenten AP und AQ; dann ist $\frac{AA'}{AA''} = \frac{p}{q} = \frac{AA' \cdot AO}{AA'' \cdot AO} = \frac{AP^2}{AQ^2}$; folglich $\frac{AP}{AQ} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; daher läfst sich für A ein bekannter Ort konstruieren, so dafs die von ihm an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten in einem gegebenen Verhältnis stehen. (Vergl. Lieber und v. Lühmann Geom. Konstr.-Aufg. § 96).

Journ. élém.

316. Gegeben sind drei beliebige Kreise im Raum; man soll einen vierten Kreis konstruieren, der mit jedem der gegebenen zwei Punkte gemeinsam hat.

Analysis.† Der gesuchte Kreis schneide die drei gegebenen Kreise K, K', K'' in resp. A, B; A', B'; A'', B''. Schneiden sich AB und $A'B'$ in X, so hat X für die Kreise K und K' gleiche Potenz. Legt man daher durch die beiden Kreise zwei beliebige Kugeln, so ist X ein Punkt der Potenzebene derselben und liegt gleichzeitig in der Schnittlinie beider Kreisebenen. Ebenso findet man noch zwei Schnittpunkte von je zwei Sehnen.

Mathesis.

Sätze und Aufgaben über Kegelschnitte.

317. Von einem Punkt A der Achse einer gegebenen Parabel sind an dieselben die Tangenten AB und AC gezogen; aufserdem sind noch zwei beliebige Tangenten DE und FG gezogen, welche AB in D und F, AC in E und G treffen. Dann ist $DF = EG$.

Beweis. Die Parabel werde von DE in H und von FG in L berührt. Von B, D, H, F, E, L, G, C seien auf eine Senkrechte zur Achse die Senkrechten $BB', DD', HH', FF', EE', LL', GG', CC'$ gefällt. Dann wird BH, also auch $B'H'$ durch DD' halbiert; ebenso wird HC, also auch $H'C'$ durch EE' halbiert; folglich ist $D'E' = \frac{1}{2}B'C'$; ebenso ist $F'G' = \frac{1}{2}B'C'$, mithin $D'E' = F'G'$, also auch $D'F' = E'G'$. Fällt man nun $DP \perp FF'$ und $GQ \perp EE'$, so ist $\triangle DPF \cong GQE$, also $DF = EG$.

Nouv. Ann.

318. Durch den Punkt A einer Parabel zieht man die Sehne AB, welche gleichzeitig Normale der Parabel in A ist.

Eine Tangente der Parabel parallel AB berührt die Parabel in D und trifft die Direktrix L in C; dann ist $AB = 4CD$.

Beweis. CA ist die Tangente der Parabel. Der Durchmesser durch den Durchschnittspunkt H der Tangenten in A und B, welcher AB in G treffe, geht, da $CD \parallel AB$ ist, durch D. Der Durchmesser durch C treffe AD in I und AB in E; dann ist $AI = ID$, also auch $AE = EG$; ferner ist $AG = GB$, mithin $EG = CD = \frac{1}{4}AB$.

Journ. élém.

319. Sind φ, ψ und ϑ die Winkel, welche zwei beliebige Parabeltangenten und ihre Berührungssehne mit der Direktrix bilden, so ist $tg\varphi + tg\psi = 2\,tg\vartheta$.

Beweis.† Die Parabelgleichung sei $y^2 = 2px$; sind daher (ξ, η) und (ξ_1, η_1) die Berührungspunkte, so sind die Gleichungen der Tangenten $\eta y = p(x + \xi)$ und $\eta_1 y = p(x + \xi_1)$. Dann ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta}{p}$; $\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta_1}{p}$; ferner $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\xi - \xi_1}{\eta - \eta_1} = \frac{\eta + \eta_1}{2p} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{2}$.

Educat. Times.

320. Gegeben ist der Kreis O mit dem Durchmesser AOB und der Tangente AT; die Tangente in einem Punkt C des Kreises trifft AT in D; und die Parallele durch D zu AB trifft OC in P. Gesucht wird der Ort für P, wenn sich C auf dem Kreise bewegt.

Auflösung. A sei der Koordinatenanfang und AB die XAchse. Fällt man PQ senkrecht auf AB, so ist $\triangle\, OQP \cong PCD$, also $OQ = DP = x$; mithin $OP^2 = x^2 = y^2 + (r - x)^2$, also $y^2 = 2rx - r^2$. Setzt man $x = x' + \frac{r}{2}$, so ist der gesuchte Ort $y^2 = 2rx$, also eine Parabel. Der Scheitelpunkt liegt im Mittelpunkt von AO und der Brennpunkt in O; dieselbe geht durch die Endpunkte des auf AB senkrechten Durchmessers.

Mathesis.

321. Gegeben ist ein Kreis O (Radius r) mit den zueinander senkrechten Durchmessern AA' und BB'; D sei die Projektion eines beliebigen Punktes C des Kreises auf BB'. Gesucht wird der Ort des Durchschnittspunktes M der Geraden OC und AD.

Auflösung. Die Koordinaten von C seien ξ und η; dann ist die Gleichung von $AD: y = \frac{\eta}{r}x$ und die von $OC: y = \frac{\eta}{\xi - r}(x - r)$; mithin erhält man als Koordinaten von $M: x = \frac{r^2}{2r - \xi}$ und $y = \frac{r\eta}{2r - \xi}$; also $\xi = \frac{r(2x - r)}{x}$ und $\eta = \frac{ry}{x}$. Da nun $(r - \xi)^2 + \eta^2 = r^2$, so erhält man als Gleichung des gesuchten Ortes $y^2 = 2rx - r^2$ (also wie Nr. 320).

Mathesis.

322. AA' und BB' seien zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Kreises O, und CC' sei eine mit AA' parallele Sehne. Gesucht wird der Ort des Durchschnittspunktes von AC und BC', wenn sich CC' bewegt.

Auflösung.† O sei der Koordinatenanfang; dann hat man folgende Koordinaten $A(r,o)$, $B(o,r)$, $C(\xi,\eta)$, $C'(-\xi,\eta)$. Ferner $AC \equiv y = -\frac{\eta}{r-\xi}x + \frac{r\eta}{r-\xi}$; $C'B \equiv y = \frac{r-\eta}{\xi}x + r$. Für die Koordinaten von P findet man dann: $x = \frac{r\xi}{\xi+\eta}$ und $y = \frac{x(r+\xi)}{\xi}$ $= \frac{r(r+\xi)}{\xi+\eta}$; mithin $\xi = \frac{xr}{y-x}$ und $\eta = \frac{r(r-x)}{y-x}$. Da nun $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ so erhält man als Ort für P die Gleichung $x^2 - y^2 - 2x(r-y)$ $= -r^2$. Setzt man $x = \frac{r}{2} + x_1$ und $y = -\frac{r}{2} + y_1$, so folgt $x_1^2 - y_1^2$ $- 2x_1y_1 + \frac{r^2}{4} = 0$. Setzt man ferner $x_1 = x_2 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha$ und $y_1 = x_2 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha$, so ist

$$(x_2^2 - y_2^2)(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) - 2xy(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) + \frac{r^2}{4} = 0.$$

Wird $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$, also $\alpha = 67^0 30'$, so erhält man für den Ort die Gleichung $x^2 - y^2 = -\frac{r^2}{8\cos 2\alpha}$, derselbe ist also eine gleichseitige Hyperbel. Mathesis.

323. Eine gleichseitige Hyperbel zu konstruieren, wenn eine der beiden Asymptoten, eine Tangente und ein Punkt P der Hyperbel gegeben sind. (Bei der Lösung wird folgender leicht zu beweisender Satz benutzt: Fällt man von einem beliebigen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel auf eine Tangente und auf die nach ihrem Berührungspunkt vom Mittelpunkt gezogene Gerade Senkrechte, so sind die Fufspunkte derselben vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.)

Analysis. O sei der Mittelpunkt der Hyperbel, OX die gegebene Asymptote, CM die gegebene Tangente (C auf OX, M Berührungspunkt). Wir ziehen noch $PA \perp OM$ und $PB \perp CM$. Da $OM = CM$, so ist $\sphericalangle MOC = MCO$; und da $\sphericalangle MCO$ bekannt ist, so kennt man auch die Richtungen aller Geraden, welche parallel OA sind und folglich die Richtung von PA, welche senkrecht auf diesen Geraden steht. Ist nun B' der symmetrische Punkt zu B in Bezug auf OX, so ist $OB = OB'$, und nach dem obigen Satz ist auch $OB = OA$, mithin ist O Mittelpunkt der Kreises BAB'. Es kommt also darauf an, einen Kreis zu konstruieren, welcher durch B und B' geht und PA berührt; der Mittelpunkt desselben ist O.
Nouv. Ann.

324. Beschreibt man mit einem Durchmesser PQ einer gleichseitigen Hyperbel um P einen Kreis, so schneidet dieser die Hyperbel in A, B und C so, dafs $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Beweis. Man halbiere QA durch A' und ziehe OA'; da AQ und BC gemeinsame Sehnen des Kreises und der Hyperbel sind, so sind sie zu den Achsen gleich geneigt und OA' ist der konjugierte

Durchmesser zu den Sehnen parallel AQ, mithin schneiden sich OA' und BC rechtwinklig. Da ferner $QO = OP$, $AA' = A'Q$, so ist $AP \parallel A'O$; mithin schneiden sich AP und CP rechtwinklig. Ähnlich läfst sich zeigen, dafs $BP \perp AC$, P also der Höhenschnittpunkt von $\triangle ABC$ ist, und da er aufserdem noch Mittelpunkt des Umkreises ist, so ist $\triangle ABC$ gleichseitig. Educat. Times.

325. Gegeben eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt O und auf ihr zwei Punkte $P_1(\alpha_1\beta_1)$ und $P_2(\alpha_2\beta_2)$. Durch P_1 und P_2 sind Parallele zu den Asymptoten OO' und OO'' gezogen, welche sich in $P_3(\alpha_3, \beta_3)$ und $P_4(\alpha_4, \beta_4)$ schneiden. Dann ist zu beweisen, dafs P_3P_4 durch O geht.

Beweis.† Die Gleichung von OO' sei $y = ax$; dann ist die von $OO'' \equiv y = -ax$. Da $P_1P_3 \parallel OO'$, so ist die Gleichung von $P_1P_3 \equiv y = ax + \mu$, wo μ bestimmt ist durch $\beta_1 = a\alpha_1 + \mu$, also $P_1P_3 \equiv y = ax + \beta_1 - a\alpha_1$; analog $P_1P_4 \equiv y = -ax + \beta_1 + a\alpha_1$; $P_2P_3 \equiv y = -ax + \beta_2 + a\alpha_2$ und $P_2P_4 \equiv y = ax + \beta_2 - a\alpha_2$. Aus P_1P_3 und P_2P_3 findet man α_3 und β_3, aus P_1P_4 und P_2P_4 α_4 und β_4; nämlich

$$\alpha_3 = -\frac{\beta_1 - \beta_2}{2a} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \qquad \text{und} \qquad \alpha_4 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2a} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \frac{a(\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \qquad \qquad \beta_4 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \frac{a(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}.$$

Mithin ist $P_3P_4 \equiv y = \dfrac{a^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_1 - \beta_2}x$; daher geht P_3P_4 durch O.

Journ. spéc.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Auflösungen sind eingegangen von Bermann 648. 652—654. 662. 664. Beyel 651. 652. End 649—651. Fuhrmann 652—654. 656. 657. von Jettmar 649. 652. 653. Kober 664. 666. Lengauer 641. 643. 648—651. 653. 656. 657. von Miorini 658. 664. 666. Niseteo 644. 645. 652. 653. Sauter 637. 638. 642. 644—646. 651—653. 656. 657. Schmidt 638—640. 642—646. 648. 652. 654. 656. 657. Schmitz 658. 660. 661. Simon 639. 660. 661. 664. Stegemann 637—640. 642—648. 652—654. 656. 657. Stoll 648—650. 652—654. 656. 657. Tauberth 652. 653. Weber 642.

Neue Augaben: Fuhrmann (1), Grube (1), von Jettmar (3), Kober (2), Most (2), Niseteo (3), Schlömilch (2), Simon (2).

NB. Man sehe wegen der Einsendungstermine der Beiträge den Briefkasten der Red. d. Z. am Ende dieses Hefts. D. Red. d. Z.

Litterarische Berichte.

A. Rezensionen.

Blater, Joseph, **Napiertafel, enthaltend die 9 Vielfachen aller Zahlen vermittelst Zusammensetzen der dazu erforderlichen Stäbchen zur bequemeren und rascheren Ausführung von Multiplikationen und Divisionen mit Gebrauchsanweisung. Herausgegeben nach Angabe des Herrn A. Steinhausser, k. k. Regierungsrat in Wien. Kommissionslager von F. Frey in Mainz. 1886.**

Im Jahre 1617 gab Baron Napier, der bekannte Erfinder der Logarithmen, zu Edinburgh seine *„Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo“* heraus; die dort beschriebenen Hilfsmittel des instrumentalen Rechnens fanden eine abermalige Erörterung in der Schrift von Scheffelt „Nepperianische Rechenstäblein“ (Ulm 1714). Später machte Gergonne von neuem auf dieses Verfahren aufmerksam, aber erst der durch seine mathematischen Tafeln zu hohem Ansehen gelangte Wiener Mathematiker Steinhauser erweckte es wieder zu neuem Leben, indem er in Herrn Blater zu Wörrstadt (Rheinhessen) einen ebenso geschickten wie unermüdlichen Gehilfen bei der Ausführung seiner Ideen zu finden so glücklich war.

Durch die vereinten Bemühungen beider Herren ist der modernisierten Napiertafel eine sehr geeignete Gestalt gegeben worden. Man denke sich in einen rechteckigen, nach der einen Schmalseite offenen Rahmen eingespannt 28 schmale Stäbchen, deren Längsrichtung auf der längeren Rechtecksseite senkrecht steht. Je vier dieser Stäbchen, die unmittelbar auf einander folgen, stimmen in allen Teilen mit einander überein. In der zur Seite angegebenen Weise trägt jeder Stab am Kopfe eine ganze Zahl n (< 10) und vertikal unter derselben folgen die 9 ersten Vielfachen dieser Zahl so, dafs die Zehnerzahl links unter der Einerziffer steht. Wo $p \,.\, n$ $(p < 9)$ nur einziffrig ausfällt, wird an die untere Stelle eine Null gesetzt. Will man nun zwei Zahlen mit einander multiplizieren, so setzt man sich aus den oben am Kopf befindlichen Ziffern den Multiplikanden zusammen und multipliziert diesen sukzessive mit jeder Ziffer des Multiplikators dadurch, dafs man innerhalb des dieser

Ziffer entsprechenden Horizontalstreifens die beiden in einem schiefwinkligen Parallelogramm stehenden Zahlen addiert. So ist der ganze Prozeſs auf ein vielmaliges Addieren zurückgeführt, und ebenso das Dividieren auf wiederholte Subtraktion. Bei einiger Übung kann dieser Mechanismus kompliziertere Rechnungen der zweiten Stufe ganz ungemein erleichtern.

Herr Blater gedenkt demnächst eine gröſsere tetragonometrische Tafel zu konstruieren. Nach der hier besprochenen Probe seines Talents wird man diesem Vorhaben nur ein günstiges Prognostikon stellen dürfen.

München. Dr. S. Günther.

Zusatz des Herausgebers.

Da wir aus der vorstehenden Beschreibung der Tafel und ihres Gebrauchs ohne Tafelskizze nicht recht klar wurden, so erbaten wir uns von der (Kommissions-)Verlagshandlung in Mainz zu der bereits erhaltenen Tafel die Gebrauchsanweisung und erhielten dieselbe nebst noch zwei Reserve-Bündelchen Streifen vom Verfasser aus Wörrstadt (Rheinhessen). Wir glauben nun manchen unserer Leser einen Gefallen zu erweisen, wenn wir dieselbe (unter Abänderung einiger zu Miſsverständnissen und Hinzufügung einiger zur Veranschaulichung geeigneten Stellen) hier mitteilen.

Gebrauchsanweisung.

Jeder vertikale Tafelstreifen*) enthält die 9 Vielfachen der am Kopfe befindlichen Zahl, jedoch mit, durch einen schrägen Querstrich (Diagonale) getrennten, Ziffernpaaren und Ersatz durch 0, wenn keine Zehner vorhanden sind.

So zeigt sich z. B. das Doppelte der Zahl 916358 in folgender Form: so daſs immer die Einer über, die Zehner unter der Diagonale stehen.

Durch die Querstriche (Diagonalen) bilden sich schiefe Parallelograme die in der oberen und unteren Ecke eine Ziffer enthalten und durch den Schnitt verschiedenen (senkrechten) Streifen angehören. — Statt des Multiplizierens werden diese zwei Ziffern addiert.

Diese Addition ist so leicht, daſs es keiner besonderen Gewandtheit bedarf, alle derartigen Vielfachen direkt vom Blatte abzulesen. — Beim Zusammensetzen von 916358 liest man z. B. das siebenfache mit = 6414506 ab.

*) Wir haben diese vertikalen Streifen, da es durch farbige (rote) Linien nicht anging, durch punktierte Linien angedeutet.

Mit diesen Streifen können daher alle Zahlen zusammengesetzt werden, welche die vorhandene Anzahl Wiederholungen gleicher Wertzeichen, die in beliebiger Menge erhältlich sind, nicht überschreiten.

Multiplikationsverfahren.

Index	9	1	6	3	5	8	*Index*
2	8 \ 1	2 \ 0	2 \ 1	6 \ 0	0 \ 1	6 \ 1	2
3	7 \ 2	3 \ 0	8 \ 1	9 \ 0	5 \ 1	4 \ 2	3
4	6 \ 3	4 \ 0	4 \ 2	2 \ 1	0 \ 2	2 \ 3	4
5	5 \ 4	5 \ 0	0 \ 3	5 \ 1	5 \ 2	0 \ 4	5
6	4 \ 5	6 \ 0	6 \ 3	8 \ 1	0 \ 3	8 \ 4	6
7	3 \ 6	7 \ 0	2 \ 4	1 \ 2	5 \ 3	6 \ 5	7
8	2 \ 7	8 \ 0	8 \ 4	4 \ 2	0 \ 4	4 \ 6	8
9	1 \ 8	9 \ 0	4 \ 5	7 \ 2	5 \ 4	2 \ 7	9

Beim Multiplicieren nimmt man am besten den größeren Faktor zum Multiplikanden, der aus den Streifen zusammengesetzt wird*) und schreibt die im Multiplikator enthaltenen Vielfachen einer jeden Stelle ab, unter Ablesung dieser Vielfachen, selbstverständlich der Sicherheit wegen, von rechts nach links.

Beispiel.

916358 × 73819 = ?

7	6414506
3	2749074
8	7330864
1	916358
9	8247222
	67644631202

Divisionsverfahren.

Bei Divisionen ist der Vorteil noch grösser, weil man die in der Tafel enthaltenen Vielfachen des Divisors nicht anzuschreiben braucht, dieselben können von der Tafel aus direkt abgezogen werden, wodurch die Hälfte der Zahlen gespart wird und die Division doppelt so rasch als auf gewöhnliche Weise ausgeführt werden kann**)

*) Diese Arbeit des Zusammensetzens der Streifen beansprucht natürlich einige Zeit (und Mühe), da auch der (als „Index" bezeichnete) Multiplikatorstreifen angesetzt werden muſs. Das dürfte vielleicht manchen gegen die Tafel einnehmen.

**) Der Verfasser vergiſst hier, daſs dies nur gilt, wenn man die österr. Subtraktionsmethode (mittels Zuzählen) anwendet, die wahrscheinlich auch Hr. Steinhauser im Sinne gehabt hat. Nach der gebräuchlichen deutschen Weise (mittelst Abzählen und „Borgen") ist es viel umständlicher, wie auch die von uns a. f. S. gegebene doppelte Darstellung zeigen dürfte. D. H.

Index	9	1	6	3	5	8	*Index*
2	8 1	2 0	2 1	6 0	0 1	6 1	2
3	7 2	3 0	8 1	9 0	5 1	4 2	3
4	6 3	4 0	4 2	2 1	0 2	2 3	4
5	5 4	5 0	0 3	5 1	5 2	0 4	5
6	4 5	6 0	6 3	8 1	0 3	8 4	6
7	3 6	7 0	2 4	1 2	5 3	6 5	7
8	2 7	8 0	8 4	4 2	0 4	4 6	8
9	1 8	9 0	4 5	7 2	5 4	2 7	9

Beispiel.

67644631202 : 916358 = ?

a) ohne kurze Division (mit Anschreiben der Teilprodukte):

```
6 7 6.4.4 6.3 1 2 0 2 : 916358 = 73819
6 4 1 4 5 0 6
-------------
  3.4 9 9 5.7.1
  2 7 4 9 0 7 4
  -------------
    7 5.0 4 9 7.2
    7 3 3 0 8 6 4
    -------------
      1 7 4.1.0 8.0
        9 1 6 3 5 8
      -------------
        8 2 4 7 2 2 2
        8 2 4 7 2 2 2
        -------------
              0
```

b) mit kurzer Division (die Teilprodukte oder Vielfachen des Divisors, die oben mit kleinen Ziffern geschrieben waren, sind fortgelassen):

```
67644631202 : 916358 = 73819
 3499571
  7504972
   1741080
    8247222
    0000000
```

Man spreche: „56 und **7** ist 63“ und indem man nun im Gedanken rasch die Zehner von 63, also 6, zu den in nächster Colonne stehenden 35 zählt, erhält man 41 und sagt nun gleich „41 und **5** ist 46“ und so weiter: 25 und **9** ist 34 u. s, f. Die fettgedruckten, beim Sprechen zu betonenden Ziffern sind immer als Rest hinzuzuschreiben.

Schliefslich sei noch erwähnt, dafs bei abgekürzten Multiplikationen wie auch Divisionen vielstelliger Dezimalbrüche diese Ausführung, durch successives Wegrücken des letzten Streifens für die nicht mehr in die Berechnung fallende letzte Stelle, sehr bequem wird. D. H.

Cauchy, Augustin Louis, Algebraische Analysis, deutsch herausgegeben von Carl Itzigsohn. Berlin, Verlag von J. Springer 1885. XII u. 398 S. Pr. 9 *M*.

Gemäfs der „Absicht, solche mathematische Werke, welche auf die Entwickelung der reinen Mathematik einen wesentlichen Einflufs geübt haben, allen, welche an der Quelle zu schöpfen wünschen, zugänglich zu machen“ (s. Prospekt), bietet die Verlagshandlung im

Verein mit der Redaktion*) hier ein weiteres Glied aus der Reihe der in Aussicht genommenen mathematischen Studienwerke. Nach Eulers „Einleitung in die Analysis des Unendlichen"**) ist die Wahl auf *Cauchy, cours d'Analyse* gefallen, und das mit Recht. Denn dieses Werk des bedeutenden französischen Mathematikers***) zeigt nicht nur einen Fortschritt in der Analysis an, sondern vertritt in derselben auch eine eigenartige Richtung, indem es sich auf die Stetigkeit der Funktionen stützt. Deshalb war für jeden Mathematiker, der in diesen Teil seiner Wissenschaft tiefer eindringen wollte, das Studium dieses Werkes unerläfslich. Da aber das Original (nach dem Vorwort des Herausgebers) seit geraumer Zeit vergriffen ist, so war für jeden, der an dieser Quelle schöpfen wollte, selbst in einer Universitätsstadt, seine Benutzung schwierig oder mindestens umständlich; und darum gebührt sowohl der Verlagshandlung als auch der Redaktion für die deutsche Ausgabe der Dank aller Mathematik-Studierenden.

Es liegt in der Natur der Sache, dafs die Anzeige der Übersetzung eines Werkes, dessen wissenschaftliche Bedeutung und Ruf feststehen, sich beschränken mufs auf die Treue der Übersetzung. In dieser Beziehung haben uns wenigstens eine Anzahl Stellen, die uns als Stichproben dienten, gelehrt, dafs der Verfasser bestrebt war, den Originaltext wortgetreu wiederzugeben, ohne die Klarheit des Ausdrucks und somit die Verständlichkeit des Werkes zu beeinträchtigen. In der Übersichtlichkeit der Formeln und in der Hervorhebung der den Inhalt charakterisierenden Definitionen, Begriffe und Sätze durch den Druck dürfte die Übersetzung das französische Original weit hinter sich lassen, wie denn überhaupt die Ausstattung eine sehr wohlgefällige ist und der Verlagshandlung Ehre macht.

Aber auch nach einer andern Seite der Mathematik sind solche Übertragungen und Wiederbelebungen älterer Werke wichtig, nämlich nach der wenig gepflegten litterar-geschichtlichen Seite. Es giebt namhafte neuere Mathematiker, die in ihren Büchern, Kompendien und sonstigen Elaboraten die geschichtliche Seite gänzlich vernachlässigen. Solche Bücher machen den Eindruck als wollten ihre Verfasser sich mit dem Glorienschein eines Entdeckers umgeben und den Unkundigen weifs machen, sie selbst hätten alle diese schönen Sätze und Theorien ge- oder erfunden, während ihnen doch

---

*) Wer die Oberredaktion dieses Unternehmens führt, ist im Prospekt nicht gesagt.

**) Besprochen von Günther XVI, 508 u. ff.

***) Über denselben sehe man das französische Buch von C. A. Valson, *La vie et les travaux du Baron Cauchy,* 2 Bde. Paris 1868. Des Verfassers Urteil über das vorliegende Werk findet man im 2. Tl. (part. scientifique) p. 21 u. f. Einen Auszug hieraus enthält nach einer Mitteilung Günthers, Boncompagnis Bulletin 2. Bd. S. 1 u. ff. Auch Gauss soll sich über dasselbe ausgesprochen haben. Doch konnten wir die letzteren beiden Werke nicht einsehen. D. Red.

nur das Verdienst einer besondern, im günstigen Falle zweckmäſsigen, Anordnung, die oft nicht einmal neu ist, zukommt. Solche moderne aller litterar- und kritisch-geschichtlichen Behandlung bare Sammelwerke hat, wie wir in X, 118 bemerkten, einst ein feinsinniger Akademiker verglichen mit einem Gebräu aus zerschnittenen Weinresten, aus denen der ursprüngliche Geist und das unmittelbare Feuer entwichen sei. Für solche Leute, falls sie nicht selbst um die Weiterentwickelung der Wissenschaft sich verdient gemacht haben, ist die erneute Auflage eines älteren klassischen Werkes ein Wasserstrahl, geeignet das hochgradige Selbstgefühl abzukühlen, und eine Warnungstafel vor Überhebung, für den Jünger der Wissenschaft aber ein erneuter Wegweiser nach den Quellen.

Darum sollten alle Bücher, die auf wissenschaftlichen Wert Anspruch erheben, immer auf die Quellen zurückgehen und litterarische Verzeichnisse mitgeben, sei es in Anmerkungen, sei es in Zusätzen. Dies macht z. B. die Bücher von Baltzer, Kruse und Günther so wertvoll. Wir haben an anderer Stelle*) darauf hingewiesen, wie notwendig das auch für Aufsätze in Zeitschriften sei. Hierin sind die Math. Annalen redigiert von Klein ein Muster. Möchten die Erneuerungen altklassischer mathematischer Werke, welche die Verlagshandlung veranstaltet, auch zur Belebung des kritisch-geschichtlichen Studiums der Mathematik beitragen. H.

Gandtner und Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Für den Schulgebrauch sachlich und methodisch geordnet und mit Hilfsmitteln zur Bearbeitung versehen.

1. Teil, die Anwendungen der Proportionen nicht erfordernd. (Mit 6 T.-Fig.) VII und 214 S. 2. Aufl. 1879. Pr. ℳ 2.40.

2. „ (Mit 8 T.-Fig.) IV u. 276 S. 3. Aufl. 1882. Pr. 3 ℳ. Beide Teile bearbeitet von Dr. K. F. Junghans.

Das vorstehende Werk, welches seinerzeit von dem verstorbenen Prof. Binder am Seminar in Schönthal (Würtemberg), späteren Realschuldirektor in Ulm**) im Jahrg. 1872 (S. 389 u. 473 ff.) ausführlich besprochen wurde, ist 1879—1882 in neuer Auflage von Prof. Junghans allein bearbeitet, verbessert und vermehrt, erschienen und um etwa 50 Seiten angewachsen. Zwar hat schon Hr. Prof. Dr. Lieber-Stettin in XI, 216 den ersten Teil der neuen Auflage kurz angezeigt; doch dürfte es wohl nicht überflüssig sein, auf das seit 1882 vorliegende vollständige Werk die Leser dieser

*) XV, 279: „Warum sollen Original-Artikel zu ihrem Thema eine litterar-geschichtliche Einleitung geben?“ S. dort auch die Citate der Anm.

**) Verstorben im Jahre 1883. S. dessen Nekrolog XV, 648.

Zeitschrift, wenn auch etwas spät, wiederholt aufmerksam zu machen, da diese Sammlung zu den reichhaltigsten und durchdachtesten ihrer Art gehört. Es würde sich empfehlen, wenn die Herren Aufgabensteller und Aufgabenlöser im Aufgaben-Repertorium dieser Zeitschrift auf dasselbe recht fleifsig Rücksicht nähmen und so zu immer gröfserer Vervollkommnung des Werkes beitrügen. Sollte einer der Herren Fachgenossen, welche das Studium geometr. Aufgabensammlungen zu ihrem Spezialfache erkoren haben, eine neue an die Bindersche anknüpfende, die Fortschritte der Wissenschaft und Didaktik berücksichtigende Kritik dieses Werkes geben wollen, so würden wir ihm sehr zu Danke verbunden sein. H.

Wir benutzen diese Gelegenheit, um im Anschlufs hieran auf Wunsch der Verlagshandlung auf das in demselben Verlage erschienene

Lehrbuch der Mathematik für höhere Schulen von K. Gallien (Dir. d. Realgymn. in Neisse),

hinzuweisen. Es enthält in drei Heften (Teilen) 1) die Mathematik und Algebra, 2) die Planimetrie, 3) die Stereometrie mit Trigonometrie (Pr. bezw. 80, 120, 100 ₰). Das schon mehr einem Leitfaden nach Art von Kambly gleichende und nach dogmatischer (Euklidscher) Methode bearbeitete „Lehrbuch“ enthält keine Vorrede und ist daher Bestimmung und Plan des Verfassers nur aus dem Titel und dem Inhalt zu erkennen. Besondere Vorzüge darin zu erkennen, ist vielleicht nur dem möglich, der das Buch bei seinem Unterricht längere Zeit benutzt hat. Die Ausstattung (Format, Papier, Druck) ist lobenswert. H.

Riemann, Dr. Carl, Taschenbuch für Mineralogen. Berlin, Verlag von J. Springer 1887. VIII u. 338 S.*)

Dieses Buch wird wahrscheinlich vielen Fachleuten und unter ihnen auch den (freilich sehr dünn gesäeten) Mineralogen unter den Lehrern an höheren Schulen recht willkommen sein. Denn heutzutage, wo für den Lehrer und Schriftsteller (und „geschriftstellert“ wird ja unter den Lehrern sehr viel) jede Minute Zeit Gold ist, braucht man Hilfsmittel, die einem auf Fragen sichere und rasche Antwort geben, d. h. Bücher mit lexikographischer Einrichtung. Ein solches liegt hier für die Mineralogie vor. Der Inhalt desselben, hinter dem Vorwort und Inhaltsverzeichnis (S. III—VIII) ist folgender: 1) Tabellarische Übersicht der Mineralien (S. 1—233). — 2) Systematische Übersicht der Mineralien (S. 234—253). —

*) Der Redaktion in elegantem Einband überreicht.

3) Topographische Übersicht der Mineralien. Hier folgen die einzelnen Erdteile und bei Europa noch besonders Deutschland und Österreich-Ungarn (S. 254—301). — 4) Tabellarische Übersicht der kristallographischen Systeme (S. 302—307). — 5) Litteratur (S. 308—311). — 6) Alphabetisches Register (S. 312—338). — Angehängt ist noch: 7) Druckfehlerverzeichnis nebst einer Anzahl leerer (weifser) Blätter zu Notizen.

Wir gestatten uns bezüglich der zweckmäfsigen Einrichtung der Tabellen einige Bemerkungen mit dem Wunsche, der Herr Verfasser möchte sie bei einer neuen Auflage in Erwägung ziehen.

Versetzen wir uns gleich in die Praxis. Wir hätten z. B., da wir als Mathematiker nicht Mineralog von Fach sind und doch darin unterrichten müssen oder weil wir mit einem andern Fachgenossen — etwa einem Chemiker — über ein Mineral, etwa den Eisenglanz (= Glanzeisenerz) uns streiten, nachzuschlagen. Nehmen wir nun Naumann-Zirkel zur Hand, so müssen wir doppelt nachschlagen, zuerst im Register, dann im System. Hier aber brauchen wir nur eine Stelle aufzusuchen. Wir finden sub E S. 72 über dieses, wie über jedes Mineral in Colonnen angegeben:

Chem. Zusammensetzung	Krystall-System	Krystallographische Axen	Optische Axen	Glanz	Farbe	Strich	Härte	Spaltbarkeit	Spez. Gew.	Bemerkungen (Vrh. v. d. L. Lösungsverhältn.)

Leider aber finden wir nicht dén Fundort (bezw. die Fundorte). Was Verfasser bewogen hat, diesen wegzulassen, ist uns unverständlich; denn hier ist gerade der Punkt, wo die Mineralogie mit Geographie und Geologie (Geognosie) sich berührt. Verfasser giebt freilich in einem besondern Abschnitt „Topographische Übersicht der Mineralien" (S. 254—301) diejenigen Mineralien an, die in den einzelnen Erdtheilen und Ländern vorkommen (wobei er Europa und Deutschland einen verhältnismäfsig grofsen Raum widmet); allein es wird doch wohl niemandem einfallen, die sämtlichen Mineralien wissen zu wollen, welche z. B. in Spanien (— es sind im Buche S. 272 deren 55 angeführt —) oder in Baiern vorkommen; man will vielmehr eben den Fundort von dem einen Minerale, das man gerade betrachtet, wissen, also hier von Eisenglanz. Sollten nun, wie meist der Fall, mehrere oder gar viele Fundorte existieren und zur Angabe derselben der vorhandene Druckraum nicht ausreichen, so möge man sich auf zwei beschränken, oder man gebe den Hauptfundort an, d. h. den, wo das Mineral in gröfster Menge und Güte vorkommt, z. B. Quecksilber (im Buche „Mercur" genannt) in Almaden (Spanien), Idria (Krain), was auch für den Unterricht in Schulen zu empfehlen ist. Die übrigen Fundorte gebe man in Tabellen an und verweise auf sie. Bezüglich der Namen sollten auch die Ersatzworte (Synonymen)

angeführt sein, z. B. bei Eisenglanz auch Glanzeisenerz (s. Naumann Min. 2. Aufl. 1850 S. 411.)

Die Colonne „Opt. Axen" konnte mit der vorhergehenden „kryst. Axen" verbunden werden, denn erstere ist, der Natur der Sache entsprechend, meist sehr leer. Dadurch wäre Raum gewonnen worden für eine Colonne „chem. Untersuchung" a) Feuerweg: v. d. L. b) flüssiger Weg: Auflösung. In der Colonne „Bemerkungen" sucht man dies nicht. Denn darunter versteht man etwas anderes, nämlich Besonderheiten, die nicht bei jedem Mineral vorkommen.

Ob das Buch bei seiner Reichhaltigkeit auf Vollständigkeit wie sie ein Mineralog von Fach braucht und auf Korrektheit, wie sie ein solcher fordern mufs, Anspruch erheben darf, mögen gewiegtere Federn entscheiden. Der Verfasser bekennt in der Vorrede mit grofser Bescheidenheit, dafs er „sich der vielen Fehler und Mängel welche dem Buche noch anhaften, sehr wohl bewufst" sei und er bittet die Fachgenossen und Sammler, ihm bei der Vervollständigung und Verbesserung dieses seiner Natur nach wesentlich „kompilatorischen" Werkchens behilflich zu sein. Für Lehrer an höheren Schulen wenigstens glauben wir das handliche Büchlein getrost empfehlen zu können. H.

Berlepsch, H. A., Die Alpen in Natur- und Lebensbildern. Mit 18 Illustrationen nach Originalzeichnungen von Emil Rittmeyer. Fünfte, sehr vermehrte und verbesserte Auflage. Zweite wohlfeile Volksausgabe. Umgearbeitet, vermehrt und ergänzt vom Sohne des Verfassers H. E. v. Berlepsch. Jena, Hermann Costenoble 1885. Lex.-Okt. X u. 270 S. Pr. br. ℳ 6, geb. ℳ 7.50*).

Es giebt Bücher, welche den Schul- bezw. Schüler-Bibliotheken sozusagen auf den Leib gepafst sind. Zu ihnen gehören z. B. Rofsmäfslers Jahreszeiten**), Cohns Pflanze***), Tschudis Tierleben der Alpenwelt u. v. a.†), auf die wir in dieser Zeitschrift

---

*) Der Redaktion in elegantem Einbande dargereicht. Die Red.

**) Man sehe XVII, 262 u. s. w.

***) M. s. ebenda und XV, 631.

†) Wir führen aus der langen Reihe solcher Schriften noch folgende an: Knauer, aus der Tierwelt. Freiburg i. B. 1886. — Vogt, Vorlesungen über nützliche, schädliche, verkannte und verläumdete Tiere. Leipzig 1864. — Faraday, Natur-Geschichte einer Kerze. Berlin, Oppenheim. Sechs Vorlesungen für die Jugend. Aus dem Englischen. — Pisko, Licht und Farbe. 2. Aufl. München 1876. — Gerstendörfer, Das Erzgebirge. — Pelchrzim, Die Sonne, mit ihren Planeten und Monden, die Kometen, feurigen Meteore u. s. w. unter Anwendung der Spektral-Analyse. Der Jugend in Gesprächen eines Vaters mit seinen Kindern erzählt. Berlin, Kühl, 1883. — Hierher gehören auch die Lehrschriften von Ule und Müller. Wir

schon mehrfach hingewiesen haben. Ihnen reiht sich mit vollem Recht das vorstehende Werk an. Es hat uns seinerzeit, als wir noch Geographieunterricht erteilten (oder erteilen mufsten*), in der 1. Auflage (ersch. 1862) vortreffliche Dienste geleistet, nicht nur für unsere eigene Anregung und Belehrung, sondern auch als Unterstützung unsers geogr. Unterrichts, indem wir zur Anregung der Schüler, zur Erläuterung und Erweiterung unseres Lehrvortrags passende Stücke daraus vorlasen. Man mufs freilich dieses Unterstützungsmittel sehr vorsichtig oder wie der Lateiner sagt „*cum grano salis*" anwenden. Dafs der geschickte und vorsichtige Lehrer das vorzulesende Stück sorgfältig und passend auswählen und es vorher genau durchlesen mufs, um etwa unpassende Stellen auszuscheiden und unverständliche zu erläutern, braucht wohl kaum erinnert zu werden. Wohl aber kann im Schüler der Gedanke aufsteigen, dafs das Vorlesen nur ein Deckungsmittel der Unkenntnis des Lehrers sei und er wegen dieses Deficits in seinen Kenntnissen eine Anleihe in Büchern machen müsse. Wie der Lehrer diesem Schülerverdachte entgegenzutreten hat, dafs wird jeden sein eigener pädagogischer Takt und seine pädagogische Klugheit lehren.

Kehren wir nach diesem unseres Erachtens nicht ganz unnützen pädagogischen Abstecher zu unserer Vorlage zurück. Sie hat bereits fünf Auflagen erlebt, und jedenfalls ist mit der fünften diese zweite (wohlfeile) Volksausgabe identisch. Sie ist gegen die erste (1862) im Umfang von 392 Seiten auf deren 566 angewachsen und um zwei Illustrationen (Nr. 15 „Schwinget" und Nr. 10 „Gemsenjagd") vermehrt (i. G. 18).

Über dieses Werk etwas Charakterisierendes oder Lobendes zu sagen, erscheint uns beinahe vermessen, mindestens unbescheiden, zumal da es einerseits sehr bekannt, andererseits durch die beigedruckten Recensionsbelege hinreichend nach seinem inneren Gehalt und Wert gekennzeichnet ist. Die Lektüre desselben ist geeignet, besonders das Studium der Alpen überhaupt und der Schweiz im besondern, diese schwierigen Kapitel des geogr. Unterrichts, zu erleichtern und angenehm zu machen. Dürfen wir für eine neue Auflage einen Wunsch aussprechen, so ist es der: es möchten manche Abschnitte durch kleine Skizzen veranschaulicht und so dem Gedächtnisse gesicherter gemacht werden. Wir haben hier besonders die Alpenübergänge (Eisenbahnen, Tunnel, Strafsen, Saumpfade) im Auge; dies könnte geschehen zugleich mit Rücksicht auf die Reihenfolge

werden hierauf zurückkommen in dem Verzeichnisse der für Schüler-Bibliotheken geeigneten mathem.-naturw.-geogr. Bücher, das wir in einem spätern Hefte dieses Jahrganges zu bringen gedenken.

*) Sie wurde dem untersten (jüngsten) Lehrer und zwar dem Lehrer der Naturwissenschaft zugewiesen; nicht etwa, weil sie eine „Naturwissenschaft" sei, sondern weil — sie niemand haben wollte. Und so mufsten wir uns in dieses Fach „einarbeiten" (doch mit den knappsten Hilfsmitteln).

ihrer Entstehung im Laufe der Zeit, also nach geschichtlichem Gesichtspunkt.

Ein so vorzügliches Werk bedarf der Empfehlung nicht mehr. Wohl aber wollen wir die Schulen auf diese neue Auflage aufmerksam machen, damit das Werk, wo es noch fehlen sollte, schleunigst den Lehrer- oder Schülerbibliotheken einverleibt werde zum Segen des geographischen Unterrichts.

Anhang.

Für diejenigen, welche das Buch noch nicht kennen sollten, wollen wir den Inhalt (nebst den Illustrationen) hier mitteilen:

Das Alpengebäude (im allgem.) — Granit — Erratische Blöcke — Karrenfelder — Nagelfluh — Bergstürze (mit Abbildung*) — Der Bannwald (m. A.) — Die Wettertanne (m. A.) — Legföhren (m. A.) — Die Alpenrose — Alpensee — Südliche Alpenthäler — Kastanienwald (m. A.) — Eine Nebelnovelle — Nebelbilder — Wetterschiefsen — Hoch-Gewitter — Der Wasserfall — Der Schneesturm im Gebirge — Roter Schnee — Die Rüfe — Die Lauine (m. A.) — Der Gletscher (m. A.) — Alpenglühen — Alpenspitzen (m. A.) — Gebirgspässe und Alpenstrafsen (m. A.) — Gebirgs- und Bergbahnen — Die Hospitien — Sennenleben in den Alpen (m. A.) — Das Alphorn — Der Geifsbub (m. A.) — Der Wildheuer (m. A.) — Alpstubete oder Älplerfest (m. 2 A.) — Holzschläger und Flöfser (m. A.) — Auf der Jagd (m. 2 A.) — Dorfleben im Gebirge (m. A.) — Der Alpenbewohner Volksschauspiele und Dorfkomödien — Mythe und Sage in den Alpen —

Illustrationen: Alpenspitze. Alpenstrafse. Alpstubete. Bannwald. Bärenjagd. Begräbnis. Bergsturz. Edelkastanie. Geifsbub. Gemsenjagd. Gletscher. Holzflöfser. Lauine. Legföhren. Schwinget. Wettertanne. Wildheuer. Wildkirchli. —

Kleiner Litteratur-Saal.

Sammler, (Realschuldirektor in Rochlitz i./S.) Studierlampe, Rochlitz i./S., Verl. von Pretzsch 1886. IV u. 47 S.

Es giebt Leute, die in allen oder wenigstens in sehr vielen Wissensgebieten zu Hause sind und als kleine Polyhistoren gelten können. Ein solcher scheint auch der Verfasser dieses Büchelchens zu sein. Denn er bietet auf 47 Seiten nicht nur dem Philologen (Theologen etc.), sondern auch dem Mathematiker „Allerhand" (s. S. 17). Den Reichtum des Inhalts möge der Leser aus folgendem Index ersehen:

Sprachlicher Teil: Vater unser, in nicht weniger als 9 Sprachen bezw. Dialekten. Die Musen u. s. w. Verwandtschaftsbenennungen. Der Zodiacus. Die Jahreszeiten. Die Winde. Die Wochentage. Die 7 Weisen. Den bei Thermopylä gefallenen Spartanern. Akrosticha. Palindroma.

---

*) In der Folge abgekürzt: m. A.

Anagrammata. Chronosticha. Zweideutige Orakelsprüche. Epigramme. Die kurzen Imperative u. s. w. Metrische Aufgaben. Rätsel. Allerhand. Philosophische und naturwissenschaftliche Sätze. Rechtssprichwörter. Versus memoriales für die Sonntage vor und nach Ostern. Gesundheitsregeln. Abkürzungen. Musikalische Rebus.

Mathematischer Teil: Algebraische Aufgaben. Beweise, daſs 3 = 5, 7 = 13 ist. Zählspiele. Rechenkunststückchen. Schach. Das Sophisma des Zeno. Die Gauſs'sche Osterformel. Das franz. Bauernrechnen u. s. w. Regeln über die Aufsuchung sämtlicher Primfaktoren. Versus memoriales für π. Zur Permutationslehre. Vom Pythagoräischen Lehrsatz.

Auflösungen. Sprachlicher Teil. Mathematischer Teil.

Nachtrag.

Die dünne Form des Büchelchens ermöglicht es, bei Spaziergängen oder in Gesellschaften dasselbe mit sich zu führen und dürfte es geeignet sein, die Unterhaltung in mannichfacher Weise zu beleben; zumal auch Lehrern, die mit ihren Schülern, sowie Schülern, die unter sich Ausflüge machen, sei es zu diesem Zwecke hiermit empfohlen. H.

Lorenz, Dr. Carl, Führer durch das naturwissenschaftliche Berlin. Mit 8 Grundrissen und 3 Plänen. XI u. 233 S. Berlin, Fischers medizinische Buchhandlung. 1886. Pr. 2 Mk.*)

Während die gewöhnlichen Reisehandbücher wie Bädecker und Grieben der Metropole des deutschen Reichs doch nur einen Abschnitt widmen und dann, gerade so wie auch Specialbroschüren über dieselbe, ihr Thema allgemein behandeln, greift dieses Buch eine besondere Eigenschaft derselben heraus: den Reichtum naturwissenschaftlicher Anstalten und Bildungsmittel, die mathematischen, technischen, pädagogischen und medizinischen natürlich einschlieſsend. Daſs hierüber allein ein Buch von solchem Umfange geschrieben werden könnte, hätten wir nicht geglaubt.

Das Ganze zerfällt in zwei Abteilungen:

I. Praktische Vorbemerkungen. Sie enthalten das materielle jedem Reisenden Wissenswerte (Gasthöfe, Verkehrsanstalten, Vergnügungen etc.).

II. Das naturwissenschaftliche Berlin. Hier werden der Reihe nach vorgeführt: A. Wissenschaftliche Institute (Hochschulen). B. Desgleichen ohne Lehrkörper. C. Berliner höhere Lehranstalten. D. Behörden. E. Privatinstitute und Sammlungen. F. Gesellschaften und Vereine. G. Bibliotheken.

Zugegeben sind noch Grundrisse und Pläne (2 von chemischen Laboratorien, Bergakademie, botanischer und zoologischer Garten und natürlich der — Stadtplan in wünschenswerter Gröſse und Übersichtlichkeit (Maſsstab 1 : 15 000, Gröſse 60 cm. : 45 cm.).

Wir empfehlen dieses Reisehandbuch den Herren Fachgenossen und besonders den Lehrern der Naturwissenschaften als Führer bei einem event. Besuche der Reichshauptstadt. H.

*) Der Redaktion als gebundenes, handliches und bequemes Reisehandbuch überreicht.

Zu den Proben aus Seminar- und Volksschulunterricht.

Das im Jahre 1885 in 13. Auflage erschienene Realienbuch von H. Lettau (Verlag von Ed. Peter in Leipzig) enthält auf Seite 88—96 die Raumlehre; hierin finden sich folgende schöne Erklärungen*):

1) Flächen sind Grenzen von Körpern. Jede Fläche oder Figur hat zwei Ausdehnungen, eine in die Länge und eine in die Breite. Flächen werden von den Linien begrenzt, die man hier Seiten nennt. Wo die begrenzenden Linien einander treffen, entstehen aufserhalb Ecken, innerhalb Winkel.

2) Ein Cylinder ist ein Prisma, dessen Endflächen gleich grofse Kreise und dessen Seitenfläche (oder Mantel) ein einseitig gekrümmtes Parallelogramm ist.

3) Der Kegel ist ein Körper, der von einem Kreise als Grundfläche und einem krummgebogenen Dreieck als Seitenfläche eingeschlossen ist, das in einen Punkt ausläuft, welcher die Spitze des Kegels heifst.

L. H.

Zu den Lehr-Utensilien.

(Bleistifte von Faber.)

Für unsere Fächer, besonders aber für Zeichnen, sowohl freies als auch geometrisches, ist es von Wert gute Bleistifte zur Verfügung zu haben. Wir wendeten uns daher, um uns hierüber zu informieren, an die berühmte Bleistiftfabrik von Johann Faber in Nürnberg. Derselbe sandte uns mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit eine ausgewählte Sammlung (Sortiment) vorzüglicher Bleistifte, unter ihnen auch farbige und Taschenstifte. Wir geben zu Nutz und Frommen der Bleistiftbedürftigen unter unsern Fachgenossen eine Zusammenstellung dieser Sendung:

I. Zeichenstifte.

Nr. 2441. Polygrades-Bleistifte mit sibirischem Graphit, sechskantig, braun, naturpoliert, mit Goldstempel:

Zeichen		
BB	weich und sehr schwarz	Nr. 1.
B	weich und schwarz . .	
HB	mittelhart und schwarz	„ 2.
J	mittel	„ 3.
H	hart	
HH	hart und sehr fest . .	„ 4.
HHH	sehr hart	

Diese Bleistifte, aus feinstem und bestem Material hergestellt, sind geeignet zum Zeichnen, für Photographen zu Retouchen, für Ingenieure, Architekten, Baumeister und natürlich für Zeichenlehrer. Der Einzelpreis pro Dutzend ist *M.* 2.75.

II. Farbige Komptoir- und Korrigierbleistifte.

Nr. 718. Feinster Blaustift in Cedernholz, rund**), blaupoliert, mit Goldstempel I^a^ Qualität.

---

*) Eingesandt von einem Volksschullehrer. Nach einer erbetenen Mitteilung der Verlagshandlung ist der Verfasser (Lettau) Kantor in Grunau, einem Dorfe in Ostpreufsen. Die Red.

**) Diese runde oder Walzen-Form ist unpraktisch, weil die Stifte leicht herunterkollern. Die kantige Form ist vorzuziehen. D. Red.

Nr. 723. Feinster Rotstift in Cedernholz, rund, rotpoliert mit Goldstempel. Ia Qualität.
„ 725/6. Feinster Grünstift in Cedernholz, rund, grünpoliert mit Goldstempel Ia Qualität.
„ 717. Feinste Rot- und Blaustifte (einerseits rot, anderseits blau), sechskantig, in Cedernholz, rotpoliert mit Goldstempel Ia Qual.

Diese Stifte sind besonders zum Komptoirgebrauch bestimmt. Aber sie sind ebenso nötig und nützlich für Redaktionen und Lehrer beim Korrigieren der Schülerhefte und anderer Schularbeiten, ähnlich wie die farbigen Kreiden bei Vorträgen an der Wandtafel. Der Einzelpreis pro Dutzend ist *M.* 1.50 bis *M.* 3.

III. Taschenbleistifte.

Nr. 4501. Neue Automatenbleistifte $10\frac{1}{2}$ cm lang mit Bleimine, sechskantig.
„ 4502. Desgleichen $12\frac{1}{2}$ cm lang mit Kopiermine.

Durch einen Druck auf das obere (geschlossene) Ende, fällt der (nackte) Bleistift nach unten und wird nach der Stellung von einer Zange festgehalten. Nach dem Gebrauch kehrt man den Stift um und läfst ihn wieder in das Rohr hineinfallen. Der Einzelpreis dieser Stifte von Nr. 4500 bis 4503 mit je einem Büchschen Blei- oder Kopiereinlagen ist pro Stück *M.* 1.

Die Stifte dieser Sammlung, befestigt auf einer Papptafel, waren sämtlich sehr schön gespitzt (wahrscheinlich mittels Maschine) und boten ein sauberes und elegantes Aussehen. Wir haben mehrere dieser Stifte seit längerer Zeit im Gebrauch und müssen unsere grofse Zufriedenheit mit denselben aussprechen. Von einem Brechen des Bleies, wie bei vieler anderen schlechten Ware, keine Spur. Die Farbe ist schön und das Abfärben (Schreiben) geht mit Leichtigkeit vor sich. Wir empfehlen hiermit diese Stifte aufs angelegentlichste und raten unsern Herren Fachgenossen sich direkt an Herrn Johann Faber zu wenden. D. Red.

B. Programmschau.

Mathematische und naturwissenschaftliche Programme der Provinzen Preufsen und Posen.*)

Michaelis 1886.

Berichterstatter Dr. Meyer, Rektor des Realprogymnasiums zu Freiburg, Schl.

Preufsen.

Rössel. Gymn.-Progr. Nr. 16. Oberl. Haub, *über die geometrischen Eigenschaften der Kurve, deren Gleichung* $y^2(2a-x)-x(a-x)^2=0$ *lautet.* 18 S. 4° u. eine Figurent.

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung einer Abhandlung des Verfassers über denselben Gegenstand, die im Progr. d. Gymn. zu Rössel vom Jahre 1874 enthalten ist, und über welche in dieser Zeitschrift noch nicht berichtet worden ist, da die Programmschau erst mit dem Jahre 1876 beginnt. Nachdem der Verfasser in jener ersten Abhandlung die in Rede stehende Kurve definiert, ihre Gleichung aufgestellt und diskutiert, einige geometrische Eigenschaften der Kurve entwickelt, die Gleichungen der Tan-

*) In den Michaelisprogrammen des Jahres 1886 aus der Provinz Schlesien befinden sich keine mathematischen und naturwissenschaftlichen Abhandlungen.
D. Berichterst.

gente und Normale, Polarsubtangente und Polarsubnormale aufgestellt, einige geometrische Eigenschaften dieser Linien entwickelt und die Kurve quadriert hat, bespricht er in der vorliegenden Arbeit den Krümmungskreis und die Rektifikation der Kurve, indem er sowohl die Länge des Bogens, welcher nur dem geschlossenen Teile angehört, als auch die Länge des Bogens, welcher den Zweigen angehört, bestimmt.

Posen.

Wongrowitz. Gymn.-Progr. Nr. 153. August Nowicki, *Beitrag zur Flora Vangrovecensis.* II. 88 S. (89—176) 8°.

Auch diese Abhandlung ist eine Fortsetzung der Programmabhandlung des Verfassers vom Jahre 1885, über welche im 17. Jahrgange dieser Zeitschrift, S. 222 berichtet worden ist, und enthält die Familien der Skrofulariaceen, Labiaten, Verbenaceen, Primulaceen, Plumbaginaceen, Plantaginaceen, die Abteilung der Monochlamydeen, die Klasse der Monokotyledonen, die Gymnospermen, die Kryptogamen, Nachträge, Berichtigungen, Druckfehler, ein alphabetisches Register der lateinischen Familien- und Gattungsnamen, in welchem hinter jedem Gattungsnamen die Arten der Gattung wiederum in alphabetischer Reihe folgen, und zum Schlufs ein alphabetisches Register der deutschen Pflanzennamen. Jedem Namen des (lateinischen und des deutschen) Registers ist die Nummer der Seite beigedruckt, auf welcher die genannte Pflanze beschrieben ist.

Notiz über die Fortsetzung der Programmschau.

Vom Herausgeber.

Dem Herausgeber ds. Z. ist von mehreren Seiten die Ansicht teils offen ausgesprochen, teils nur angedeutet worden, dafs die Programmberichte, bisher ein zur Vervollständigung gehörender (integrierender) Bestandteil d. Z., von vielen Lesern wenig oder nicht beachtet (ignoriert) würden und daher — überflüssig seien. Der Herausgeber ist hierüber gegenteiliger Ansicht und ist fest entschlossen die Programmschau beizuhalten. Denn wenn auch vielleicht die Programm-Aufsätze zum grofsen Teile das Gepräge von Mufs- oder Zwangs-Arbeiten an sich tragen und darum viel Mittelgut, ja z. Tl. auch recht leichte Waare enthalten, so geben sie doch im Allgemeinen ein Bild von dem Grade des Fleifses und des Privatstudiums der Fachlehrer einer Provinz oder eines Landes und können einst für einen bestimmten Zeitraum der Geschichte des mathem.-naturw. Studiums oder Unterrichts als Grundlagen dienen. Es findet sich aber unter diesen Aufsätzen auch manches Treffliche, ja manche Perle. Dies ist besonders dann der Fall, wenn der Verfasser ein engeres Spezialgebiet, welches bisher brach gelegen hatte, behandelt. Die Berichte über solche Arbeiten werden um so anmutender, wenn sie aus so gewandter Feder, wie die unsers geehrten Mitarbeiters Günther, fliefsen. Weniger ansprechend dürften Aufsätze aus der höheren Mathematik sein, welche oft nur als neue Auflagen oder Fortsetzungen von Examens- oder Promotions-Arbeiten erscheinen.

Wir wünschen daher, dafs die Programmberichte nicht nur fortgesetzt werden, sondern dafs sie sich auch bald über ganz Deutschland erstrecken möchten. —

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Das lateinlose höhere Schulwesen im diesjährigen (preufsischen) Landtage.*)

Bei der Beratung des pr. Kultusetats wurde die Angelegenheit der lateinlosen Schulen, speziell der Oberrealschulen, zur Sprache gebracht. Der Herr Kultusminister benutzte die Gelegenheit, diesen Anstalten seine vollen Sympathieen auszusprechen. Er liefse sich in der Wertschätzung der lateinlosen Schulen nicht irre machen und würde stets seine schützende Hand über sie halten. Eines ihrer Hauptziele sei, uns von der Überproduktion gelehrter Leute zu befreien. Die lateinlose Vorbildung sei, sobald es sich um den Eintritt in das praktische Leben handle, im allgemeinen die zweckmäfsigere. Weiter wolle er sich jetzt nicht äufsern, da die Petition der Direktoren unserer Ober-Realschulen weitere Erwägungen veranlassen würde.

Ob das Publikum die Ansichten des Herrn Ministers teilt, ist eine Frage, die sich nur aus der Statistik beantworten läfst. Nach dem Centralblatt der Unterrichtsverwaltung steigerte sich von 1880 bis 1885 der Besuch der Gymnasien in folgender Reihe:

75 190, 76 104, 78 126, 79 291, 79 783, 80 019,

der der Progymnasien folgendermafsen:

4094, 4026, 4087, 4281, 4139, 4274,

so dafs die Anstalten lateinisch-griechischer Bildung von 79 284 Schülern auf 84 293, d. h. um mehr als 5000 stiegen. Der Zudrang zum Gymnasium wächst demnach stetig fort, also auch die Überproduktion von Gelehrten.

Die Realgymnasien nehmen in folgender Reihe stetig ab:

27 666, 26 479, 26 725, 26 340, 25 605, 24 706.

Die Realprogymnasien, die wohl im Jahre 1882 offiziell von allem, was man sonst als höhere Bürgerschule bezeichnete, abgetrennt wurden, zeigten von da ab folgende Zahlen:

9428, 9215, 9426, 9050.

Die Abnahme der lateinischen Realanstalten beträgt also seit 1882 nicht weniger als 2397, die der Realgymnasien allein seit 1880 sogar 2360 Schüler. Während früher auf 100 Gymnasiasten 36 Realgymnasiasten kamen, kommen jetzt auf 100 der ersteren nur noch 30 der letzteren. Der Rückgang der Realgymnasien und lateinischen Realschulen

---

*) Aus der „Rhein.-Westf. Ztg." vom 9. März 1887. Verfasser ist einer unserer Mitarbeiter. D. Red.

steht also ziffernmäfsig fest, trotz der warmen Befürwortung durch den Verein der Schulmänner, trotz der schon jetzt so zahlreichen Berechtigungen. Die vielfach als lebensunfähig hingestellten Ober-Realschulen (9klassig und lateinlos) zeigen folgendes Wachstum:

1656, 3989, 4120, 4048, 4980, 5120.

Die lateinlosen Realschulen (7klassig) wurden seit 1882, wo die oben besprochene Lostrennung geschah, folgendermafsen besucht:

4161, 4025, 3537, 4151,

sie sind sich also etwa gleich geblieben.

Dagegen wachsen die 6klassigen höheren Bürgerschulen ohne Latein im gleichen Zeitraum erfreulich an:

4514, 5214, 5394, 5931.

Die sämtlichen lateinlosen höheren Schulen stiegen also vom Jahre 1882 bis 1885 um 2408 Schüler, die weit zahlreicheren Gymnasien nur um 2080, die lateinischen Realanstalten endlich sanken um 2397.

In den Jahren 1882 und 1885 verhalten sich die drei Hauptgruppen folgendermafsen:

	Gymnasiasten,		lateinische Realschüler,		lateinlose Schüler.
1882	82 213	:	36 153	:	12 795
1885	84 293	:	33 756	:	15 202
oder: 1882	27	:	12	:	4
1885	28	:	11	:	5

Das Publikum wendet sich demnach der lateinlosen Vorbildung mehr und mehr zu, wenn auch noch nicht in dem wünschenswerten Mafse. Sollte aber die Entwickelung in der besprochenen Weise weitergehen, worüber allerdings ein so kurzer Zeitraum nicht entscheiden läfst, so würden die lateinischen Realanstalten allmählich verschwinden und nur die Gymnasien und die lateinlosen Schulen würden bestehen bleiben. Ob dies erfreulich oder bedauerlich sein würde, soll hier nicht untersucht werden. Jedenfalls aber spricht die Statistik noch nicht für die so vielfach erstrebte Einheitsschule, sei es die lateinische, oder die lateinlose. Es scheint mehr Neigung zur Zweiteilung vorhanden zu sein. Ohne weitergehende Spekulationen an diese Bemerkungen anzuknüpfen, wollen wir nur noch sagen, dafs wir die Art und Weise, wie sich der Herr Kultusminister geäufsert hat, als eine berechtigte und zu den besten Hoffnungen berechtigende anerkennen müssen. Die genannte Petition wird, nachdem der Herr Minister selbst auf sie hingewiesen hat, im Landtage der Besprechung unterworfen werden müssen, obwohl die abfällig urteilende Kölnische Zeitung kürzlich meldete, die Herrenhauskommission wollte den Übergang zur Tagesordnung empfehlen. Der abfällig urteilenden Kölnischen Zeitung steht übrigens weit gewichtiger die Zustimmung des grofsen Vereins deutscher Ingenieure gegenüber, der in der soeben erschienenen Nummer seiner Zeitschrift sich „In Sachen der Ober-Realschulen“ äufsert (Seite 210—211). Auf die Koblenzer Beschlüsse der 6500 Mitglieder zählenden Körperschaft, welche s. Z. in der Rheinisch-Westfälischen Zeitung wörtlich mitgeteilt worden sind, braucht nur hingewiesen zu werden. Sie sind kürzlich den Ministerien der Einzelstaaten eingereicht worden. Die Petition selbst verlangt Aufhebung des Punktes der Maybach'schen Bestimmungen vom 6. Juli 1886, durch welchen den Abiturienten der Ober-Realschulen die Berechtigung zur Staatslaufbahn im Bau- und Maschinenwesen entzogen wird, oder wenigstens die Hinausschiebung des Termins von 1889 auf 1895. Die Entscheidung über die Hauptforderung hängt davon ab, welchen Wert

man der lateinlosen Bildung zuzusprechen hat. Zur Erörterung dieses Punktes ist der Petition eine Denkschrift beigelegt, die, von Gallenkamp verfafst, als eine bedeutsame Kundgebung über das lateinlose Schulwesen zu betrachten ist. Ihr Wert beruht besonders darin, dafs fast sämtliche Staaten Europas bezüglich ihres Bildungswesens zur Sprache kommen.

Der Vergleich zeigt, dafs Deutschland an der Überschätzung des Antiken festgehalten hat, während alle anderen Staaten in der Wertschätzung der modernen Bildung vorangeschritten sind.

1. Frankreich. Die Gymnasial- und Reallinie, beide neunjährig, haben die drei Unterklassen gemeinsam und zwar wird auf der Unterstufe nur eine Sprache, d. h. eine lebende Sprache gelehrt, sei es Deutsch oder Englisch. Erst im vierten Jahre setzt eine zweite Sprache ein, bei der Reallinie wiederum eine moderne. Die lateinlose Reallinie berechtigt zur polytechnischen Schule, zur Militärschule, zur Forstakademie und zu allen daraus folgenden Staatsämtern. Auch der Apothekerberuf, der Post- und Telegraphendienst stehen den lateinlosen Abiturienten offen, die letzten beiden sogar mit Vorzug vor den Gymnasiasten. Sämtliche akademischen Grade sind ihnen zugänglich.

2. Schweden. Die Gymnasial- und die Reallinie haben ebenfalls auf den drei Unterklassen nur eine fremde Sprache, die deutsche. Die Realschule bleibt auch oben lateinlos. Sie berechtigt zur technischen Hochschule, zur Bergakademie und den entsprechenden Staatskarrieren, die den Gymnasien verschlossen sind, wenn sie nicht Ergänzungsprüfungen bestehen. Dasselbe gilt von der Kriegsschule. Die Realabiturienten können durch Ergänzungsprüfung auch zur Universität gelangen. Man erstrebt jedoch noch weitergehende Modernisierung des Schulwesens. (Vergl. Klinghardt, das höhere Schulwesen Schwedens. Leipzig bei Julius Klinkhardt. 2 Mk.)

3. Norwegen. Die sechs Unterklassen beider Schulgruppen sind gemeinsam und lateinlos. Nur die Reallinie berechtigt zur Marinelaufbahn und zum Telegraphendienst, obwohl sie lateinfrei bleibt. Zur technischen Hochschule bereiten beide Gruppen vor. Die Gymnasiasten haben zum Eintritt in die Kriegsschule eine Ergänzungsprüfung nötig. Die Reallinie berechtigt zur Kriegsschule, zu allen technischen Studien und zur Rechtswissenschaft.

4. Österreich-Ungarn. Die lateinfreie Ober-Realschule berechtigt zu den technischen Studien und Staatsämtern. In Ungarn stimmt der Unterrichtsminister Trefort der totalen Modernisierung des höheren Schulwesens zu und will allen Lateinzwang aufheben.

5. Schweiz. Auf dem Progymnasium tritt das Latein erst im 5. Jahreskurse ein, auf dem darüber stehenden Gymnasium ist es nur für die späteren Theologen, Juristen, Mediziner und Philologen obligatorisch.

6. In England haben die höheren Schulen als alte Stiftsschulen noch antiken Charakter. Die Modernisierungsbestrebungen aber, besonders durch Lord Sherford gefördert, sind in neuerer Zeit fast unwiderstehlich geworden.

Schon diese kurze Inhaltsangabe zeigt, von wie weittragendem Interesse die Denkschrift ist, wie schwerwiegend die Gründe sind, die gegen den Maybachschen Erlafs und gegen die Begünstigung der sogenannten Standesinteressen (vergl. Agitation der höheren Staatsbaubeamten, besonders in der Kölnischen Zeitung, gegen die Ober-Realschulen) sprechen. Wer sich der Lebhaftigkeit erinnert, die bei den Landtagsdebatten von 1878/79 über die vorliegende Schulfrage herrschte, der wird mit Spannung der diesjährigen Petitionsberatung entgegensehen. Beiläufig sei daran erinnert, dafs schon am 31. Januar durch den Abgeordneten Lohren die Frage der lateinlosen Schulen und der technischen Fachschulen zur Sprache

gebracht wurde. Die wohlgemeinte Rede, die uns im stenographischen Berichte vorliegt, geht von der Ansicht aus, daſs lateinlose berechtigte Schulen in Preuſsen nicht beständen, obwohl wir deren 19 haben. (Merkwürdigerweise ist der Geh. Oberregierungsrat Lüders in seiner Antwort derselben Ansicht!) Ferner wünsche er nach Art der bayrischen Industrieschulen technische Fachschulen, die sich an die höheren Bürgerschulen anschlieſsen. Auch diese sind bei uns vorhanden und zwar in besserer Organisation als in Bayern, wo sie für allerlei Berufszweige der Praxis vorbereiten, sogar zur Post-, Telegraphen- und Eisenbahnkarriere, während bei uns bloſs ein einzelnes bestimmtes Fach, besonders das der Maschinentechnik, betrieben wird. Vielleicht kommt auch dieser Punkt bei der Petitionsberatung zu nochmaliger Besprechung. Soeben veröffentlicht Professor Schmeding, der bekannte Vorkämpfer der Entlatinisierung, in der pädagogischen Zeitschrift von Dittes einen Aufsatz über den obengenannten englischen Minister und dessen Ansichten über die klassische Bildung in der Gegenwart. Die „lateinlose Bewegung" scheint in der That Dimensionen anzunehmen, die jeden Gebildeten zwingen, in der Frage Stellung zu nehmen. Hlzm.

Das Salzbergwerk zu Staſsfurt.*)

Mit Kartenskizze.

Mitteilung von Hodum, Lehrer daselbst.

Dort, wo jetzt die Bode durch das Tiefland flieſst, befand sich zu der Zeit, als Norddeutschland noch vom Meere bedeckt war, wahrscheinlich ein tiefer Meerbusen, der weit in das Land einschnitt, und der nur so weit mit dem Meere in Verbindung stand, daſs nicht mehr Wasser eintreten konnte, als an der Oberfläche verdunstete, während die untern Schichten des Wassers durch eine den Meerbusen abschlieſsende Sandbank oder Barre am Abflieſsen verhindert wurden. Durch die fortwährende Verdunstung wurde nun das Wasser der sogenannten Egelschen Mulde des Magdeburger-Halberstädter Beckens sehr salzhaltig und das übergesättigte Wasser lieſs schlieſslich das Salz zu Boden fallen, wodurch mit der Zeit am Grunde der Mulde sich ein Salzlager bildete, dessen Mächtigkeit (d. h. senkrechter Durchschnitt) bis jetzt noch unbekannt ist, trotzdem der Bohrer schon über 400 Meter in das Steinsalz eingedrungen ist. Dieser Vorgang muſs im Laufe der Zeit zwei Mal stattgefunden haben; denn an vielen Stellen der Mulde trifft man über der Anhydritschicht, welche über dem eigentlichen Salzlager sich befindet, noch ein jüngeres Steinsalzlager**) an.

Jahrtausende hat nun dieses mächtige Salzlager in der Erde geruht und nur die zahlreichen Soolbrunnen, die sich in der Umgegend von Staſsfurt befanden und ausgebeutet wurden, gaben Zeugnis von den

*) Dieser Artikel ist auf Veranlaſsung der Redaktion vom Hrn. Verfasser geliefert worden. Wir glaubten, mit demselben manchem Lehrer der Geographie und der Naturwissenschaften, besonders der Naturgeschichte, einen Dienst für ihre Lehrstunden zu erweisen. Es wäre überhaupt wünschenswert, wenn von Punkten unsres deutschen Vaterlands, welche für die Naturgeschichte wichtig sind, von dort wohnenden Lesern (Lehrern) lebensvolle auf Anschauung gegründete Schilderungen gegeben würden. Wir haben sogar, einmal in ds. Z. den Lehrern den Gedanken nahe gelegt: es könnte auf diese Art eine Geographie Deutschlands von deutschen Lehrern geschrieben und durch jährliche Revision auf dem Laufenden erhalten werden. Einen ähnlichen Artikel sehe man in dem neuen Werke „Umschau in Heimat und Fremde" von Hentschel-Märkel, Breslau, Hirt, 1886, S. 146. Die Redaktion.

**) Karl Ochsenius: Die Bildung der Steinsalzlager und ihrer Mutterlaugensalze unter spezieller Berücksichtigung der Flötze von Douglashall in der Egel'schen Mulde. Halle 1877, Pfeffer.

Schätzen, die tief in der Erde verborgen lagen. Erst in den fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts dachte man daran, diese Schätze zu heben.

Bohrversuche, die im Jahre 1839 ihren Anfang nahmen und viele Jahre hindurch fortgesetzt wurden, deckten in einer Tiefe von 256 Metern ein Salzlager von über 325 Meter Mächtigkeit auf, da in einer Tiefe von 581 Meter die Bohrversuche eingestellt wurden, ohne daſs das Liegende des Salzlagers erreicht war. Aber erst Ende 1851 und Anfang 1852 wurde in der Mitte der Stadt der Zwillingsschacht Heydt und Manteuffel angelegt. Beide Schächte erreichten innerhalb fünf Jahren eine Tiefe von 335 Meter und sind ausgezimmert.

Das Salzlager hat in der Richtung von Südost nach Nordwest eine Neigung von 30 bis 40 Grad gegen den Horizont. Über demselben lagert eine Anhydritschicht von 40 bis 90 Metern Mächtigkeit. Das Lager selbst besteht von oben nach unten aus folgenden vier Schichten:

1) Die Carnallit-Region, 42 Mtr. stark, welche hauptsächlich die Kalisalze enthält;

2) die Kieserit-Region, 56 Mtr. stark, die schwefelsauren Verbindungen neben Steinsalz herrschen vor;

3) die Polyhalit-Region, 62 Mtr. stark, welche hauptsächlich unreines Steinsalz mit dazwischen liegenden Polyhalitschnüren enthält; und

4) die Anhydrit-Region, über 400 Mtr. mächtig, dieselbe enthält reines Steinsalz mit dazwischen liegenden Anhydritschnüren.*)

Das Bergwerk wurde angelegt, um Steinsalz zu gewinnen; mit den Kalisalzen wuſste man anfangs nichts anzufangen, weshalb dieselben auch Abraumsalze genannt wurden. Doch schon nach kurzer Zeit änderte sich dies. Man lernte die Abraumsalze wohl zu verwerten, so daſs jetzt die Gewinnung dieser Salze die Hauptsache ist, und die Fabriken, welche diese Salze verarbeiten, wie Pilze aus der Erde schossen.

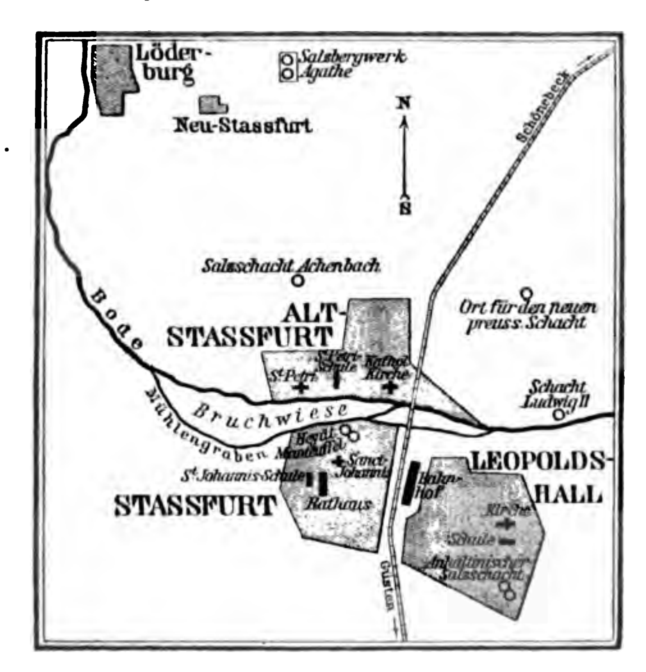
Das Bergwerk in der Stadt besteht aus neun Etagen, während der Achenbachschacht deren nur sieben hat. In dem Steinsalze sind in jeder Etage die Gänge 16 Mtr. breit und 9 Mtr. hoch, dieselben streichen genau nach den vier Himmelsgegenden, durchkreuzen sich also rechtwinklig. Je zwischen zwei Gängen befindet sich ein Pfeiler von 8 Mtr. Breite und 16 Mtr. Länge, während die Schicht zwischen je zwei Etagen 5 Mtr. Mächtigkeit hat. Die Pfeiler der einzelnen Etagen stehen nicht genau senkrecht übereinander, weil das Salzlager gegen den Horizont geneigt ist, wie schon oben bemerkt wurde. Das Salz selbst wird durch Bohren und Sprengen gewonnen. Man bohrt mit der Maschine 1—1½ Mtr. tiefe und ungefähr 3 cm. weite Löcher in das Salzgestein; zwei Mann, ein Häuer und ein Lehrhäuer, sind an jeder Bohrmaschine beschäftigt. Sind fünf bis sechs Löcher gebohrt, so werden dieselben mit Sprengsalpeter gefüllt, die mit eingesetzte Zündschnur angezündet und das Salz abgesprengt. Um das abgesprengte Salz zu entfernen, baut man eine schmalspurige Eisenbahn von dem Förderschachte nach dem angebauten Orte. Das Salz wird in kleine Wagen verladen und auf die Förderschale gefahren, welche nun mit zwei beladenen Wagen von der Fördermaschine in die Höhe gehoben wird. Die Salzgewinnung der Kalisalze war früher dieselbe, doch waren die Gänge im Kalisalze nur 8 Mtr. breit und 7 Mtr. hoch, während die Schicht zwischen den einzelnen Etagen, wie im Steinsalz 5 Mtr. mächtig blieb. Weil aber die Kalisalze, sobald sie mit der atmosphärischen Luft in Berührung kommen, die Feuchtigkeit derselben an sich ziehen und verwittern, konnten schlieſslich die Pfeiler die auf ihnen ruhende Last nicht mehr tragen und brachen zusammen, wodurch für Staſsfurt und Leopoldshall eine ernstliche Gefahr entstand. Man glaubte anfangs, die Anhydritschicht würde sich standhaft zeigen, aber dies war ein Irrtum; denn dieselbe bekam mehrere Risse. Daher

*) F. Bischof: Die Steinsalzwerke zu Staſsfurt. Halle 1875, Pfeffer.

hat man jetzt auf sämtlichen Werken diese Art der Gewinnung verlassen; man füllt jetzt unmittelbar, nachdem man die Kalisalze gewonnen hat, die enstandenen Hohlräume mit Steinsalz aus, indem man alle 120 Mtr. einen 30 Mtr. starken Pfeiler stehen läſst.

Auch unter der Stadt sind die Hohlräume mit Steinsalz ausgefüllt, so daſs jetzt die Gefahr für Staſsfurt, wenn auch nicht vollständig geschwunden, doch sehr vermindert ist.

Manches Haus ist unbewohnbar geworden; Risse, so breit, daſs man die Hände durchstecken konnte, klafften in den Wänden; Fenster und und Thüren waren aus dem Lote gewichen und durch starke Balkenrahmen gestützt oder gar vermauert. Doch beschränkte sich dies sogenannte Krachgebiet nur auf einen kleinen Teil der Stadt. Wo ich wohne, hat es bis jetzt noch nie gekracht.



Auf preuſsischem Gebiete — denn Anhalt gab keine Genehmigung zur Anlegung von Privatschächten — sind nun folgende Salzbergwerke entstanden:

1) der Zwillingsschacht Heydt und Manteuffel in der Mitte der Stadt; auf demselben werden täglich im Durchschnitt 7000 Ctr. Salz und zwar nur Kalisalze gefördert.

2) der Achenbachschacht, nördlich von Staſsfurt. Derselbe ist 1875 angelegt und ausgemauert. Täglich werden 16000—24000 Ctr. Salz und zwar 25% Steinsalz und 75% Kalisalze gefördert.

Beide Werke gehören dem preuſsischen Staate und stehen unter der Erde in Verbindung.

In der nächsten Umgebung von Staſsfurt liegen nur noch folgende zwei Privatsalzbergwerke:

3) das Werk Agathe mit 2 Schächten nördlich von Staſsfurt, hinter dem Achenbachschachte, und

4) der Riebecksche Schacht (Ludwig II) im Osten der Stadt. Hierzu kommen noch

5) das anhaltinische Werk mit einem Zwillingsschachte, ebenfalls im Osten der Stadt, südlich von dem Riebeckschen Schachte.

Durch die Güte der Herzogl. Bergdirektion bin ich in der Lage, über dieses Werk einige nähere Angaben zu machen, aus denen man den Umfang desselben ersehen kann:*)

	1885.	1886.
Zahl der Abbaustockwerke	10	10
Gesamtförderung	5 237 591,14 Ctr.	6 440 407,54 Ctr.
Förderung von Steinsalz	1 233 342,89 „	1 302 107,42 „
„ „ Carnallit und Kieserit	3 066 070,64 „	3 892 777,44 „
„ „ Kainit	937 799,70 „	1 244 992,68 „
„ „ Boracit	378,00 „	530,00 „
Zahl der Dampfkessel	28	34
„ „ Maschinen	30	31
„ „ der Fördermaschinen mit Angabe der Pferdestärken . .	5 mit 720 Pferdestärken	
„ „ Vormühlen	15	15
„ „ Feinmühlen	15	15
„ „ Beamten	24	24
„ „ beschäftigten Arbeiter**) .	1 301	1 417.

Aufser diesen 5 Schächten befindet sich noch in der Egelschen Mulde bei Westeregeln das Werk Douglashall mit einem Zwillingsschacht.

Abgeteuft werden jetzt bei Schönebeck, Aschersleben†) neben dem Riebeckschen Schachte und bei dem anhaltinischen Dorfe Rathmannsdorf im Südosten von Leopoldshall neun Schächte. Auch die preufsische Regierung läfst in diesem Jahre nordöstlich von Stafsfurt einen neuen Schacht abteufen.

Da die meisten hier vorkommenden Salze wahrscheinlich nur in Spezialwerken behandelt werden, so füge ich noch eine kurze Beschreibung derselben nach Bischof und Ochsenius an, ohne auf die chemischen Eigenschaften dieser Salze näher einzugehen. Bemerken mufs ich dabei, dafs die Zahlen die Procente angeben, also wie viel sich immer in 100 Gewichtsteilen befinden.

Das am massenhaftesten auftretende Salz ist das Steinsalz (100 Chlornatrium). Man unterscheidet drei Abarten desselben, das körnige das faserige und das blättrige.

Das körnige Steinsalz findet sich weifs und grau in Bänken.

Das Fasersteinsalz ist die seltenste vorkommende Abart. Es tritt als Klüfteausfüllung in Thon, Anhydrit und Gips auf. Seine Fasern

---

*) Gern hätte ich von den beiden preufsischen Schächten und vom Salzwerke Agathe (Neu-Stafsfurt) ähnliche Übersichten geliefert, aber meine Bitte um Mitteilung der betreffenden Daten wurde von beiden Bergwerksdirektionen abschläglich beschieden. Ich habe zwar die statistische Darstellung des Kreises Calbe vor mir, dieselbe reicht aber nur bis zum Jahre 1879, demnach sind die Mitteilungen, die darin enthalten sind, nicht mehr zutreffend. Nach diesen Nachrichten beträgt z. B. die Förderung im Jahre 1879/80 626 220 Ctr. und 3 313 250 Ctr. Steinsalz, also die Gesamtförderung rund 4 Millionen Ctr. auf beiden preufsischen Schächten, während nach den Angaben, die oben über beide Schächte gemacht sind, die Gesamtförderung im Jahre 1886 vielleicht 10 Millionen Ctr. erreichte. Nach den Nachrichten im Jahre 1879 war die Zahl der Arbeiter 500, während gegenwärtig wohl zwischen 1500 bis 2000 beschäftigt werden.

**) Die Arbeiter sind entweder Grubenarbeiter oder Tagarbeiter. Die Arbeitszeit unter Tage (d. h. in der Grube) beträgt täglich 8 Stunden. Um 6 Uhr früh, 2 Uhr nachmittags und 10 Uhr abends ist Schichtwechsel. Der Schichtlohn betrug im Jahre 1879 auf den preufsischen Schächten durchschnittlich 3,75 Mk. für Häuer, 2,75 Mk. für Förderleute. Die Arbeitszeit über Tage beträgt 12 Stunden, von 6 bis 6 Uhr, und erhielten die Tagarbeiter im Jahre 1879 auf den preufsischen Schächten täglich im Durchschnitt 2,50 Mk.

†) Bei Aschersleben war schon ein Salzbergwerk in Betrieb, dasselbe ist aber durch das Einbrechen des Wassers nicht mehr zu befahren.

sind dabei senkrecht gegen die Kluftflächen gerichtet. Die Farbe ist weifs, grau oder gelb, dabei ist das Salz stark seidenglänzend.

Das blättrige Steinsalz ist die vorherrschende Abart. Dasselbe kommt wasserhell, grau, gelb, grün, blau und rot vor. Gesucht und beliebt ist die seltene blaue Abart. Gewöhnlich tritt die blaue Farbe nur fleckenweise auf; dieselbe verschwindet, wenn das Salz geglüht wird. Die Spaltbarkeit des wasserhellen blättrigen Steinsalzes ist grofs, dasselbe spaltet glatt nach drei Richtungen, die sich rechtwinklig durchschneiden. Diese grofse Spaltbarkeit hat hier eine eigentümliche Industrie hervorgerufen; man baut aus kleinen Platten und Säulen Salzhäuser, die in Glaskasten eingeschlossen werden. Das vorzüglichste Bauwerk dieser Art ist eine Nachbildung des Magdeburger Domes, ausgeführt von dem Restaurateur Dorstewitz in Bernburg. Nur schade, dafs diese Bauwerke so leicht zerbrechlich sind und schwer einen weiten Transport vertragen.

Die in grofsen Massen vorkommenden Kalisalze sind:

Kieserit (87,10 Magnesiumsulfat, 12,90 Wasser), schwachglänzend, kreideweifs bis hellgrau, halb durchscheinend bis undurchsichtig.

Carnallit (26,76 Kaliumchlorid, 34,50 Magnesiumchlorid, 38,74 Wasser), wasserhell, milchweis, honiggelb, wachsgelb oder rot; die helleren Abarten sind durchsichtig und durchscheinend. Von Unkundigen ist die wasserhelle Abart leicht mit Steinsalz zu verwechseln; doch ist der Bruch muschelartig, lebhaft glasglänzend bis fettglänzend. Die rote Abart ist undurchsichtig. Nach der Schächtesitzung vom 5. März d. J. beträgt (vorläufig bis zum 30. Juli) die tägliche Gesammtförderung auf den bestehenden 7 syndikalischen Kalisalzbergwerken an Carnallit 55 000 Ctr., excl. 1500 Ctr. Präcipua für 2 Werke, und zwar: preufsisches Werk 11 000 Ctr., anhaltinisches Werk 12 540 Ctr., Aschersleben 8880 Ctr., Douglashall 8060 Ctr., Agathe 8060 Ctr., Ludwig II (Riebeckscher Schacht) 4260 Ctr., Vienenburger Schacht 2200 Ctr. Das Ascherslebener Werk ist durch Ersaufen seines Schachtes I zur Zeit aufser Förderung; es bezieht das auf seinen Anteil entfallende Carnallit-Quantum, um solches in seinen ausgedehnten Fabrikanlagen zu verarbeiten, von den anderen in Förderung befindlichen 6 Konventionswerken, wodurch deren gegenwärtige Förderung also noch entsprechend erhöht wird.

Kainit (35,05 Kaliumsulfat, 24,13 Magnesiumsulfat, 19,10 Magnesiumchlorid, 21,72 Wasser). Der Kainit ist meist durch andere Kalisalze verunreinigt; im reinen Zustande ist er gelblich, fast durchscheinend.

Selten kommen die folgenden Kalisalze vor:

Sylvin (100 Chlorkalium), farblos, rot oder blau. Er spaltet rechtwinklig, aber nicht so scharf wie das Steinsalz.

Tachhydrit (21,55 Calciumchlorid, 36,51 Magnesiumchlorid, 41,94 Wasser), durchscheinend, wachs- oder honiggelb, nach zwei Richtungen spaltbares krystallinisches Gefüge.

Boracit oder Stafsfurtit (89,39 Magnesiumborat, 10,61 Magnesiumchlorid), schneeweifs, undurchsichtig. Er findet sich in Knollen bis zur Kopfgröfse eingelagert in den anderen Kalisalzen. Derselbe wird von den Bergleuten fleifsig ausgeklaubt, weil er noch besonders bezahlt wird. Jährliche Gewinnung auf beiden preufsischen Werken ungefähr 1000 Ctr.

Sehr selten treten noch folgende Verbindungen auf:

Eisenboracit (40,36 Magnesiumborat, 50,05 Eisenborat, 9,59 Magnesiumchlorid), blaugrau, wachsglänzend.

Hydroboracit (38,89 Calciumborat, 35,02 Magnesiumsborat, 26,09 Wasser). Er findet sich zuweilen an der Grenze der Anhydrit- und Polyhalit-Region innig mit dem reinen Steinsalz verwachsen.

Astrakanit (42,51 Natriumsulfat, 35,93 Magnesiumsulfat, 21,56 Wasser).

Glauberit (48,87 Calciumsulfat, 51,13 Natriumsulfat).

Bischofit (46,78 Magnesiumchlorid, 53,22 Wasser). Hierzu kommen

noch die in den letzten Jahren gefundenen Verbindungen: Douglasit, Krugit und Reichhardtit.

Alle Kalisalze ziehen begierig das Wasser der Luft an, verwittern dadurch und werden unansehnlich; daher bewahrt man diese Salze in luftdicht verschlossenen Gläsern auf, die sich in jedem Hause als Zimmerzierden vorfinden.

Litteraturverzeichnis.

Aufser den beiden oben (S. 221—222) genannten Büchern giebt es über das Salzlager zu Stafsfurt noch folgende Schriften:

C. Bischof, der neue Kalisalzfund bei Stafsfurt. Halle 1873 und 74. — Prietze, die neuen Aufschlüsse über das Stafsfurter Salzlager. 1873. — E. Reichardt, das Steinsalzbergwerk Stafsfurt, Jena 1866. — C. Reinwart, über die Steinablagerung bei Stafsfurt. 1871. — Dr. W. Rohde, die Salzlager bei Stafsfurt. Berlin 1873. — Precht, die Salz-Industrie von Stafsfurt und Umgebung. Stafsfurt 1885.

Ein Streiter gegen den Materialismus.*)

Der Zoolog Dr. Otto Zacharias erörtert in einem sogenannten Feuilleton der „Schlesischen Zeitung“ die Begriffe „Geist und Stoff“. Der Genannte führt darin Folgendes aus:

Es giebt immer noch eine sehr grofse Anzahl von gebildeten Menschen, welche der Meinung sind, dafs die Beschäftigung mit den Naturwissenschaften dazu führen müsse, jeder idealistischen Lebensanschauung den Garaus zu machen. Fragt man dann die Betreffenden etwas eingehender, woher sie die Argumente nehmen, um eine derartige Ansicht zu begründen, so verweisen sie nicht selten auf populäre**) Werke wie Büchners „Kraft und Stoff“ oder Häckels „Natürliche Schöpfungsgeschichte“, in der Meinung, dafs dieser Hinweis genüge, um die Fragesteller ein für alle Mal zum Schweigen zu bringen. In den Augen vieler Laien enthalten die genannten beiden Bücher die Quintessenz der heutigen Naturwissenschaft und die Darstellung aller Folgerungen, welche aus der bisher erlangten Kenntnis der Naturgesetze sich zu ergeben scheinen. Es mag sein, dafs die Lektüre solcher und ähnlicher Veröffentlichungen in weiten Kreisen die Meinung zu erwecken geeignet ist, es gebe keine geistige Initiative, keinen selbständigen Willen mehr auf der Welt, sondern alles, selbst das menschliche Handeln, erfolge nach „ehernen Gesetzen“, so dafs jeder von uns mit Notwendigkeit zu den Thaten getrieben werde, deren Urheber er jetzt oder späterhin ist.***) Alles irdische und kosmische Geschehen ohne Ausnahme — so lehren die Bücher der obigen Art —

---

*) Abdruck aus dem Leipz. Tageblatt Nr. 52 (1887), Beil. I. — Wir geben diese Polemik (oder, wie der Verf. sich am Schlusse ausdrückt, „einschneidende Kritik“) in der Absicht, unsern Lesern hiermit ein lehrreiches Beispiel vorzuführen, wie leicht es sich gewisse Tagesschriftsteller bei wissenschaftlichen Kämpfen machen. Unseres Erachtens ist, um Schriftsteller wie Büchner und Gelehrte wie Häckel zu widerlegen, ein ganz anderes Rüstzeug erforderlich als das ist, welches man bei einem Zeitungsartikel anwenden kann. D. Red.

**) Sind diese Bücher, namentlich das Häckels, wirklich so „populär“, insofern als man mit diesem Ausdruck gewöhnlich den Nebenbegriff des Ungründlichen, Oberflächigen verbindet? Und wie wäre dann des Verfassers Entgegnung zu nennen? D. Red.

***) Der Verfasser vergifst aber hier — oder sollte er das nicht wissen? — dafs bis zu einem gewissen Grade der Wille des Menschen eingeschränkt ist, wie die Moral-Statistik lehrt. Es sei nur hingewiesen auf die Schriften von Quetelet, Wappäus, Wagner und besonders Drobisch, „Die moralische Statistik und die menschliche Willensfreiheit“ (Leipzig 1867), wo auch im Vorwort die betr. Schriften aufgeführt sind. D. Red.

läfst sich auf materielle Ursachen zurückführen, d. h. auf Bewegungszustände sicht- und wägbarer Massen, oder auf Änderung der räumlichen Beziehungen zwischen den Molekülen, aus denen diese Massen bestehen. Als die Ursache jeder Bewegung wird eine andere Bewegung betrachtet, nicht, weil wir immer beobachtet haben, dafs sich das so verhält, sondern aus dem einfachen Grunde, weil wir einen anderen Ursprung von Bewegung uns gar nicht vorzustellen vermögen. So weit ist alles ganz schön und annehmbar. Es ist auch nicht zu verkennen, dafs wir unter der Herrschaft des Prinzips, welches besagt, dafs wir bei aller Forschung die bewegenden Ursachen (causae efficientes) der Vorgänge festzustellen haben, einen mächtigen Schritt vorwärts in der Erkenntnis des Naturwaltens gekommen sind. Erst kürzlich, als wir uns mit der Frage nach dem Ursprunge des Lebens an dieser Stelle beschäftigten, haben wir die Fortschritte der modernen Naturwissenschaft im einzelnen beleuchtet. Es zeigte sich aber, dafs damit noch keine Lösung der grofsen Probleme, die den menschlichen Verstand seit Jahrtausenden beunruhigen, gewonnen worden ist.

Im Vordergrunde steht die Frage aller Fragen: In welcher Beziehung steht das, was in uns empfindet und denkt, zu den Kräften der Aufsenwelt? Kann der Ziegelstein, der zufällig vom Dache herabfällt, mich vollständig vernichten, wenn er mein Gehirn zerschmettert? Ist das eigentümliche Innenleben, was jeder von uns in Bezug auf seine Person durch ganz unmittelbare Wahrnehmung kennt, ein Produkt der Organisation? Ist der Geist eine Wirkung materieller Ursachen? Scheidet unser Gehirn Gedanken aus, wie die Leber Galle absondert? Läfst sich eine Atomgruppierung und ein Schwingungsmodus materieller Teilchen ausdüfteln, als deren Folge die Entstehung eines Bewufstseinaktes begreiflich erscheinen könnte? Das ist eine Reihe von Fragen, welche die Hauptfrage nach der Natur des Geistes sofort nach sich zieht. Vor der Hand freilich kann sich weder Physik noch Physiologie, weder Chemie noch mikroskopische Anatomie rühmen, eine positive Antwort auf diese Hauptfrage bereit zu haben. Aber dennoch ist die Wissenschaft in der Lage, zu sagen, was der Geist **nicht** sein kann, und sie vermag infolge dessen Kritik an den falschen Vorstellungen zu üben, welche man sich so oft (innerhalb und aufserhalb gelehrter Kreise) von dem „Wesen des Geistes“ gemacht hat. Insbesondere ist es die in den beiden oben citierten Büchern aufgestellte Weltanschauung des Materialismus, welche in einer Weise, die man nicht mehr wissenschaftlich nennen kann, die Naturerscheinung des Geistes zu erklären unternimmt. Es ist aufserordentlich wichtig, dafs auch das Laienpublikum in den Stand gesetzt wird, die zahlreichen groben Trugschlüsse, die sich der Materialismus zu schulden kommen läfst, in ihrer ganzen Unhaltbarkeit zu erkennen. Es ist sicher weit verdienstlicher, die wissenschaftlichen Gründe darzulegen, warum ein Problem zur Zeit unlösbar ist, als den Schein zu erwecken, dafs man kühner und scharfsinniger sei als andere, während man doch nur doktrinärer und leichtfertiger ist. Diesen Vorwurf wollen wir selbstverständlich nicht gegen Personen, sondern lediglich gegen die unzulängliche Weltanschauung erhoben haben, welche mit dem sogenannten Materialismus gleichbedeutend ist.

Nach den Lehren dieser ganz einseitigen Theorie ist der Geist eine blofse Funktion des Gehirns und des Rückenmarks, d. h. in die Sprache der Allgemeinverständlichkeit übersetzt: das Seelenleben der höheren Thiere und des Menschen läfst sich in letzter Instanz auf Bewegungsvorgänge zurückführen, die von der Struktur, Gröfse und sonstigen Beschaffenheit des im Schädel eingeschlossenen Denkorgans abhängig gedacht werden müssen. Hierdurch glaubt der Materialismus die Kluft überbrücken zu können, welche sich zwischen den Erscheinungen, deren Schauplatz die Aufsenwelt ist, und den psychischen Thatsachen aufthut, die nur für den inneren Sinn wahrnehmbar sind. Häckel meint geradezu, dafs der

Geist in derselben Weise an das Gehirn gebunden sei, wie die Muskelbewegung an den Muskel. Es ist dies ein beliebter Vergleich, der aber nichts weniger als stichhaltig ist. Er ist sogar gänzlich falsch, und bei unserer völligen Unkenntnis der Art und Weise, wie die bekannten chemisch-physikalischen Kräfte zu den Lebensbewegungen überhaupt und zu den psychischen Vorgängen insbesondere Bezug haben, ist zur Zeit die Möglichkeit jeglichen Vergleichs ausgeschlossen. Es läfst sich, wie schon Dubois Reymond in so bündiger Weise gezeigt hat, gar keine Brücke zwischen dem Reiche des Bewufstseins und den Bewegungsimpulsen schlagen, die irgendwo in der Aufsenwelt beobachtet werden können. Gesetzt, wir besäfsen ein optisches Instrument, welches uns gestattete, einen Blick in das Gehirn eines in geistiger Thätigkeit befindlichen Menschen zu thun, so dafs wir die molekularen Schwingungen, welche — der Theorie nach — den Denkprozefs begleiten sollen, wirklich sehen könnten, gesetzt, es gäbe ein solches Psychoskop, so würden wir doch durch Benutzung desselben nicht um einen Schritt bei Lösung der Frage gefördert werden, in welcher Weise durch Molekularbewegung das erzeugt wird, dessen wir uns als Empfindung oder als Gedanken innerlich bewufst werden können. Zwischen einer Bewegung und einem geistigen Vorgange besteht gar kein Verhältnis mechanischer Ursächlichkeit, d. h. keine Möglichkeit der stetigen Umwandlung des einen in das andere. Wie sich galvanische Elektricität in Magnetismus verwandelt resp. denselben hervorruft, wenn wir den elektrischen Strom durch die Windungen einer Drahtspirale leiten, in deren Höhlung sich ein Stück weiches Eisen befindet — diese Möglichkeit vermögen wir zwar auch nicht vollständig einzusehen, aber wir können sie jeden Augenblick durch den Versuch bestätigen. Wir sind auch in der Lage, den umgekehrten Versuch zu machen und können elektrische Ströme mit Hilfe eines Magneten erzeugen, so dafs also eine gegenseitige nahe Beziehung zwischen den beiden Naturkräften aufs klarste festzustellen ist. Hierdurch erhalten wir die Berechtigung zu behaupten, dafs magnetische Wirkungen durch den galvanischen Strom hervorgerufen werden können, und dafs auch umgekehrt der Magnetismus Elektricität zu erzeugen im stande ist. Jedermann gewinnt aus den angestellten Experimenten die Überzeugung, dafs die obige Behauptung genügend begründet ist, und dafs ihr nichts Hypothetisches mehr anhaftet. Wie aber steht es mit der These des Materialismus, dafs Bewegungserscheinungen im Gehirn die Ursache der geistigen Vorgänge seien? Die hierin ausgesprochene Behauptung ist durch und durch hypothetisch. Wir können, wie oben bereits gezeigt wurde, die Thatsache des Bewufstseins niemals mechanisch herstellen, das heifst aber ebensoviel, als dafs die geistigen Erscheinungen niemals durch Molekularbewegungen der Hirnmasse begreiflich gemacht werden können. Nehmen wir nun aber an, der Materialismus hätte das, was er nur voraussetzt, wirklich erwiesen, und er zeigte uns, dafs jedem Denkvorgange doch eine gewisse molekulare Veränderung in der grauen Substanz des Gehirns entspräche, so würde auch dieses Faktum nichts weiter besagen können, als dafs mit den seelischen Prozessen chemisch-physikalische Vorgänge im Denkorgan verknüpft seien. Über die Art dieser Verknüpfung würden wir gar nichts vorentscheiden können; wir würden lediglich die Berechtigung haben, zu sagen: dafs jedem Bewufstseinsakte eine Begleiterscheinung molekular-mechanischer Art in der Hirnmasse entspreche. Ebenso wird die elektrische Bewegung in einem Telegraphendrahte von gewissen Molekularveränderungen in dem Drahte selbst begleitet, aber der Draht ist nicht die Elektricität, und er ruft sie nicht hervor.

Der Materialismus, der das Geheimnis aller Geheimnisse erklärt zu haben meint, ist also auf dem Holzwege.*) Anstatt, wie er vorgiebt, alles

*) Dieser Ausdruck, der dem Alltagsgespräch entnommen ist, scheint uns jedenfalls für einen wissenschaftlichen Artikel unpassend. D. Red.

zu wissen, weiſs er vielmehr gar nichts. Er kann, wenn er Kritik an seinem philosophischen Verfahren übt, thatsächlich nichts weiter thun, als das Nebeneinanderstehen zweier Klassen von Erscheinungen zu behaupten, über deren wirklichen Zusammenhang er absolut unwissend ist. Das Problem vom Zusammenhang des Körpers mit der Seele ist ebenso unlösbar in seiner heutigen Form, als es in vorwissenschaftlichen Zeiten war. Moleschott hat mit zuversichtlichem Ton einmal den Ausspruch gethan: „Ohne Phosphor kein Gedanke“. Angenommen, dieser ganz ungenügend begründete Satz wäre erwiesen, so würde die Kenntnis, welche er dann in sich schlösse, das Dunkel doch nicht erhellen. Denn wir würden nicht im stande sein, zu begreifen, was oder inwiefern ein Phosphormolekül dazu beitragen könnte, den Keim eines Gedankens oder die leiseste Spur einer Empfindung hervorzurufen. Die Wissenschaft hat in diesem Falle ihre Unzulänglichkeit zu bekennen, und wir alle haben Ursache, der Ansicht des als Forscher rühmlichst bekannten englischen Physikers Tyndall beizupflichten, welcher mit Bezug auf jenes groſse Problem sagt: „Beugen wir unsere Häupter, alle, die wir da sind, Priester und Naturforscher, und bekennen wir unsere Unwissenheit.“

Denken wir uns nun aber den leicht möglichen Fall, es lieſse sich jemand weder durch die obige Argumentation, noch durch die Autorität von Du Bois-Reymond und Tyndall davon überzeugen, daſs der Materialismus zur Erklärung der psychischen Erscheinungen unzureichend sei, so würde man in die Lage kommen, dem Betreffenden folgendes entgegenzuhalten. Man würde ihn zuerst darüber examinieren müssen, was er eigentlich unter „Materie“ oder „Stoff“ versteht. Denn hierüber muſs er sich selbstverständlich erst klar sein, bevor er die Kühnheit haben darf, zu behaupten, das Denken sei eine Thätigkeit des Stoffes. Antwortet der Gefragte mit der Definition, daſs er unter „Stoff“ das räumlich Ausgedehnte, das durch das Tastgefühl Wahrnehmbare und das der Möglichkeit eines Ortswechsels Unterliegende verstehe, so kann man ihm hierauf sofort erwidern, daſs dieser Stoff die Eigenschaften nicht besitzt, aus denen man die Entstehung eines Gedankens herleiten könnte. Fühlt sich der Betreffende hierdurch in die Enge getrieben und verbessert er sich in der Weise, daſs er sagt: er verstehe unter dem Stoff natürlich die chemischen Elemente, in welche das räumlich Ausgedehnte bei der Zerlegung zerfällt, so ist hiermit auch nichts gewonnen. Denn zwischen den Molekülen der chemischen Stoffe ist etwas wirksam, was sich nicht aus voraufgegangener Bewegung, also nicht mechanisch, erklären läſst: nämlich die chemische Wahlverwandtschaft, vermöge welcher sich gewisse Stoffe miteinander zu einem ganz neuen, einheitlichen Produkt verbinden. Was ist diese Wahlverwandtschaft? Es unterliegt keinem Zweifel, daſs der Materialist hierauf antworten wird, sie ist auch eine Funktion des Stoffes. Aber dann spielen wir nur mit Worten. Das eine Mal wird „Funktion“ das genannt, was sich auf die Molekularbewegung eines materiellen Gebildes (sei es organischer oder anorganischer Herkunft) zurückführen läſst, der Materialist nennt demgemäſs das Denken eine Funktion der grauen Hirnsubstanz, der Groſshirnrinde und das können wir verständlich finden. Das andere Mal aber bezeichnet er die Molekularbewegungen selbst wieder als Funktionen der Materie, und dies ist ein Unsinn. Es steht mit allen Gesetzen der Logik im Widerspruch, wenn man das, was man soeben mit Hilfe einer Hypothese (und das ist die Annahme von Molekularbewegungen) erklärt hatte, sogleich wieder dazu verwendet, um eben diese Hypothese zu stützen.

Die materialistische Theorie zerfällt also bei einschneidender Kritik in sich selbst. Diejenigen, welche die höchsten Güter der Menschheit durch das Lehrgebäude derselben bedroht glauben, können ruhig schlafen. Es ist unmöglich, alle Erscheinungen, die vor unser Bewuſstsein gelangen, als bloſse Bewegungswirkungen oder als deren Summierung zu begreifen. Vor allem spottet die Thatsache der Empfindung

und des Denkens einer derartigen Erklärung. Demnach ist die Naturforschung weit davon entfernt, jemanden der einer idealen Weltanschauung huldigt, in seinem Glauben irre machen zu können. Vielmehr wird die wahre Wissenschaft den Thatsachen der inneren Erfahrung die gleiche Realität beimessen müssen wie denen der äufseren. Und hierdurch wird die aufrichtige Versöhnung zwischen Religion und Wissenschaft angebahnt und ermöglicht.

Nachbemerkung des Herausgebers zu vorstehendem Artikel.

Derartige Aufsätze wie der vorstehende (dergleichen wohl von Philosophen und Theologen schon zu Dutzenden geschrieben worden sind), machen denselben Eindruck, wie etwa einer, der vor der Erfindung der Dampfmaschinen, Eisenbahnen, Telegraphen, Phonographen (Telephone) geschrieben worden wäre — und gewifs giebt es deren genug — in welchem sein Verfasser mit Nachdruck (Emphase) und Entrüstung etwa wie folgt ausgerufen hätte: „Zu glauben dafs jemand einen Wagen auf dem Erdboden, oder ein Schiff auf dem Wasser durch andere als die gebräuchlichen Mittel (Pferde, Wind etc.) fortbewegen könne, dafs es möglich sei, durch Gebirgszüge oder unter Kanälen unterirdische Strafsen durchzubrechen oder dafs man auf andere Weise, als durch hörbare (akustische) oder weithin sichtbare (optische) Zeichen sich in die Ferne rasch verständigen könne, oder dafs man gar — wie neuerdings durch Telephon — Musikstücke in einen entfernten Raum vollkommen hörbar übertragen könne — das Alles ist geradezu Blödsinn und wer das behauptet, der gehört ins Irrenhaus!" Und die Zuhörer? — Sie hätten ihm wahrscheinlich beifällig zugenickt! — Und doch war die Behauptung übereilt!

Oder: wenn in unsern Tagen jemand behaupten wollte: „Die Luftschiffahrt wird niemals so vervollkommnet werden, dafs sie mit den Eisenbahnen oder mit der Schiffahrt wetteifern (ihr Konkurrenz bieten) oder sie gar ersetzen könnte" oder: „Der ewige Friede und die Religionseinheit ('es wird eine Herde und ein Hirte werden') unter den Völkern der Erde ist unmöglich! Ebenso wird niemals eine einheitliche allen Menschen genehme und gerechte Staatsform bestehen können" u. drgl. m. — so würden diese Behauptungen selbst bei den Vernünftigen gewifs vielen Beifall finden, aber — die Zukunft — wenn auch eine ferne — dürfte lehren, dafs auch diese Behauptungen übereilt gewesen wären.

Genau dasselbe gilt von der (allerdings jetzt sehr kühn erscheinenden) Behauptung: man werde dermaleinst doch, wenn die Wissenschaft und ihre Untersuchungsmittel fortschreiten, zur Entdeckung der das Denken begleitenden oder dasselbe erzeugenden feinen physiologischen Vorgänge im menschlichen Gehirn gelangen. Denn die neue Wissenschaft der Psychophysik in Verbindung mit Psychiatrie sei hierzu auf dem besten Wege. — Dies geradezu zu verneinen, wäre ebenso voreilig. Daher halten wir auch das mit Beziehung hierauf einst gesprochene „geflügelte" Wort eines deutschen Gelehrten *„Ignorabimus"* mindestens für übereilt. Es wäre ihm unseres Erachtens wenigstens ein *„nos viventes"* hinzuzusetzen oder es wäre umzuändern in *„adhuc ignoramus"*.

Jedes Zeitalter hat seine Wissensgrenze, aber die Geschichte der Wissenschaften, die uns doch hierin Lehrmeisterin sein mufs, zeigt uns auch, dafs trotz zeitweiliger Stagnationen diese Wissensgrenze, wenn auch langsam, so doch stetig im Laufe der Jahrhunderte sich erweitert. Man vergleiche doch nur unser heutiges Wissen mit dem vor nur einem Jahrhundert (1787) und vergleiche vollends unsere Wissenschaft und die durch sie erzeugten Fortschritte in den Künsten, Erfindungen und Entdeckungen mit jener des gebildetsten Volkes des Altertums, der Griechen, denen Fanatiker des Altertums gerne immer noch den höchsten Platz einräumen

möchten! Es kann doch nur ein geistig Blinder unsere gewaltige Überlegenheit über jenes Volk leugnen wollen!

Wie sehr die Ansichten auch in religiöser Beziehung mit der Zeit sich ändern, zeigt u. A. eine neuerdings bis zur Entscheidung des höchsten deutschen Gerichtshofs gebrachte Anklage eines Dr. R. in E. (s. Leipz. Tagebl. 1887. nr. 86. II. B.) wegen einer veröffentlichten Stelle eines in einem Freidenkervereine gehaltenen Vortrags, auf die der Angeklagte freigesprochen wurde. Die Stelle, wegen welcher die Anklage erfolgte und in der eine Beschimpfung des Priestertums gefunden wurde, ist zu wichtig, als daſs wir es uns versagen sollten, sie unsern Lesern mitzuteilen; sie lautet: „Dieses Festhalten an der alten Bibel ist eine Handhabe für das Priestertum, um die geistige Entwickelung der Menschen zu unterdrücken und hat allmählich ein Lug- und Trugsystem herausgebildet, welches einen demoralisierenden Einfluſs auf den Einzelnen wie auf die Gesamtmasse ausübt und eine religiöse und politische Heuchelei an Stelle der Wahrheit gesetzt hat." Welche Folgen würde wohl eine solche Äuſserung vor 100, ja noch vor 50 Jahren für ihren Urheber gehabt haben? Welche aber erst zu den Zeiten der Ketzergerichte? — Der Schluſs des Artikels unseres Verfassers klingt beinahe wie eine *captatio benevolentiae* gegenüber den Theologen. Die „aufrichtige Versöhnung" zwischen Religion und Wissenschaft liegt u. E. auf einer ganz andern Seite. —

Zur Überbürdungsfrage.*)

Wir entnehmen der „Allgemeinen deutschen Lehrerzeitung" (lf. Jahrg. Nr. 3) folgende „Aufsatzthemen" überschriebene ergötzliche Geschichte, die sich vor einiger Zeit in Berlin ereignet hat und einen hübschen Beitrag zur Überbürdungsfrage liefert. Sie bezieht sich zwar auf Mädchen-(Verzeihung, wollte sagen „höhere Töchter-") Schulen, doch ist sie gewiſs auch lehrreich für höhere Knaben bezw. Jünglingsschulen.

Die „Vossische Zeitung" schreibt: „Direktor Anton v. Werner soll gelegentlich einer Versammlung, in der über Schulreformen gesprochen wurde, erzählt haben, daſs zweien seiner Töchter, 12- und 13jährigen Mädchen, das Aufsatzthema gegeben worden sei: „Welche Gedanken bewegten die Seele des Scipio bei seiner Zusammenkunft mit Hannibal vor der Schlacht bei Zama?" Herr v. Werner habe seinen Töchtern darauf geraten, zu schreiben: „Scipio habe wahrscheinlich gedacht: daſs dich doch ein Himmeldonnerwetter in den Boden schlüge." Diese Mitteilung und Äuſserung Anton v. Werners hat nicht allein in den Kreisen des Publikums, sondern auch bei den Behörden Aufsehen erregt. Der Chef des Unterrichtswesens, Kultusminister v. Goſsler, hat, wie verlautet, Bericht gefordert, ob in der That ein solches Aufsatzthema in einer der Berliner Mädchenschulen gestellt worden sei. .... Der ganzen Geschichte, wenigstens soweit sie das Aufsatzthema betrifft, liegt ein sehr erhebliches Miſsverständnis zu Grunde. In der betreffenden Schule ist kein derartiges oder auch nur ähnliches Thema zum deutschen Aufsatz gegeben worden. Nach genauesten Ermittelungen kann zu dieser neuesten Legendenbildung nur ein ganz unschuldiger Vorgang die völlig unberechtigte Anregung gegeben haben: Im Geschichtsunterricht trug der Lehrer die erwähnte Szene zwischen Hannibal und Scipio vor. Eine Schülerin bewies der Sache so wenig Interesse, daſs sie durch ihre Unaufmerksamkeit dem Lehrer auffiel und zu der Bemerkung Anlaſs gab, sie möchte doch aufmerksamer sein,

*) Verspätet. War für voriges Heft bestimmt, muſste aber wegen Mangel an Raum zurückgestellt werden. D. Red.

die Sache verdiene es wohl, und aufserdem könne sie gar nicht wissen, ob sie nicht einmal in die Lage käme, den Stoff in einem deutschen Aufsatze bearbeiten zu müssen." — Mit Bezug auf diese Auslassung geht der „Voss. Ztg." von Herrn A. v. Werner ein Schreiben zu, dem wir folgendes entnehmen: „Wozu der Lärm? Die Thatsache ist sehr einfach, und wir haben schon lange, bevor ich durch einen Zufall in die Lage gekommen bin, dies Beispiel anzuführen, in den Zeitungen viel charakteristische Beispiele für die Überbildung unserer Jugend und das, was ihr zugemutet wird, gelesen. Der dieser „neuesten Legendenbildung" zu Grunde liegende Thatbestand ist einfach folgender: Meine beiden Töchter von 12 und 13 Jahren verlangten am vergangenen Sonnabend von mir Mommsens römische Geschichte. Auf meine Frage: wozu? antworteten sie, sie sollten nächstens einen Aufsatz über das Thema ausarbeiten: „Die Gedanken des Scipio und Hannibal bei ihrer Begegnung vor der Schlacht bei Zama." Da fiel mir ein, was Romeias zu Praxedis im Ekkehard sagt: „Mög' Euch ein Donnerwetter sieben Klafter tief in den Erdboden hineinschlagen!" und ich sagte meinen Kindern: Nach dem zu urteilen, was ich aus eigner Erfahrung von den Helden weifs, mögen Scipio und Hannibal jeder vom andern so ungefähr gedacht haben; schreibt dies nur hin und sagt, ich hätt's euch gesagt, dann braucht ihr eure Gedanken nicht aus Mommsen abzulesen. Am Montag darauf fand eine durch Herrn J. Schorer veranlafste vertrauliche Besprechung von sieben bis acht Herren, u. a. Dr. Küster, Baurat Ende, Geh. Rat G. Hauck, Dr. Bach, Abgeordn. Schrader, statt, und ich erzählte nebenbei diese kleine Geschichte. Am Dienstag oder Mittwoch stand sie — ohne mein Zuthun — in allen Zeitungen, und der betreffende Aufsatz ist nicht zur Ausführung gekommen, sondern statt dessen ein sehr anregendes Thema: „Ein Gang durch die Leipziger Strafse." . . . Mich hat das Thema an und für sich gar nicht besonders überrascht, weil ja ähnliche Themata in Hülle und Fülle überall aufgegeben werden. Mit Bewunderung habe ich z. B. gesehen, wie kleine Mädchen über die kristallinischen Formen der Salze und anderer Mineralien ganz genau Bescheid wufsten, während sie vermutlich Hafer und Gerste, oder eine Birke von einer Buche nicht zu unterscheiden vermochten. Und gar in Geographie und Geschichte und Litteratur! Sämtliche Gebirge und Meerbusen von Asien, Amerika, selbst Afrika, nur so am Schnürchen herzählen können, ist gar nichts Aufsergewöhnliches — nur in der nächsten Umgebung von Berlin und der Mark Brandenburg wissen sie allerdings weniger Bescheid. Geschichte: Die ältesten Dynastien der ägyptischen Pharaonen sind ihnen nicht unbekannt, Hellas' Götterlehre vielleicht überstrahlt sogar schon die ersten Jahre ihres Schuldaseins mit ihrem verklärenden Lichte, und gar die Odyssee und Ilias, das Nibelungenlied und manches andere, was mir erst in vorgerücktem Alter zugänglich und verständlich geworden ist, es ist jetzt sogenanntes „Gemeingut." Glückliche Jugend! Warum da der Lärm über „Scipio und Hannibal?"

Fragekasten.

41) K. i. M. Ist es bekannt, dafs man einen Winkel mittelst der Kardioide in drei gleiche Teile teilen kann?

42) **J. B. i. D.** (Voralberg). „Wie ist der Bruch $\frac{186}{1003}$ oder Brüche ähnlicher Art, wie: $\frac{2}{103}$, $\frac{100}{7003}$ u. s. w. in korrektem Deutsch zu lesen?"

(Wir glauben: „Zwei einhundert und drei—tel" oder kürzer: „zwei einhundert drei—tel" und ebenso die anderen Nenner: „siebentausend (und)

drei—tel" u. s. w. Will man aber das „Drei—tel" vermeiden, dann kann man ja lesen: „2 durch 103". Red.)

43) Unsere Frage Nr. 40 (s. Heft 2, S. 158) an die Herren Chemiker ist leider bis jetzt unbeantwortet geblieben. Wir wiederholen sie daher und fügen hinzu: In der Wochenschrift „Daheim" (Nr. 25 ds. Jhg.) ist angegeben, man könne alte, gebrauchte Stahlfedern dadurch wieder brauchbar machen, dafs man sie eine Zeit lang in heifsen Essig (Essigsäure?) lege und dann in einem thönernen oder eisernen Gefäfse grofser Hitze (Glühhitze?) aussetze. Ist das richtig? —

Antwortkasten.

Auf die Frage Nr. 28 in XVII$_8$, 637 betreffend den Ellipsenzirkel gingen folgende Antworten ein:

1) Herr Professor H. Schaeffer in Jena, eine jedem Jenenser wohlbekannte Persönlichkeit, bediente sich in seinen Vorlesungen über Analytische Geometrie und Differentialrechnung, welche ich in den Jahren 1874 und 75 zu hören die Ehre und das Vergnügen hatte, stets des fraglichen Ellipsenzirkels.

Kober, Kand. d. höh. Schulamtes in Schollwitz b. Hohenfriedberg (Schlesien).

2) Was den besagten Ellipsenzirkel betrifft, so ist die Konstruktion desselben nicht neu. Genau in derselben Weise, wie es auf S. 637 beschrieben und abgebildet ist, sah ich denselben schon im Jahre 1875 bei dem seither verstorbenen Rektor Dr. Gugler an dem Kgl. Polytechnikum zu Stuttgart. Der betr. Zirkel wurde allerdings damals von genanntem Herrn nur selten an der Tafel benützt; das Instrument dürfte sich wahrscheinlich jetzt noch im Kgl. Polytechnikum zu Stuttgart befinden, vorausgesetzt, dafs dasselbe nicht Privatbesitz des Hrn. Rektor Dr. Gugler war, was ich nicht genau angeben kann. X in Y. (Name unleserlich)

3) Den erwähnten Ellipsenzirkel kaufte ich vor einigen Jahren in der Leipziger Lehrmittelanstalt von Dr. O. Schneider. Derselbe ist aus Holz angefertigt, zum Zeichnen mit Kreide (an der Wandtafel) eingerichtet und kostete 3 Mark. Mein Bruder kaufte vor längerer Zeit ein ähnliches Instrument hier. Dasselbe ist aus Messing gefertigt und dient zum Zeichnen mit Bleistift auf Papier Dr. phil. P. Weinmeister in Leipzig.

4) Zur Seite 637 sei bemerkt, dafs es sich um das bekannte Ovalwerk *Leonardo da Vincis* handelt. Die beiden Geradführungen lassen sich dadurch ersetzen, dafs man ein Zahnrad in einem doppelt so grofsen, stillstehenden umlaufen läfst. Jeder Punkt der Peripherie des kleineren Rades beschreibt eine Gerade, z. B. wandert A stets auf AC, (AC = senkr. Durchm.), B stets auf DE (DE = horizont. Durchm.). Jeder Punkt auf einem Durchmesser aber bewegt sich auf elliptischer Bahn, auch wenn er auf der Verlängerung liegt. In der Theorie der Ellipsenlenker kommt die Sache zur Sprache. Die Zeichnung des Einsenders ist das allbekannte Schema des Ellipsenzirkels. Analytische und synthetische Beweise sind einfach. Dir. Dr. Holzmüller in Hagen.

5) Hr. Dr. E. Eberhard, Schulrat, erster Direktor der 1848 hier gegründeten Realschule hat von seinem am 28. Jan. 1843 verstorbenen Vater, Baurat E. Fr. G. Eberhardt einen solchen in Messing gearbeiteten Ellipsenzirkel (für Zeichnungen auf Papier) geerbt und dem an genannter Schule zu bildenden physikalischen Kabinet neben anderen mechanischen Modellen aus derselben Quelle einverleibt, wo er sich heute noch befindet.

Dr. Ehrh. Zizmann, Prof. an der herzogl. Realschule zu Coburg.

6) Einen Ellipsenzirkel der dort beschrieben Konstruktion besitzt die Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule seit 1862. Mir ist derselbe sehr viel länger bekannt. Gallenkamp in Berlin.

7) Die am a. O. erwähnte mechan. Konstruktion der Ellipse gehört zu den ältesten Ellipsenkonstruktionen, die wir kennen. Sie wurde zuerst von Bion (Traité de la construction et des principaux usages des instruments mathématiques. Nouvelle édition. La Haye 1723) beschrieben und ist im Grunde nur als eine Umkehrung des alten von Leonardo da Vinci angegebenen Ovalwerks zu betrachten, welches dieser Künstler zum Abdrehen elliptischer Arbeitsstücke in Vorschlag gebracht hatte. Dieselbe wurde in der Folgezeit durch unwesentliche Veränderungen verbessert; aber auch die neueste aus der Mitte der 70er Jahre datierende durch Ingenieur Gujer in Winterthur ausgeführte Abänderung derselben macht keinen Anspruch auf eine vollkommene und allen Anforderungen entsprechende Lösung. Für Weiteres vergl. man Ritterhaus: Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleifses, 1874, Heft 3, sowie Dinglers polyt. Journal, Bd. 223, S. 461 ff.

Prof. Suter in Fluntern bei Zürich früher in Aarau.

8) Auf der Wiener Weltaustellung (1873) waren u. A. auch „Instrumente zum Zeichnen von Kegelschnitten“ von Prof. Zmurko aus Lemberg ausgestellt (gearb. von d. Mechanikern Starke und Markus in Wien). Eine Orientierung hierüber bietet die Broschüre: L. Zmurko, Beitrag zur Erweiterung der Operationslehre der konstruktiven Geometrie. Lemberg 1878. Siehe unsern Ausstellungsbericht in ds. Ztschr. IV, 433.

D. Red.

Zur Beantwortung der Frage Nr. 37b (Hft. 2, S. 158) giebt uns Prof. Dr. Ludwig in Greiz folgende Schriften an:

R. Koch, Die Cholerafrage auf ihrem neuesten Standpunkte (Mediz. Hausbücher Bd. 28) gr. 8° IV, 42 S. Berlin, Hempel 1886. Pr. 0,50 M.

Über die letzten Entdeckungen bezüglich des Cholerabacillus und die von ihm erzeugten giftigen Fermente enthält das Wichtigste auch ein kleiner Aufsatz von A. Pfeifer: Über den Verlauf und die Erforschung der Cholera indica im Jahre 1886. Deutsche medic. Wochenschrift 1887. Nr. 2. M. v. Pettenkofer — *audiatur et altera pars* — hat gleichfalls zum gegenwärtigen Stand der Cholerafrage im Archiv f. Hygiene Bd. V, 1886, Heft 4ff. geschrieben. — „Über die Verbreitung d. Choleraseuche und ihre Ursache“ hat W. Burckhardt (8° III, 47 p. Leipzig, Grefsner & Schramm 1886, 0,80 M.), „Über die Verhütung und Behandlung der Cholera asiatica“ F. Urbaschek (gr. 8° VI, 108 S. Wien, Braumüller 1886, 3 M.) geschrieben. Eine gleiche Speziallitteratur über Cholerabacillus und Cholera s. auch im Centralbl. f. Bacteriologie u. Parasitenkunde v. Uhlworm in Kassel.

NB. Die Herren Fragesteller werden ersucht, ihre Fragen und die Herren Antwortgeber ihre Antworten recht leserlich zu schreiben, weil sie denselben in der Regel zur Korrektur nicht zugesandt werden.

Notiz betreffend die Orthographie des Stadtnamens Kassel.

Mit Beziehung auf Heft 2, S. 159.

Hr. Dr. Ackermann-Kassel übersandte uns zwei Zeitungsausschnitte 1) der Kasseler Zeitung, 2) der Hessischen Morgenzeitung, in denen überall gedrukt ist Kassel. Wir nehmen dies *„ad acta“* und werden künftig uns dieser Orthographie bedienen.

Die Redaktion.

Berichtigung.

Bd. XVII (1886) S. 492 (Gaufs'scher Fundamentalsatz etc. mufs es Z. 14 v. o. in der Formel für c heifsen:

$$qi - p \text{ statt } pi - p$$

(s. auch die Bericht. von Schlegel, Hft. 2, S. 111).

Bei der Redaktion eingelaufene Druckschriften:

(Februar — März).

Müller, Elemente der Planimetrie. 2. Aufl. Metz-Diedenhofen b. Scriba.
Féaux, Buchstabenrechnung und Algebra nebst Übungsaufgaben (8. verm. Auflage von Luke). Paderborn-Münster, F. Schöningh 1887.
Gauss, Abhandlungen zur Methode d. kleinsten Quadrate, deutsch von Börsch u. Simon. Berlin, Stankiewicz 1887.
Schellen-Kareis, der elektromagnetische Telegraph. 6. Aufl. Lief. 6. Braunschweig, Vieweg 1886.
Riemann, Taschenbuch für Mineralogen. Berlin, Springer 1887.
Élie, des Constantes d' Élasticité dans les milieux anisotropes (Extrait des Mémoires de la Société des sciences phys. et natur. de Bordeaux) 1886.
Grawinkel-Krebs, Elektrotechnische Rundschau IV, Jahrg. 1887. (Probeheft). Halle, Knapp 1887.
Klinghardt, Das höhere Schulwesen Schwedens und dessen Reform im modernen Sinne. Leipzig, Klinkhardt 1887.
Januschke, Das Prinzip der Erhaltung der Energie in der elementaren Elektrizitätslehre. Leipzig, Teubner 1887.
Bardey, Quadratische Gleichungen. Mit den Lösungen, für die oberen Klasse der Gymnasien und Realschulen. Zweite verm. Aufl. Leipzig, Teubner 1887.
Biermann, Theorie der analytischen Funktionen. Leipzig, Teubner 1887.

Schriften über Schulorganisation.

Ordnung der Prüfung für das höhere Lehramt.*)
Petition und Druckschrift der preufsischen Ober-Realschul-Direktoren bezüglich der Berechtigungen der Ober-Realschulen. Stettin, Herrcke-Lebeling 1887.

Zeitschriften.

C.-O. XV, 2—6. 7—11. — Zeitschr. f. d. R.-W. XII, 1—3. — Zeitschr. f. Schulgeogr. VIII, 4—6. — Zeitschr. f. phys. Unt. III, 9. — Schloem. Zeitschr. XXXII, 1—2. — Nouv. Ann. d. Math. 1887. (Januar.- u. Februar-Heft). — Annals of Mathematics (University of Virginia) vol. 3 Number 1. — Deutsche bot. Monatsschr. V, 1. — Deutsche Chemiker-Zeitung II, 10.

Programm-Aufsätze u. dergl.

Progr. Stettin: „Ueber d. Gegenmittellinie und die Grebe'schen Punkte" (Forts. d. Progr. v. Ostern 1886) von Prof. Dr. Lieber.

*) Da jeder weitere Zusatz fehlt, so wufsten wir im ersten Augenblick nicht, für welches Land, ob für Bayern oder für Lippe-Detmold, diese Prüfungsordnung bestimmt ist; da aber in § 1 von einer Königlichen Prüfungskommission die Rede ist, so kann es nur eins der vier Königreich im deutschen Reiche sein.

Eingelaufene Beiträge.

S. i. P. Dritte Umarb. d. Aufl. d. irr. Gl. erh. — M. in C. Die geom. Darstellung d. Linsenformel etc. — S. i. E. Recens. von M. G. O. Wir bitten, künftig losen Blättern einen Umschlag zu geben. — M. i. F. i. Schl. Progr.-Sch. etc. (Dieselbe Bitte.) — S. i. Dr. Schlufs von „Beiträge z. a. An."

Briefkasten.

Allgemeiner:

1) Wir bitten dringend, unser wiederholtes Gesuch im Briefkasten (XVI, 478 und 638 und XVII, 480) bezüglich der Umschläge und Aufschriften der Beiträge, besonders auch der zum Aufg.-Rep., gef. zu berücksichtigen.

2) Unsere Bitte an die Herren Programm-Referenten (Heft 2 und 6 des vorigen Jhrgs. S. 160 und 480 ist leider gröfstenteils unbeachtet geblieben, daher sind die Mappen für die Programmschau immer noch — leer.

3) Freundliche Mahnung an die Mitarbeiter. Hinsichtlich der Beiträge zu ds. Ztschr. hat sich allmählich ein eigentümliches Mifsverhältnis herausgebildet. Während Beiträge für die 1. Abt. (Originalaufsätze und kl. Mitteilungen) in Massen eingehen und in den Mappen lagernd des Druckes harren, werden der litter. Berichte (besonders Rezensionen, Programm- und Zeitschriften-Berichte) immer weniger. Jeder möchte wohl gern seinen Aufsatz gedruckt sehen (und zwar „recht bald!") aber (mit äufserst wenigen sehr lobenswerten Ausnahmen) will niemand berichten bezw. rezensieren. Denn eine gründliche Rezension (bezw. ein Bericht) macht ja freilich viel (oft recht viel) Mühe! Um diesen Übelstand wenigstens zu mildern, hat der Herausgeber beschlossen unter gleich guten Beiträgen für Abt. I. denjenigen den Vorrang im Erscheinen zu lassen, deren Verfasser ihm versprechen, ihm jährlich wenigstens eine, und zwar eingehende und gründliche Besprechung eines in ihr Spezialfach fallendes zur Besprechung eingelieferten Werkes zu übernehmen.

4) Da immer noch bisweilen Beiträge für's Aufgaben-Repertorium zu spät einlaufen, so bringen wir die Termine zur Absendung der Beiträge fürs Aufg.-Rep. an die Redakteure desselben aufs neue in Erinnerung (s. VIV, 272, XVI, 483 und XVII, 480):

für Heft	1	(1. Jan.)	spätestens	am	1. November
„ „	2	(15. Febr.)	„	„	15. Dezember
„ „	3	(1. April)	„	„	1. Februar
„ „	4	(15. Mai)	„	„	15. März
„ „	5	(1. Juli)	„	„	1. Mai
„ „	6	(15. Aug.)	„	„	15. Juni
„ „	7	(1. Okt.)	„	„	1. August
„ „	8	(15. Nov.)	„	„	15. September

Später einlaufende Beiträge werden von jetzt ab ohne Weiteres zur folgenden Sendung zurückgelegt.

5) Wir wiederholen das im Briefkasten XVII_8, 639 (auf Anregung der Red. des pädagog. Archivs) ausgesprochene und XVII_2, 160 sub 4) u. s. w. wiederholte Gesuch an die Herren Mitarbeiter: in ihren für d. Z. bestimmten Artikeln nur solche Fremdwörter zu gebrauchen, die sich durch gleichwertige deutsche Ausdrücke **nicht** ersetzen lassen; doch mit dem ausdrücklichen Zusatz: dafs wir hierin **nicht radikal** vorgehen, sondern dem gemäfsigten Fortschritte huldigen.

Einige wichtige pädagogische Tagesfragen mit besonderer Berücksichtigung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Vom Herausgeber.

Unsere Zeitschrift hat auch eine Abteilung „Organisation des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Diese Abteilung ist in mehreren Jahrgängen leer geblieben. Wir tragen daher nur eine alte Schuld ab, wenn wir daran gehen, diese Lücke selbst auszufüllen. Denn wir sind bei der Gründung der Zeitschrift durchaus nicht der Meinung gewesen und sind es auch jetzt nicht, dafs dieselbe nur dazu da sei, damit in einigen Gebieten vorzugsweise der Mathematik eine neue methodische Behandlung einiger specieller Abschnitte oder ein paar neue Formeln gegeben werden; vielmehr sollen mitunter auch wichtige Angelegenheiten und Einrichtungen, die auf den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht Einflufs haben, von einem allgemeinen Standpunkte aus betrachtet werden. Es liegt in der Natur der Sache, dafs die hier einschlagenden Erörterungen teilweise auf das Gebiet der allgemeinen Pädagogik und der Schulorganisation hinübergreifen müssen; das wird jedoch immer geschehen mit Rücksicht auf die von der Zeitschrift vertretenen Fächer. Wir behandeln der Reihe nach folgende Themen:

I) Die Notwendigkeit und Heilsamkeit einer Rektoratsprüfung.
II) Ist die Einheitsschule möglich?
III) Welche Prüfungen (der Schüler höherer Schulen) sind beizubehalten und welche zu beseitigen?
IV) Sind die Extemporalien beizubehalten oder abzuschaffen?*)

*) Ein 5. Thema, das wir später zu behandeln gedenken, ist: Das ethische Element in Lehrgegenständen, die sich scheinbar gegen das Ethische spröde verhalten (z. B. Rechnen u. Geographie).

I.

Die Notwendigkeit und Heilsamkeit einer Rektoratsprüfung.

Eine Ergänzung der höheren Lehrerausbildung in Hochschulseminaren.*)

In der Geschichte des höheren Schulwesens der letzten vierzig Jahre (und gewifs weit mehr der früheren Jahrzehnte) spielt die beklagenswerte Thatsache eine Rolle, dafs Rektoren höherer Schulen, besonders der Gymnasien, meist Philologen**) mit seltenen Ausnahmen, von Realien insbesondere von Mathematik wenig oder nichts verstanden. Demgemäfs liefsen sie den realistischen Lehrgegenständen nicht die gehörige Pflege angedeihen, ja manche suchten sie auch offen oder insgeheim durch Rede oder That zu unterdrücken, mindestens aber gleichgültig zu behandeln. Infolge dessen genossen auch die betreffenden Fachlehrer, besonders die Mathematiker nicht diejenige Achtung seitens der Kollegen und der Schüler, die ihnen der Wichtigkeit und Würde des von ihnen vertretenen Lehrfaches angemessen, gebührte. Wir haben in dieser Zeitschrift an verschiedenen Stellen mehrere recht auffallende Äufserungen historisch festgestellt, welche sächsische Gymnasialrektoren über Mathematik und Naturwissenschaften als Lehrgegenstände des Gymnasiums gethan haben.***) Eine Illustration hierzu bietet

*) Dieser Artikel verdankt seine Entstehung unsern Erfahrungen in unserer früheren Schulpraxis. Doch hatte der darin ausgesprochene Hauptgedanke für uns an Bedeutung verloren, seitdem wir die öffentliche Lehrpraxis verlassen hatten. Erst neuerdings ist uns von verschiedenen Seiten Anregung gegeben worden ihn wieder aufzunehmen.

**) Nur höchst selten sind die Gymnasialrektoren aus der Reihe der Mathematiker gewählt worden und dann waren sie wohl zugleich Philologen. Wir lernten solche Fälle in Wien kennen. In Deutschland darf ich wohl an den verstorbenen Rektor Friedlein in Hof (Baiern) und unter den Lebenden an Gerhardt-Eisleben erinnern.

***) Man sehe ds. Z. I, S. 2 Anm. † und den S. 73, Jahrg. XVII, zitierten Art. von Ellendt im Programm zu Eisleben von 1855. Ferner den Weifsenfelsschen Art. XVI, 467 u. die Erlersche Entgegnung, Jahrg. XVII, S. 73. Da der 1. Bd. d. Zeitschrift nicht in den Händen aller Leser sein wird, so wollen wir die Anm. S. 2 hier wiederholen: „Ein Rektor in Sachsen hiefs in der Studierstunde einen Schüler die mathematische Arbeit weglegen mit den Worten: „Was für barbarica treiben sie da?“ Ein anderer beehrte die Mathematik mit dem Titel „dummes Zeug“, ein dritter sehr glimpflich mit „Nebenfach“. Diese (übrigens verbürgten)

die verbürgte Thatsache, dafs an der Leipziger Thomasschule sonst der Mathematikus (von dem das geflügelte Wort „mathematicus non est collega“ galt) nur bis in die dritte Stelle aufrücken konnte.*) Nicht minder verbreitet hierüber Licht das berüchtigte Programm des Gymnasialdirektors Ellendt in Eisleben (1855).**) In diesen Bestrebungen wurden die Rektoren

Übergriffe konnten bei dem trefflichen alten Gymnasial-Regulativ (v. geh. Schulr. Schulze) passieren.“

*) Man sehe den Aufsatz: „Zur Geschichte des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an Gymnasien insbesondere an der Thomasschule zu Leipzig von Heym im Programm der Thomasschule Ost. 1872/73. Wir entnehmen demselben folgende Stellen: (S. 41) „Schon aus den früheren Mitteilungen kann man schliefsen, dafs zu Anfang des Jahrhunderts die Lehrer dieser Wissenschaft (der Mathematik) fast ein ebenso loses Band an die Schule knüpfte, als heutigen Tages etwa noch bei dem Tanzlehrer, wenn ein solcher vorhanden ist, stattfindet.“ Vom Rektor Rost heifst es (S. 41): „So darf man denn wohl auch annehmen, dafs Hohlfeld von Seiten des Rektors Rost, ohne die hohen sittlichen Eigenschaften dieses um die Schule verdienten Mannes nur im Geringsten antasten zu wollen, mancherlei Mifsachtung zu erfahren und unter dem bekannten harten Ausspruch: '*Mathematicus non est collega*' mehr als billig war, zu leiden hatte. Sind doch die Nachklänge dieses Interdictes noch bis in die neueste Zeit hinein zu hören gewesen und selbst heute*) noch nicht ganz erloschen. Es kann nicht geleugnet werden, dafs Rost alles that, um die Mathematik und damit zugleich auch, vielleicht ohne seinen Willen,**) die Person des Mathematikers in den Augen der Schüler herabzusetzen.“

Dafs auch noch in neuerer Zeit Fälle vorkommen, in denen die Mathematik in der Person des Mathematikers vom Direktor aus bekämpft wird, das beweist eine in dieser Z. Jhg. X, von einem Fachgenossen S. 315/6 niedergelegte Beschwerde, betr. das Gebahren eines Rektors gegen den Mathematiker beim Mat.-Examen, ein Fall, in welchem sogar später der Schulrat eingreifen mufste. Man sehe auch die Ansichten Nohls über die Mathematik (3. Abt. dieses Hefts).

**) Dieses bereits über 30 Jahre alte und mit einem gewissen Kampfesmut und mit sittlicher Entrüstung über die damalige rationale theologische Richtung und den herrschenden Hegelianismus geschriebene Programm ist sehr anziehend und belehrend zu lesen. Wir empfehlen daher die Lektüre desselben allen denen, welche sich in die damaligen Schulkämpfe zurück-

*) 1872. D. Red.

**) Es möchte doch hierzu bemerkt werden, dafs auch schon zu Rosts Zeiten ein nur halbwegs umsichtiger Pädagog doch einsehen mufste: dafs, wenn in einer Schule ein Lehrgegenstand vom Direktor aus vor den Schülern demonstrativ mifsachtet wird, diese Mifsachtung sich auch auf den Träger desselben übertragen mufs. D. Red.

mitunter sogar von der nächsten Aufsichtsbehörde, der so-

---

versetzen oder, wenn sie jünger sind, dieselben kennen lernen wollen. Die Abhandlung des Direktors (Ellendt) führt den Titel: „Auch eine Stimme über das, was den Gymnasien not thut." Für unsern Zweck teilen wir folgende Stellen daraus mit:

(S. 10): „Dagegen ist es notwendig, daſs einerseits der eigentliche Religionsunterricht nicht nur im allgemeinen christlichen, sondern im konfessionellen Sinne (immer die evangelische Einheit sowohl den Katholiken als den Unchristen gegenüber vorausgesetzt) erteilt, andererseits aller Unterricht vom Geiste des Christentums durchdrungen, erfüllt und geheiligt werde. Davon kann man allerdings die Mathematik ausnehmen, die aus andern Gründen, wiewohl in weiser (jetzt nicht vorhandener) Beschränkung, beibehalten werden muſs, einer solchen Durchdringung aber nicht fähig ist. Auch von den Naturwissenschaften gilt jene Forderung nur in einem sehr beschränkten Maſse. Diese als Darlegung der schöpferischen Herrlichkeit Gottes fassen zu sollen, ist zwar ein Modesteckenpferd sämtlicher Realisten; allein sie würden sich höchst lächerlich machen, wenn sie z. B. die Mineralogie oder die Gesetze der Mechanik und Optik im Geiste frommer Betrachtungen behandeln wollten; sie thun es auch nicht, sondern wollen ihr Schoſskind nur der Zeitströmung empfehlen, gleichwie sie im Jahre 1830 mit dem Winde der Hegelei segelten. Sprachen dagegen, Litteratur und Geschichte können und sollen im Lichte des Christentums betrachtet werden indem durch sie teils die Vorbereitung, teils die Vollendung der christlichen Offenbarung gelehrt, und mit dem Unterschiede und Irrtum zugleich die Übereinstimmung und Wahrheit dargethan wird."

(S. 12): „Wichtiger aber als alles dies ist die Beschränkung der Tyrannei, welche die Mathematik bisher in den Gymnasien ausübt. Die unbestreitbare Erfahrung, daſs die geistvollsten Schüler für die Mathematik keinen Sinn haben, und daſs selbst die Fleiſsigsten sie meistens nur aus Pflicht und ohne Interesse treiben, so wie die nicht minder erweisliche Thatsache, daſs die beschränktesten Köpfe oft ganz vorzügliche Mathematiker sind, zeigt zur Genüge, daſs die bisherigen Lehrpläne und Prüfungsgesetze diese Wissenschaft unverhältnismäſsig bevorzugen, indem die Lehrstücke darin über den Gesichtspunkt allgemeiner Grundbildung hinaus und auf das praktische Gebiet der Fachstudien sich ausdehnen.*) Dies ist aber eben so fehlerhaft, als wenn man Philologie, Theologie und Jurisprudenz auf den

---

*) Nicht minder einseitig pflegen die meisten mathematischen Lehrer ohne Rücksicht auf den Gesamtorganismus des Unterrichts nur ihre Wissenschaft ins Auge zu fassen. Ich kann eine Schule anführen, deren Mathematikus seit Jahren (natürlich umsonst) gegen die Versetzung in allen Klassen zu Protokoll protestiert, weil seiner Meinung nach die Mathematik nicht genug berücksichtigt wird; eine andere, deren Mathematikus den in den Sprachen vorteilhaft Beurteilten allemal schlechte Zensuren giebt, und eine dritte, deren Mathematikus in einem kürzlich erschienenen Programm die sogenannten (!) Gymnasien Österreichs bewundert, weil sie die Mathematik bereits in der zweitobersten Klasse beendigen, um in der obersten in sieben Wochenstunden Physik zu lehren! (Anm. von Ellendt.)

genannten „Gymnasialkommission“ oder ihrem Vorsitzenden unter-

---

Gymnasien systematisch zu Lehrgegenständen erheben wollte. Unstreitig ist die Trigonometrie sehr anziehend, aber sie gehört nicht in das Gymnasium, weil sie, gleich dem Hebräischen für die Theologen, nur dem Offizier, dem Feldmesser und dem Mathematiker von Profession dient. Mit ihr fallen die Logarithmen, ein bloſses Abkürzungsmittel trigonometrischer Rechnungen. Die Kombinationslehre ist eine Spielerei. Die Stereometrie besitzt, wie alle geometrische Konstruktion, unstreitig eine gewisse bildende Kraft; aber ihre Aufgaben setzen ein Maſs von — man möchte sagen — abstrakter Phantasie voraus, das erfahrungsmäſsig nur sehr wenigen Schülern eigen ist. Wenn hiernach der mathematische Unterricht auf die Planimetrie, die Lehre von den Zahlen, Proportionen, Potenzen und Wurzeln und die Gleichungen des ersten und zweiten Grades beschränkt, und statt der *vier* Aufgaben, deren Lösung in vier Stunden für die meisten Abiturienten eine Unmöglichkeit ist, nur *zwei* gefordert werden, so reichen in den mittlern Klassen (wie schon jetzt) *drei*, in den obern *zwei* wöchentliche Stunden vollkommen aus. Die Physik muſs derjenigen mathematischen Grundlagen, die über das eben gesteckte Ziel hinaus gehen, entkleidet, die Naturgeschichte in den untern Klassen ganz gestrichen und nur in Tertia eine allgemeine physiologische Übersicht der drei Reiche gegeben werden. Hierzu genügen *zwei*, für die Physik in Prima und Sekunda *eine* Wochenstunde. Letzteres ist z. B. in Pforte hergebracht, und man hat nie über Nachteile dieser Einrichtung klagen hören.*) Eine weitere Ausdehnung des mathematisch-physikalischen Unterrichts überlasse man einstweilig den Realschulen, die sich daran für den Mangel wirksamerer Bildungsmittel schadlos halten mögen. Ob sie in der bisherigen Weise, d. h. ohne alles Prinzip, noch lange fortbestehen werden, kann nach den wenig tröstlichen Erfahrungen, die man an ihnen gemacht hat, zweifelhaft erscheinen. Natürlicher ist es jedenfalls, bei der täglich zunehmenden und von mir in ihrem ganzen Umfange erkannten(?) Bedeutung der Naturwissenschaften für das industrielle Leben, das Ziel der Realschulen dem durchschnittlichen Alter ihrer Zöglinge gemäſs enger zu stecken, dagegen die Ackerbau-, Handels- und Gewerbeschulen zu vermehren. Ob übrigens jenes allgemein gefühlte Miſsverhältnis der Mathematik zu den klassischen Studien abgestellt werden wird, steht sehr zu bezweifeln. Neueste Verordnungen scheinen dem geradezu entgegen zu

---

*) Nach einer von Prof. Dr. *Buchbinder* in Pforta erbetenen Mitteilung ist es aber in Pforta seit 1855 immer besser geworden. Der geehrte Herr Fachkollege schreibt uns hierüber: „Als ich Mich. 1855 als 6. Prof. nach Pforta kam, fand ich 1 St. Physik in der Gesamtprima vor. Auf meinen Antrag wurden es von Mich. 1856 ab *zwei* St., dazu trat Michael. 1866 1 St. in IIa; Ost. 1867 wurden beide Primen auch in der Physik getrennt Ost. 1873 kam eine St. in IIb hinzu und von Ost. 1883 wurden es auch in IIa und IIb je 2 St. Dabei war ein reicher physikalischer Apparat vorhanden, der mit jährlich 110 Thlr. erhalten und vermehrt wurde, was noch der Fall ist.“ Ähnliches geschah für die Naturgeschichte unter Mitwirkung des 2. Mathematikers *Sagorski*. —

stützt.*) Zugegeben, daſs diese Fälle nur vereinzelt dastehen, so würde es doch gewiſs recht schwer, wenn nicht unmöglich sein nachzuweisen, daſs die altphilologischen Leiter und Lehrer der Gymnasien in ihrer Majorität (denn einzelne Ausnahmen ändern an der Thatsache nichts), den Realien, insbesondere der Mathematik, eine liebevolle Pflege hätten angedeihen lassen oder ihr überhaupt wohlwollend entgegengekommen wären.**)

---

sein. Ja, es giebt Universitäten und Residenzen, in denen die Mathematik über das bisher vorgeschriebene Schulziel weit hinaus getrieben wird, und zwar von denen, die darauf zu sehen berufen sind, daſs dies nicht geschehe. Gesetze scheinen für diese Herren gar nicht zu existieren."

Es dürfte nicht uninteressant sein, noch denjenigen Teil des S. 32 gegebenen Lehrplans, der unsere Fächer betrifft, mitzuteilen. Darnach war im Gymnasium zu Eisleben die Stundenzahl in den einzeln Klassen für

	I	II	III	IV	V	VI	wöchentl. Sa.	Haupt-Sa.
Mathematik u. Rechnen	4	4	3	3	4	4	22	42
Naturkunde	2	2	2	2	2	2	12	
Geographie	—	1	1	2	2	2	8	

Sieht man von den Stunden für die Nebenfächer: Schreiben, Zeichnen, Singen (= 17) ab, so war das Verhältnis der sprachlich-geschichtlichen Stunden zu den mathem.-naturw., wie 128 : 42 d. i. ca. 3 : 1. Das aber war dem Rektor Ellendt zu viel. — (Man vgl. unsere Nachschrift S. 264).

*) Diese „Kommission" besteht in Sachsen gewöhnlich aus dem 1. Geistlichen d. Orts (Superintendent), dem Bürgermeister und einem dritten (wechselnden) studierten Mitgliede (Advokat od. dergl.). Sie ist eine ähnliche Mittelbehörde, wie in Preuſsen das Kuratorium.

**) Man lese in Paulsens „Geschichte des gelehrten Unterrichts auf den deutschen Schulen und Universitäten" S. 728 u. 734 und überhaupt die Partie, welche die Gymnasialgeschichte der 50er Jahre mit der Absicht der Wiederherstellung des Latinitätsbetriebs behandelt. Wir teilen daraus folgende Stellen mit:

(S. 728.) „Von einem Rivalisieren zwischen Mathematikern und Philologen war in einer der ersten Verfügungen des Ministeriums Eichhorn die Rede und den Mathematikern dies ernstlich untersagt worden: sie sollten sich auf ihr Pensum beschränken (Wiese, Ges. u. V. I, 99). Beschränkung des mathem. Unterr. empfahl auch die Konferenz westfälischer Direktoren i. J. 1854 (Erler, 167). Ebenso Ellendt in dem erwähnten Programm (Eisleben 1855), wo den Mathematiklehrern viel böses nachgesagt wird: wie sie den Schülern, welche die alten Sprachen liebten, das Leben sauer machten, indem sie ihnen schlechte Zensuren gäben, ja sogar ihre Versetzung zu hintertreiben suchten. Ellendt will nur zwei Mathematik-

Diese Thatsache, die offene oder geheime Zurückschiebung, sozusagen die Eindämmung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrfächer seitens der altphilologischen Leiter und Lehrer der Gymnasien, hat ja bekanntlich auch die Gründung von Realschulen veranlafst, die sodann im Laufe der letzten vierzig Jahre eine allmähliche Vervollkommnung und Annäherung an die Gymnasien erfahren haben und nun aus Realschulen Realgymnasien geworden sind. Ja, wir können hinzufügen, dafs dieser Umstand mit zur Gründung dieser Zeitschrift geführt hat. Ein solcher Zustand, wie der geschilderte, ist aber einer höheren Schule unwürdig und musste sich auf die Länge der Zeit als unhaltbar erweisen. Wir wollen nun gerne zugeben, dafs hierin in neuerer Zeit vieles nach und nach besser geworden ist und sich auch unter den Altphilologen — Dank dem von ihnen selbst genossenen besseren Unterricht — die Wertschätzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrfächer erhöht hat. Aber, ist denn dies etwa das Verdienst der Philologen und Theologen? Hat man etwa gehört, dafs ein Gymnasialrektor beantragt hätte, das Lehrgebiet der Mathematik und der Naturwissenschaft in Gymnasien den Forderungen der allgemeinen Bildung entsprechend zu erweitern und zu vertiefen? Im Gegenteil! Schritt für Schritt haben die Vertreter

---

stunden in den obern Klassen. Aber die Sache erwies sich als nicht thunlich. Das neue Prüfungsreglement läfst es bei den alten Bestimmungen." (S. 734.) Dort wird berichtet über den Versuch die Dispensation der künftigen Theologen und Philosophen von dem mathem. u. physik. Unterricht in der Gymnasial-Prima durchzusetzen (Vorschlag v. Wehrmann) berathen auf der Pommerschen und Westf. Dir.-Konf. 1863/4 (s. Erler Dir.-Konf. I, 233) und über die Ablehnung dieses Vorschlags. Hieraus ist folgende Stelle charakteristisch: „Ein zweiter Grund der Ablehnung war, mit Seyffert zu reden, die Furcht vor den Realisten, welche Furcht im Grunde nichts anderes ist, als das böse Gewissen der Philologen selbst: natürlich, es ist ja in Wirklichkeit für die meisten Studierenden gar nicht notwendig, lateinisch schreiben und griechisch lesen zu können, wie jeder weifs, der auf unseren Universitäten auch nur ein wenig sich umgesehen hat. Diese Lage der Dinge nimmt den Philologen den Mut, für eine Einschränkung des mathematischen Unterrichts zu Gunsten des Altsprachlichen ernstlich einzutreten: sie fürchten den Entscheidungskampf, denn sie haben das Bewufstsein, er kann nicht mehr zu ihren Gunsten ausfallen. Darum begnügen sie sich mit dem Halben." —

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrfächer im Laufe der Jahre sich den Boden erkämpfen müssen für eine fruchtbare Wirksamkeit und für die Anerkennung der Wichtigkeit ihrer Lehrfächer*); sie sind hierin unterstützt worden durch den Druck, welchen die Vervollkommnung der Naturwissenschaften auf die allgemeine Bildung ausgeübt hat, einen Druck, welcher sich fortgepflanzt hat durch die öffentliche Meinung in der Presse und durch die Volksvertretungen (Landtage) bis zu den obersten Schulverwaltungen (Unterr.-Ministerien). So ist es nun endlich — dem Himmel sei Dank — dahin gekommen, dafs selbst**) in preufsischen Gymnasien jetzt das Nötigste aus der Naturgeschichte gelehrt wird, und dafs von preufsischen Gymnasiallehrern bereits recht schätzbare Leitfäden hierzu erschienen sind.***)

Trotz alledem scheint es uns, dafs man noch weit entfernt sei von einer Verfassung, wie sie eine weise und liebevolle Schulverwaltung, ja die Lehrerschaft selbst wünschen mufs, und welche anderen Schulgattungen zum Muster dienen könnte. Zu den mancherlei Erfordernissen einer solchen Musterverfassung gehört auch die wohldurchdachte Heranbildung von Gymnasiallehrern und die Heranbildung von Direktoren aus dieser Lehrerschaft. Über diese (immer noch fehlende) Ausbildung von höheren Schulamtskandidaten an zu gründenden Hochschulseminaren (mit Übungsschulen!) haben wir uns in

---

*) Es hat uns daher immer ein eigentümliches Gefühl beschlichen, wenn wir in neuerer Zeit hören oder lesen mufsten, wie im Kampfe des Gymnasiums und der Realschule die Altphilologen sich stellten als wüfsten sie nicht, dafs die Vertreter des alten Gymnasiums diesen Kampf durch einen langen hartnäckigen passiven Widerstand heraufbeschworen, mindestens aber nicht vermieden haben. Dieses sich unschuldig stellen kommt beinahe einem Schuldbekenntnis gleich. Auch der Vortrag von Seliger in Meifsen „das Gymnasium und seine neuesten Gegner" verleugnet dies nicht. Vergl. XVII, 475.

**) Dieses „selbst" bezieht sich auf die Thatsache, dafs Sachsen hierin Preufsen immer voran war, wie wir an mehreren Stellen d. Z. schon hervorgehoben haben, z. B. in analyt. Geom. u. Naturgesch. Man lese auch unseren Artikel „Zur Reform des mathem. u. naturw. Gymnasialunterrichts in Preufsen" Jahrg. X, 184 ff., 317 ff., 401 ff. —

***) Hierher gehören z. B. die Leitfäden f. d. Naturgesch. von Bail (s. z. B. Mineralogie. 2. Aufl. Lpzg. 1885, Fues.), ferner Bork, Elemente d. Chemie; angezeigt in XVII, 221 u. 298.

ds. Z. öfter und besonders eingehend in unseren Thesen VI, 351 u. f. sowie in X, 327 u. f. ausgesprochen, sodafs uns die Wiederholung unserer Ansichten überflüssig erscheint.*) Auch von Andern ist hierüber vieles und z. T. recht Treffliches geschrieben worden. Dagegen hat unseres Wissens noch niemand über die notwendige Ergänzung zu dieser Ausbildung, die Heranbildung von Rektoren aus den Lehrkörpern, sich eingehend verbreitet. Für diese Ausbildung darf man aber verlangen, dafs die Rektoren von Gymnasien, Lehranstalten, die immer noch den obersten Rang einnehmen, in allen Fächern, die nicht ihr Hauptfach sind, doch soweit vorbereitet seien, dafs sie sowohl die Leistungen der Schüler, als auch die Methode ihrer Lehrer zu beurteilen und eventuell zu berichtigen vermögen und zwar nicht nur im allgemeinen, sondern auch im besonderen so weit, als diese Methode durch die Natur des Lehrgegenstandes bedingt ist. Dies ist auch sehr wichtig wegen der Probekandidaten, so lange in Ermangelung von Hochschulseminaren die Einrichtung des „Probejahres" noch besteht. Ein Rektor soll in Notfällen, bei Vakanzen und zufälligen Behinderungen, einspringen und aushelfen, ja er soll den Lehrer jedes wissenschaftlichen Faches**) vertreten können. Nicht nur in der Achtung seiner Schüler, sondern auch in der seiner Lehrer wird er dadurch steigen. Dagegen läfst sich nach unseren Erfahrungen der üble Eindruck nicht verleugnen, den das offene und — beinahe demonstrative — Geständnis der Unwissenheit und Urteilsunfähigkeit auf Lehrer und Schüler macht.***) Nicht

*) Es möge hier bemerkt werden, dafs in allen von uns gelesenen Schriften und Aufsätzen über dasselbe Thema unser Artikel zu unserm grofsen Befremden vollständig — man gestatte das Wort — ignoriert worden ist, z. B. auch in der (übrigens sehr lesenswerten) Broschüre des Leipziger Theologen Hofmann, die praktische Vorbildung zum höhern Schulamt auf der Universität. Leipzig 1881; und in Vogt, das pädag. Univ.-Seminar etc. Leipzig 1884.

**) Nur die Künste dürften hiervon eine Ausnahme machen. Man kann nicht verlangen, dafs ein Rektor zugleich ein guter Musiker (Sänger), Turner und Zeichner sei.

***) Verf. ds. erinnert sich aus seiner Gymnasialzeit, als in der philosophischen Propädeutik (Encyklopädie der Wissenschaften) die Mathematik an die Reihe kam, dafs der im Deutschen tüchtige und auch als Dichter wohlbekannte Lehrer (Konrektor) offen und frei erklärte:

minder soll ein Rektor Verständnis zeigen für die Zweckmäſsigkeit der anzuschaffenden Lehrmittel, wenn er auch hierin den Fachlehrern die Hauptstimme zuerkennen wird. Daſs er auch in die Tiefen der andern wissenschaftlichen Lehrfächer eingedrungen sei, wird man billigerweise bei den heutigen hohen

---

der betr. Abschnitt sei vom „Mathematikus" verfaſst, da er selbst von Mathematik nichts verstünde. Die erbetene Unterstützung des Mathematikus war natürlich das Klügste, was er thun konnte, aber das Geständnis machte auf uns doch einen eigentümlichen Eindruck. — Ein sächsischer Rektor gestand offen, daſs er von Stereometrie nichts verstehe, da er auf seinem Gymnasium (in Hessen) dieselbe nicht gelernt habe; und von den Schülern sagte er: „halb betteln, halb stehlen sie sich durch." — Ein Geistlicher, Präses einer Gymnasialkommission, (Superintendent) äuſserte: „wir Alten verstehen nichts von Mathematik und haben doch auch etwas Tüchtiges gelernt und können etwas!" — Ein Lokalschulinspektor einer sächs. Realschule 2. O., ein alter Geistlicher — Archidiakonus — verherrlichte nach der öffentlichen Prüfung sein Schluſswort wie folgt: „ich verstehe zwar nichts von Englisch, aber ich denke, wenn ein Lehrer mit seinen Schülern englisch sprechen kann, da müssen sie doch schon etwas leisten." [Alles vom Verf. ds. selbst gehört]. Über dies Alles darf man sich nicht wundern, denn wie wenig die humanistischen Gymnasien vor 40 J. noch gerechten Anforderungen entsprachen, darüber lese man unsere Anm. XVII, 548 wo wir das Gymnasium anklagen, daſs es uns weder einen Stern, noch eine Pflanze, noch ein Thier, noch auch ein Mineral, überhaupt nichts von Naturgeschichte gelehrt hat; und ebenso lese man die Auſserungen eines berühmten nun verstorbenen sächs. Juristen (O.-St.-A. v. Schwartze) in ds. Z. XVII, 394. Man vergl. hierzu die treffliche Bemerkung Littrows in der Vorrede zu seinen Wundern des Himmels 7. Aufl. Einl. S. 8. „Die meisten selbst von denjenigen, welche auf vielseitiges Wissen und sogar auf eigentliche Gelehrsamkeit gerechten Anspruch machen, die mit Stolz auf den Vorrat ihrer gesammelten Kenntnisse sehen und Unwissenheit jeder Art für ein Gebrechen halten, die meisten von diesen stehen doch gar nicht an, so oft zufällig die Rede auf die mathematischen Wissenschaften kommt, ihre völlige Unkenntnis als eine ganz erlaubte Sache, die sich gleichsam von selbst versteht, mit einer Offenheit, mit einer Naivität zu bekennen, die man für Scherz halten müſste, wenn sie nicht gewöhnlich gleich darauf von Fragen und Äuſserungen begleitet würde, die eine Art von Entsetzen erregen und die Wahrheit jenes Geständnisses nur zu sehr bestätigen.

Wir wollen übrigens durchaus nicht in Abrede stellen, daſs es auch Fälle gegeben haben kann, in denen ein Mathematiker oder Physiker befremdliche Unwissenheit in Sprachen oder Geschichte gezeigt hat. Dies ist natürlich ebenso zu verurteilen.

Anforderungen und bei der Vertiefung der Wissenschaft nicht von ihm verlangen dürfen und nur wenige weit und tief veranlagte sozusagen gottbegnadete Lehrer- und Gelehrtennaturen werden dies annähernd vermögen.*) Dafs er aber das Verlangte leiste, das mufs der Staat durch eine regulativmäfsig festgesetzte Prüfung sich sichern. Wir wollen diese Prüfung Rektoratsprüfung nennen. Einen Anlauf hierzu finden wir bereits in einer preufsischen Einrichtung in dem sogen. Colloquium pro rectoratu, bestimmt durch die Cirk.-Verf. v. 21. II. 1867 (s. Wiese V. u. G. 2. Aufl. II, p. 294 u. f.). Dieses Colloquium ist keine Prüfung, sondern nur ein Mittel zum Ausweis über die Qualifikation zum Direktor, insofern er Verwaltungs-, Regierungs- und Erziehungsbeamter ist; es wird vom Provinzialschulkollegium abgenommen. Dafs er in allen Fächern zu unterrichten verstehe, ist nicht verlangt; es heifst a. a. O. nur: „die wissenschaftliche Qualifikation mufs vollständig dokumentiert, also die Fähigkeit in den obern Klassen zu unterrichten durch Zeugnisse über die abgelegte Prüfung und über die praktische Lehrerwirksamkeit nachgewiesen, eventuell vorher eine Dispensation von diesem Erfordernis ausnahmsweise erteilt worden sein."

Diese „Colloquia" wären unseres Erachtens zu regelrechten Prüfungen zu erheben, ähnlich wie man für Lehrerinnen die Schulvorsteherinnen-Prüfungen hat.**) Sie müfsten, so lange wir Hochschulseminar-Prüfungskommissionen noch entbehren, vor einer gemischten Kommission***) bestanden werden. Ist der betreffende Humanist, so hätte er die Prüfung mindestens in Realien

*) Dafs es auch solche Männer gegeben hat, unterliegt wohl keinem Zweifel. Zu denen, die neben der Philologie zugleich das mathem. Gebiet oder umgekehrt beherrschten, gehörten wohl von den Verstorbenen der schon genannte Rektor Friedlein in Hof und der Mathematiker Jacobi in Schulpforta und von den Lebenden dürften zu nennen sein, Rektor Gerhardt in Eisleben und Hultsch in Dresden. Auch unter den preufsischen Oberschulräten und Schulräten dürfte man solche finden. So erfuhren wir in Berlin, dafs die Herren Bonitz und Klix sofort, da nöthig, Abiturienten aus dem Stegreife — wenn auch jeder in seiner Weise — examinierten.

**) Auch für geistl. Ämter hat man ja dergl., z. B. wenn Pastoren in höhere Ämter (z. B. Superintenduren) einrücken.

***) Etwa zwei (Ober)schulräthen, zwei Univ.-Professoren, näml. einem Humanisten und einem Realisten und einem (ältern) Rektor.

zu bestehen, ist er Realist in der (alten oder neuen) Philologie verbunden mit Geschichte, in beiden Fällen soweit, dafs er den oben bezeichneten Bedingungen genügte. Auf das Pädagogische und besonders auf das Direktionstalent wäre um so mehr Gewicht zu legen, als ein Rektoratsamt einen gewiegten Schulmann verlangt. Als Grundsatz für die Wahl eines Oberlehrers aus mehreren zum Rektor sollte gelten, um es mathematisch auszudrücken, dafs die pädagogischen und wissenschaftlichen Fähigkeiten zusammengenommen, ein Maximum bilden, so aber, dafs erstere die letzteren noch überwiegen.*)

Wenn wir bisher vorzugsweise von Gymnasien redeten, so ist es nicht unsere Meinung, dafs es bei Realgymnasien und Realschulen etc. anders sein solle. Vielmehr hat auch hier ein Realist, sei er Mathematiker oder Naturwissenschafter, seine wissenschaftliche und seine Lehrbefähigung zu einem Rektorate in einer Prüfung nachzuweisen; er hat zu zeigen, dafs er imstande sei die philologischen Lehrfächer bis zu einem hinreichenden Grade zu lehren und zu beurteilen, um so mehr, da leider der Erfahrung nach das „Sichgehen lassen" im Sprachlichen bei Mathematikern und Naturwissenschaftern häufiger anzutreffen ist, als man erwarten sollte und jeder Mangel an sprachlicher Bildung des Mathematikers oder Physikers als Überlegenheit des Philologen erscheint. Denn ein Mangel an sprachlicher Bildung des Realisten wird von andern weit eher und leichter erkannt, als beim Philologen der viel leichter zu verdeckende Mangel an realistischer (mathematisch-naturwissenschaftlicher) Bildung. Es würde sich daher sehr empfehlen, wenn Mathematiker und Physiker mit ihrem Hauptfach immer noch wenigstens eine Sprache (am besten eine neuere) als Nebenfach verbänden.

Dafs aus so herangebildeten Rektoren die Schulräte und aus diesen die Oberschulräte und Referenten für die Unterrichtsministerien auszuwählen sind, versteht sich von selbst und ist ja auch jetzt schon üblich. Doch sollte hierin wie in Österreich

*) Ganz so, wie bei der Wahl eines Klassenobersten (primus). Der ist zu wählen, bei dem die Zensuren in Leistungen und sittl. Verhalten ein Maximum bilden, so aber, dafs das sittl. Verhalten ausschlaggebend ist.

Zweiteilung eintreten, d. h. in jeder Schulbehörde ein Rat die humanistischen, ein anderer die realistischen Lehrfächer vertreten.*)

Einrichtungen, wie sie im Vorstehenden angegeben sind, könnten der Schule nur zum Heile gereichen, indem sie dieselbe vor Einseitigkeit bewahren würden. Zustände, wie die beklagten, könnten durch sie verhütet werden und darum halten wir solche Einrichtungen für notwendig.

II.

Ist die Einheitsschule möglich?

Diese Frage, aufs neue angeregt durch den verflossene Ostern in Halle tagenden Einheitsschulverein, über dessen Verhandlungen dieses Heft einen kurzen Bericht enthält, haben wir bereits in ds. Z. im Jahre 1879 in dem Artikel „Zur Reform des mathematischen und naturwissenschaflichen Gymnasialunterrichts in Preufsen" (Art. III. Jahrg. X, 401 u. f.) zu beantworten gesucht. Es sei daher gestattet, eine Stelle jenes Artikels mit einer Abänderung hier zu wiederholen:

Die Einheitsschule ist nur möglich, wenn die Lehrgegenstände der beiden Hauptgruppen, der sprachlich-geschichtlichen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen gerecht, d. h. gleichmäfsig verteilt sind. Das Verhältnis der wöchentlichen Stundenzahl der ersten zur Stundenzahl der zweiten Gruppe, welches bislang $4:1 \left(= 1:\frac{1}{4}\right)$ oder höchstens $3:1 \left(= 1:\frac{1}{3}\right)$ war,**) mufs in das Verhältnis $2:2$ ($= 1:1$) übergehen oder demselben wenigstens sich sehr nähern. Das ungeheure Übergewicht der Sprachstunden mufs fallen. Aber auch innerhalb jeder Gruppe mufs gerechte Verteilung sein. Sie ist nicht, wenn im Sprachgebiet die alten (toten) Sprachen vorherrschen. Um dies weiter auszuführen, müssen wir vorerst einen, unserer Überzeugung nach durch die Erfahrung bestätigten, Grundsatz aufstellen: „zwei fremde Sprachen neben der Mutter-

*) In Sachsen z. B. ist seit dem Abgange Schlömilchs nur ein Vertreter der sogen. „humanistischen" Lehrfächer f. h. Sch. im U.-Ministerium. Derselbe beaufsichtigt auch die Realgymnasien und Realschulen.

**) S. ds. Z. VII, 443—446, bes. 446.

sprache sind zur grammatischen Schulung hinreichend, sofern man sie nur so auswählt, dafs sie einander in ihren Wirkungen ergänzen. Mehr als zwei Sprachen aber zugleich und gründlich zu erlernen, ist für den jugendlichen Geist schädlich.*) Giebt man dies zu, so fragt es sich nur noch: welche zwei Sprachen sind hier auszuwählen? Und nach welchem Prinzip soll die Wahl geschehen? Da man nun jedenfalls dem Prinzip der Mannichfaltigkeit respektive Allseitigkeit, oder, wie man es gern nennt, 'harmonischen Ausbildung', möglichst Rechnung tragen mufs, so dürfte doch mindestens eine alte (tote) und, um auch die modernen Bildungselemente zu berücksichtigen, eine neue Sprache auszuwählen sein. Von den beiden alten Sprachen mufs aber die Wahl auf diejenige fallen, welche die

*) Streng genommen sind aber selbst zwei fremde Sprachen noch zu viel. Denn — das wird sich doch jeder, der ehrlich gegen sich selbst sein will und sich keiner Selbsttäuschung hingiebt, zugestehen müssen, dafs schon die Erlernung nur einer fremden Sprache, zumal neben der Betreibung von Wissenschaften und der Pflege der Muttersprache, seine ganze Zeit und Kraft in Anspruch nimmt. Es ist uns daher unfafsbar, wie der Einheitsschulverein in seinem Programm sagen kann: „Dieselbe (näml. die Verschmelzung der beiden Schulgattungen G. u. R.) scheint ihm mit Beibehaltung des **Griechischen** und **Englischen**, ohne Vermehrung der Gesamtzahl der Lehrstunden und ohne Überanstrengung der Schüler möglich.“ Die nun dort angegebenen Bedingungen dieser Möglichkeit verstehen sich aber für jede Schule von selbst und sind doch kein Monopol der Einheitsschule! Der Einheitsschul-V. will also vier und mit dem Deutschen sogar fünf Sprachen nebeneinander betrieben wissen! Das ist denn doch ein starkes Verlangen! Nach unserer Ansicht sind zwei fr. Sprachen das äufserste Mafs, bis zu dem man noch gehen darf, wenn man Erfolge erwartet. Und wenn man die ganze französische Grammatik fleifsig durchstudiert, viel übersetzt und viel gelesen hat, kann man doch noch nicht unter Franzosen französisch verstehen und sprechen. Erst durch einen mehrjährigen Aufenthalt und Verkehr mitten im fremden Volke erlangt man eine leidliche Sprachfertigkeit. Die schwierigeren Feinheiten der fremden Sprache aber erlangen wir selbst bei einem dauernden Aufenhalte im Volke niemals ganz. Vollends bei einer toten Sprache, wo die Möglichkeit der Prüfung im lebenden Volke wegfällt! Wie laut würde vielleicht heute der wiederauferstandene römische Advokat Cicero lachen über einen auf sein klassisches Latein (vielleicht nicht mit Unrecht) stolzen Gymnasialrektor! Welche Aussprache und welche Betonung! Juvenal dürfte am Ende dazu ausrufen: *Difficile est satiram non scribere!* —

grammatische Durchbildung des Schülers am meisten fördert. Da nun als solche die lateinische Sprache anerkannt, überdies auch bereits in beiden Schulgattungen eingeführt ist, so wäre unbedingt das Latein zu wählen und zwar in einer Ausdehnung und Tiefe zu treiben, wie dies jetzt schon auf dem Gymnasium geschieht. Das Griechische dagegen mufs als obligatorischer Lehrgegenstand fallen, denn es ist nicht nur wegen seiner Formenfülle schwieriger zu erlernen, sondern wird auch bei einer geringern Stundenzahl (6 gegen 10) jetzt schon durchschnittlich weit ungenügender erlernt als das Latein.*) Ist es denn nicht auch besser, eine alte Sprache gründlich zu erlernen, als zwei ungründlich oder halb?

Fragt es sich nun, welche von den gangbarsten drei neuern fremden Sprachen (Englisch, Spanisch, Französisch) als obligatorische auszuwählen sei, so mufs (da Spanisch gar nicht in Rede kommen kann), die Wahl unbedingt auf das Englische fallen. Denn die englische Sprache ist nicht nur Weltsprache, weit mehr als das Französische,**) sondern die Engländer haben auch eine viel bedeutendere Litteratur. Ist nun bei den alten Sprachen die grammatische Bildungs-

*) Wer, wie Verf. dieses, eine Reihe von Reifeprüfungen an Gymnasien mit angehört und z. T. mit abgenommen hat, wird hiervon überzeugt sein. Die flotte (oder wenigstens leidliche) Übersetzung einer vorgelegten lateinischen Stelle sticht sehr ab von dem Radebrechen der griechischen Übersetzung. (Die Philologen sind übrigens selbst untereinander uneinig darüber, welcher von den beiden klassischen Sprachen der Vorrang bezw. die Oberherrschaft gebühre; denn eine Minorität ist für das Griechische). Überdies ist das Griechische nach Erfahrung und Ansicht des Verfassers wegen der Fülle seiner Formen, die mechanisch auswendig gelernt und eingeübt werden müssen, sogar schädlich, da es bei dem Alter, in dem es gewöhnlich begonnen wird, der Gedankenlosigkeit Vorschub leistet und den jugendlichen Geist unfähig macht zur Auffassung der lebenden Formen und der Gesetze der Natur und des Raumes. Den Einwurf aber, dafs nämlich die neuere Etymologie das Erlernen des Griechischen erleichtere, indem sie ähnlich der genetischen Methode der Geometrie wirke, muss Verf. zurückweisen. Davon sind wir — trotz Curtius u. a. — noch weit entfernt. Man sehe übrigens den Artikel „Das Urteil eines Amerikaners über das Griechische“ in d. 3. Abt. ds. Hefts.

**) Bekanntlich kommt bezüglich der Verbreitung der drei genannten Sprachen vor dem Französischen erst das Spanische.

fähigkeit Gesichtspunkt bei der Auswahl gewesen, so müssen wir hier, um dem Prinzip der Allseitigkeit und der Ergänzung zu genügen, die Litteratur des Volkes und die Verbreitung der Sprache als die Hauptgesichtspunkte bei der Auswahl festsetzen. So haben wir in der „Einheitsschule“ eine alte und eine neue (moderne), eine romanische und eine germanische Sprache, dazwischen als Bindeglied, oder Konzentrationspunkt die deutsche (Mutter-)Sprache, deren Pflege, wie auch schon vielfach gefordert worden ist, als Konzentrationslinie oder Axe durch die ganze Schulbildung hindurch ziehen mufs, weshalb auch der deutschen Grammatik und der Logik ein weit gröfserer Spielraum und Einflufs im Lehrplan zu gestatten ist.

Griechisch und Französisch aber würden forthin als fakultative Lehrgegenstände behandelt werden müssen, jenes namentlich (wie schon jetzt das Hebräische) für Philologen und Theologen, dieses für künftige Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften und für Neuphilologen. Die so wichtige griechische Litteratur aber werde im geschichtlichen und deutschen Unterrichte verarbeitet.“

Aus diesen Worten, die wir in der Hauptsache auch heute noch unterschreiben, geht hervor, dafs wir die Aufgebung zweier Sprachen, einer alten (des Griechischen) und ebenso einer neuern, (der französischen) als obligatorischer Lehrgegenstände, also die gleichzeitige Betreibung nur zweier fremden Sprachen als die *conditio sine qua non* der künftigen Einheitsschule betrachten. Das Griechische würde fürderhin die Rolle des Hebräischen auf dem Gymnasium spielen, dieses aber wäre an die Universität zu weisen, wohin es ohnehin gehört. Das Französische wäre zwar fakultativ, müfste aber doch etwas mehr Berücksichtigung finden, da mannichfache Gründe seine Kenntnis nötig machen. Der Mathematik und den Naturwissenschaften jedoch müfste mehr Spielraum gelassen werden. Es dürfte noch eine sehr bescheidene Forderung sein, wenn wir für jeden Schultag eine mathematische Lehrstunde fordern und darein auch die sphär. Trigonometrie mit den Anfangsgründen der Astronomie einschliefsen, indem wir weiter die Physik mit 2 w. Stunden schon von IIIa. beginnen lassen und für jede Klasse 2 Stunden w. Naturgeschichte festsetzen, einschliefslich

der Chemie. Auch für die Geographie wären je 2 Stunden zu bestimmen. Das geometrische Zeichnen aber, d. h. die darstellende Geometrie, wäre mindestens in dem Umfange zu betreiben, wie es schon jetzt auf den Realgymnasien geschieht.*)

Ein solches Gymnasium würde allerdings einem Realgymnasium weit ähnlicher sein, als einem sogen. Humangymnasium, während die Einheitsschulmänner ihr Zukunftsgymnasium dem letztern annähern wollen. Man wird uns zurufen: Du verlangst in der That viel, sehr viel! Du willst ein neues Gebäude von Grund aus aufführen! Ich antworte: ja, eine Radikalkur ist nötig! Hier können wir nicht quacksalbern. Ein bloses Heftpflaster genügt nicht! Ein tiefer Schnitt mufs in die Wunde gemacht und das wilde Fleisch herausgeschnitten werden! Wenn das Schiff, überlastet, nicht mehr forttreibt und zu sinken beginnt, dann ist es höchste Zeit, die entbehrliche Ladung über Bord zu werfen, um die unentbehrliche und die Mannschaft vor dem Untergange zu retten.

Werden die Altphilologen aber hierauf eingehen? Preisgeben des Griechischen? Niemals! Haben doch selbst die Einheitsschulmänner in ihrem Programm (§ 1) die „Beibehaltung des Griechischen“ als Hauptbedingung ganz besonders hervorgehoben. Wie viel mehr werden erst die Altphilologen arbeiten und kämpfen, um das sinkende Wrack noch über Wasser zu erhalten!**) Andererseits dürften aber die Realschulmänner auf diese Einheitsschule auch nicht eingehen; denn sie werden das „Französische“ als unentbehrlich hinstellen. Sonach hätte unsere Einheitsschule wenig Hoffnung verwirklicht zu werden. Aber auch jene der Einheitsschulmänner dürfte sie nicht haben. Denn die Herren „Humanisten“ werden doch nicht etwa glauben, dafs die Realisten wie blinde Mäuse in die gestellte Falle laufen,

*) Einen Stundenplan für diese Einheitsschule werden wir später aufstellen.

**) Als in den vierziger Jahren ds. Jahrh. das „Gespenst der Realschule“ aber erst in der Ferne erschien, erzählte man von einem sächs. Gymn.-Rektor die geharnischte Äufserung: er liefse sich eher „am Schulthor aufhängen“, als aus seinem Gymnasium eine Realschule machen. Diese Besorgnis wäre unnötig gewesen, wenn er geahnt hätte, dafs man vierzig Jahre später in Sachsen noch Realschulen in Gymnasien verwandeln würde (Wurzen u. a.).

die doch auf nichts anderes ausgeht, als durch eine neue, wenig verbesserte, Auflage des gegenwärtigen Gymnasiums das (jenen wenn nicht verhafste so doch unbequeme) Realgymnasium aus dem Wege zu räumen! O, diese Schlauheit ist nicht schlau genug, um von den Realisten nicht durchschaut zu werden! Wenn sich also nicht ein Alexander findet, der diesen unlösbaren gordischen Knoten mit dem Schwerte eines Machtspruchs durchhaut, so ist nicht abzusehen, wie dieses Rätsel gelöst werden soll. Am Ende ist das Philippi, bei dem wir uns dann wiedersehen, doch noch die Gabelschule Krummes. —

III.

Welche Prüfungen sind beizubehalten und welche zu beseitigen?

Man hat schon oft und auch neuerdings wieder*) der Abschaffung der öffentlichen Jahresprüfungen der einzelnen Klassen, sowohl in niedern als auch in höhern Schulen, das Wort geredet. Uns erscheint dieses Verlangen unberechtigt und unklug. Die öffentlichen Jahresprüfungen vor der Schulbehörde, dem Lehrerkollegium und dem Publikum bieten die einzige Gelegenheit im Schuljahr für das letztere d. h. für die Angehörigen der Schüler und für Freunde der Schule, von dem innern Leben derselben d. i. der Thätigkeit der Lernenden und Lehrenden, ihrer Lehrart und auch von manchem anderen, z. B. den innern Einrichtungen und Lehrmitteln der Schule, durch eigne Anschauung und Anhörung Kenntnis zu erlangen. Der Einwurf, der sich zugleich zu einem Vorwurf zuspitzt, es werde hier dem Publikum nur „Sand in die Augen gestreut“ und eine „Schaustellung“ geboten, mag wohl durch manche Vorgänge, besonders in Privatschulen begründet sein; aber auch hier gilt: *abusus non tollit usum;* dieser Mifsbrauch läfst sich leicht verhindern: man verfahre wie bei der Reifeprüfung. Den Schülern bleibe der gewählte Abschnitt des Prüfungsgegenstandes völlig unbekannt, der Lehrer aber erhalte das Thema erst am Abend vor dem Prüfungstage oder — noch strenger — zwei Stunden vor der Prüfung in versiegeltem Kouvert von der Schulbehörde. Für die Mitglieder des Lehrkörpers ist diese Jahresprüfung fast

*) Z. B. auf der jüngsten allgem. d. Lehrerversammlung in Gotha.

die einzige Gelegenheit im Schuljahr, die Methode ihrer Kollegen kennen zu lernen. Zwar ist eine Prüfungsstunde keine Unterrichtsstunde, aber auch beim Prüfen (Examinieren), wenn es nicht zu einem geistlosen „Abfragen" herabsinkt, kann der Lehrer seine Methode durchblicken lassen; denn zu dem oft schon angeregten und gewifs sehr zweckmäfsigen, gegenseitigen Hospitieren kommt es doch aus äufsern und innern (psychologischen) Gründen sehr selten oder — gar nicht. Überhaupt ist eine öffentliche Schulprüfung zugleich eine Lehrprobe für den Lehrer, die er vor der Schulbehörde, vor seinen Kollegen und vor dem Publikum ablegen mufs, eine Art erneutes Examen, weniger über seine Kenntnisse, als über seine Kunst im Unterrichten und über die Kunst die Resultate seines Unterrichts und seiner Zucht den Zuhörern geschickt vorzuführen. Die Orts- oder Provinzial- (bezw. Landes-) Schulbehörde in der Person des Schulinspektors oder Schulrats kann zwar jeden Tag „inspizieren", aber sie wartet damit erfahrungsmäfsig meist so lange, bis eine besondere Veranlassung oder Notwendigkeit vorliegt. Diese Veranlassung ist gewöhnlich die Reifeprüfung (das Maturitäts-Examen) oder die Jahresprüfung.

Solch eine Jahresprüfung fordert naturgemäfs Lehrer wie Schüler auf zu einer innern Sammlung, zu einem prüfenden Rückblick auf das im Laufe des Schuljahres Gelehrte und Gelernte. Sie gewinnt dadurch etwas Weihevolles, ein ethisches Gepräge und kann, falls sie, wie es sich ja schickt, mit Gesang und Gebet begonnen und beschlossen wird, auch äufserlich etwas Weihevolles, Würdiges, ja sogar das Gepräge einer kirchlichen Feier an sich tragen.*)

Fällt dieses alles mit der Prüfung zugleich fort, so entbehrt das Schulleben eine edle Anregung und sinkt immermehr zur Prosa herab.**) Die Prüfung soll aber Vorläufer der Versetzung

*) In Österreich (Wien) fanden wir die Einrichtung, dafs an öffentlichen (katholischen) Schulen dem Beginn des Schuljahrs ein Gottesdienst in der Kirche (sogen. „Heiligengeistfeier") voranging und ein ebensolcher das Schuljahr beschlofs.

**) Dieser Zustand ist vergleichbar unserm jetzigen (sächsischen) Kirchengesang. Dieser hat seit Einführung der neuen Liturgie etwas Eintöniges und Prosaisches, weil die Choralzwischenspiele abgeschafft sind. Denn diese gaben dem Organisten noch Gelegenheit einen poetischen Hauch

(Translocation) sein, die den Schlufs des Schuljahrs bildet; diese aber ist, da sie in Erwartung des Kommenden in den Schülern ohnehin eine ernste und feierliche Stimmung erzeugt, unbedingt als die Hauptfeierlichkeit im ganzen Schuljahr zu betrachten. Überhaupt würde die Aufhebung der öffentlichen Jahresprüfung beinahe einer Abschliefsung der Schule nach aufsen gleichkommen und an dem Charakter der Öffentlichkeit viel einbüfsen. Die Schule würde in der Phantasie des Publikums die Erinnerung an die von dicken Mauern umgebenen Klöster des Mittelalters erwecken oder an die von Wällen und Gräben umgebenen Festungen erinnern.

In den Jahresprüfungen hat insbesondere der Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaft Gelegenheit sowohl in der Unterredung mit den Schülern, als auch durch die schriftlichen vorzulegenden Prüfungsarbeiten den Einflufs merken zu lassen, den seine Lehrfächer, trotz der ihnen zugewiesenen geringen Stundenzahl, auf die geistige Vorbildung der Schüler ausüben. Es ist dies bei der Kürze der mündlichen Prüfung freilich nicht leicht, ja es ist u. E. beinahe ein Kunststück. Es möchte die Aufgabe eines besonderen Artikels sein hierauf tiefer einzugehen, als es in diesem kurzen nur allgemeine Gesichtspunkte angebenden Aufsatze geschehen kann.

So viel dürfte aber ohnedies fest stehen, dafs ein geschickter Lehrer der Naturwissenschaften eine Prüfung z. B. in Physik weit anziehender gestalten kann, als ein Sprachlehrer eine Prüfungsstunde aus der griechischen Formenlehre; jene bewegt sich in der lebendigen Natur, diese in den Sprachformen eines toten Volkes. Ja, es kann unter Umständen selbst eine Stunde geometrischer Formenlehre anziehender sein, als die Durchsprechung einer Horazschen Ode oder eines Kapitels aus Thukydides.*) Auch eine geschickte, wenn auch sehr sparsame

über den Gesang zu verbreiten. Der Mifsbrauch, dafs manche der Orgelkünstler, die man nicht besser herangebildet hatte, hie und da profan wurden (sogen. „Schulmeisterzwirn"), hat leider den Gebrauch beseitigt.

*) Ja, unseres Erachtens ist die Beschäftigung mit einer so erhabenen Wissenschaft, wie die Astronomie ist, eine viel edlere und von gröfserer ethischer Wirkung, als die eingehende Beschäftigung mit den toten Römern, einem Volke, das an Herrsch- und Unterdrückungssucht, an roher Gewaltthätigkeit und Grausamkeit gegen besiegte Feinde,

Vorführung und Benutzung vorhandener Lehrmittel in dieser Prüfung (für die eine volle Stunde gewährt werden sollte) ist nicht, wie viele meinen, abzuweisen.

Diese Gelegenheiten würden beim Fortfall der Jahresprüfung dem Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaft entgehen, er könnte fortan seine Thätigkeit und sein Lehrgeschick nur innerhalb der Wände seines Lehrzimmers entfalten; daher liegt es im Interesse der Fachlehrer für Beibehaltung dieser Prüfungen mit aller Entschiedenheit einzutreten.

Nach dem Gesagten halten wir an der Ansicht fest: Die öffentlichen Jahresprüfungen sind in niedern wie in höhern Schulen beizubehalten.

Dagegen sind die Reifeprüfungen (Maturitäts-Examina) abzuschaffen mit Ausnahme jener für Fremde. Es fordert beinahe den Humor und Spott heraus, wenn ein Lehrkörper, welcher Schüler 6 bis 9 Jahre lang unterrichtet und erzogen hat, die Frage, ob dieselben denn nun endlich für das Studium an einer Hochschule reif seien, sich durch eine besondere Schlufsprüfung mufs beantworten lassen. Dies ist wohl bei Fremden berechtigt,*) bei den eigenen Schülern aber überflüssig.

Zudem hat die Erfahrung gelehrt, dafs häufig der Erfolg der Prüfung bei einem tüchtigen Schüler durch zufällige äufsere Einflüsse getrübt wurde und ganz anders sich gestaltete, als man erwartete und zu erwarten berechtigt war und umgekehrt: dafs ein minder tüchtiger Schüler ein unerwartet gutes Examen machte. Solche Fälle sind immer geeignet, ein Lehrerkollegium in peinliche Verlegenheit zu setzen, weil es genötigt oder wenigstens versucht ist, ein (vielleicht durch eine lange Reihe von Jahren befestigtes) sicheres Urteil über einen Schüler im letzten Augenblick wieder umzustofsen.

Man könnte einwenden, dafs die Abgangsprüfung der Be-

---

an Unmenschlichkeit und Unchristlichkeit (Sklaverei, Christenverfolgung) seinesgleichen in der Menschengeschichte sucht. In uns wenigstens hat die Beschäftigung mit römischer Geschichte, trotz der Lobeserhebungen der Altphilologen, als Rückstand doch nur einen Abscheu hinterlassen.

*) Ähnlich wie man in Preufsen sogen. „Kommissionsprüfungen für Lehrerinnen hat, d. s. Prüfungen für Fremde vor einer vom K.-Minister ernannten Kommission.

hörde wegen da sei, damit diese sich von der Reife der Schüler überzeuge und event. Ungerechtigkeiten verhindere. Aber die Aufsichtsbehörde hat ja das Fortschreiten und Vorrücken der Schüler Jahre lang schon mitbeobachtet und kontrolliert! Sie ist auch jederzeit in der Lage ungerechte Beurteilungen auf Beschwerden hin abzuändern. Nur in zweifelhaften Fällen hat für Einheimische die Reifeprüfung noch Berechtigung. Es ist daher zu bedauern, dafs eine sächsische höchst zweckmäfsige Einrichtung der 40er Jahre ds. Jh. nicht weiter Eingang gefunden hat, ja in Sachsen selbst — warum, ist uns bekannt — wieder aufgegeben worden ist. Darnach wurde den Gymnasial-Abiturienten die Prüfung erlassen in allen jenen Lehrfächern, in denen sie in den letzten drei Halbjahren (es waren damals noch halbjährliche Versetzungen und anderthalbjährige Kurse) mindestens die zweite Zensur erhalten hatten.*)

Soll nun aber dennoch und trotz alledem das Mat.-Examen beibehalten werden, so mufs es — wie auch schon oft verlangt worden ist — an der Universität abgelegt werden. Erlangt denn ein Bürgerschüler auf Grund seines Bürgerschulzeugnisses Aufnahme in's Gymnasium?**) Mufs er nicht erst eine Aufnahmeprüfung bestehen? Also sollte folgerichtig auch ein abgegangener Gymnasiast seine Aufnahmefähigkeit vor der höhern Lehranstalt, der Universität beziehentl. der polytechnischen Hochschule beweisen. Ob dies die Herren Universitäts-Professoren in ihrer Bequemlichkeit oder in ihrem süfsen Feriengenufs stören würde, kann hier nicht in Frage kommen. Denn voraussichtlich würden doch diese Aufnahmeprüfungen der Universität vor Beginn der „Vorlesungen“ abgehalten werden müssen***) und bis dahin müfsten auch die Aufnahme Suchenden noch Schüler bleiben, um bei einer event. Zurückweisung wieder zur Schule zurückkehren zu können. Diese Einrichtung hätte aber den nicht hoch

*) Verf. selbst ist deshalb bei seinem Abgange vom Gymnasium kraft dieser Einrichtung von der Prüfung in beinahe allen Lehrfächern dispensiert worden.

**) Unter „Gymnasium“ ist hier zugleich das Realgymnasium gemeint; überhaupt gilt das Gesagte für jede höhere Schule.

***) Sie könnten auch zu Beginn der Hochschulferien (im August) sein, doch würde alsdann das letzte Schulhalbjahr zu sehr verkürzt werden.

genug anzuschlagenden Vorteil, dafs alle Abiturienten eines Hochschulbezirks (einer Provinz, eines Landes) mit gleichem Mafsstabe, weil von derselben Kommission, gemessen würden, während jetzt, trotz Regulativ und beisitzendem „Königl. Kommissar“, Verschiedenheiten in den angelegten Beurteilungs-Mafsstäben der einzelnen Prüfungs-Kommissionen sich geltend machen müssen.*) Auch dürfte der Ausfall dieser Prüfungen eine wohlthätige Rückwirkung auf die Gymnasien äufsern.

Was also die Reifeprüfung betrifft, so sind (nach dem Vorausgehenden) zwei Fälle möglich: entweder fällt sie i. A. fort, oder sie bleibt und wird an der Hochschule abgenommen.

Soll sie fortfallen, dann müfsten so feste Normen für das Reifezeugnis geschaffen werden, dafs eine Vernachlässigung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer oder eine Agitation seitens der stets in der Majorität befindlichen philologischen Mitglieder des Lehrkörpers gegen die Mathematik als Hauptfach unmöglich wird. Gäbe z. B. die Durchschnittszensur (d. i. das arithmetische Mittel) der drei letzten Jahreskurse, also von Obersekunda ab, noch die Censur III, so wäre der Schüler in dem betr. Fache noch für reif zu erklären, natürlich mit Angabe dieser Zensur im Zeugnis. Gäbe die Durchschnittszensur dagegen 3b oder 4, so wäre ihm eine Nachprüfung aufzuerlegen und bestände er auch diese nicht, so wäre er schonungslos zurückzuweisen. Die sogen. „Kompensation“ gegen sprachliche Leistungen — eine überhaupt durch nichts zu rechtfertigende Einrichtung**) — sollte unzuläfsig sein. Dem

*) Im K. Sachsen z. B. sind ca. 16 Gymnasien und also ebensoviele Prüfungs-Kommissionen, während an der Universität nur eine sein dürfte, deren Mitglieder — zur Vermeidung von Ueberbürdung — ja abwechseln könnten. —

**) Unsere motivierte Ansicht hierüber sehe man in dem Bericht über die Bützower Lehrerversammlung 1878 in Bd. IX, 484 und in dem Art. „Zur Reform d. mathem. u. naturw. Gymn.-Unterr. in Preufsen“. X, 187, Anm. **). Die „Kompensation“ zwischen heterogenen Lehrfächern z. B. Griechisch und Mathematik macht ohngefähr denselben Eindruck, wie wenn man im Schuhmacherhandwerk einen Lehrling, der noch keine Stiefeln besohlen kann, zum Gesellen sprechen wollte, nur deshalb, weil er gute Stiefelschäfte macht. Sinn hat diese Einrichtung etwa nur innerhalb desselben Lehrgegenstandes; wenn z. B. in einer

Mathematiker sollte ein Veto zustehen. Dieses Verfahren würde auch die Schüler nötigen, schon von IIa ab fleifsig zu arbeiten.

Wird dagegen die Reifeprüfung — wie es die Konsequenz fordert — vor einer Hochschul-Prüfungskommission abgelegt, so giebt das den Mathematikern und Physikern der Hochschule die beste Gelegenheit, mit Rücksicht auf die von ihnen so oft geführten bittern Klagen über mangelhafte Vorbildung der angehenden Studenten, das Gewicht ihrer Fächer bei der Prüfung gebührend in die Wagschale zu werfen.

Mag nun aber die eine oder die andere Einrichtung getroffen werden, gleichviel: jede dürfte die wohlthätige Wirkung haben den gewaltigen (dominierenden) Einflufs der Gymnasialphilologen bei der Maturitätsprüfung zu brechen, die schon durch ihre Überzahl im Lehrerkollegium die wenigen Vertreter der exakten Lehrfächer nur zu leicht überstimmen.

IV.

Sind die sogen. Extemporalien in Mathematik und Naturwissenschaften abzuschaffen oder beizubehalten?

In Heft 12 des Jahrgangs XV der pädagogischen Zeitschrift „Central-Organ f. d. Interessen des Realschulwesens“ wird über einen Vortrag berichtet, den ein Hr. Dr. Hirsch im Berliner Realschulmännerverein (a. 10. III. 87) „Über Extemporalien“ gehalten hat. In demselben wurde diese Gattung von Schul- und Prüfungs-Arbeiten verworfen. Es heifst u. a. dort (S. 182): „Für die Schüler sind sie (die Extemporalien) in ihrem Übermafs und ihrer Überschätzung eine ewige Quelle der Unlust und Entmutigung. Die Überbürdung hat in ihnen ihren Grund. Dies ist auch seitens des Ministeriums und von den bedeutendsten medizinischen Sachverständigen anerkannt worden.“*) In der Diskussion wird dem zumeist zugestimmt. Doch scheint aus dem Bericht hervorzugehen, dafs man nur gegen die Übertreibung und die „dominierende“ Stellung an-

---

Sprache geringe Fertigkeit in der Lektüre durch vorzügliche grammatische Kenntnisse, oder in der Mathematik geringere Kenntnisse in Arithmetik durch vorzügliche geometrische ausgeglichen werden. —

*) Leider werden weder diese medizinischen Sachverständigen, noch auch die betreffende „Anerkennung“ des Ministeriums angeführt.

kämpfte. Dafs es auch in der Mathematik solche Übertreibung giebt, wissen die Leser ds. Ztschr. aus dem Artikel von Piper-Lemgo, der diese Arbeiten zum „Hauptfaktor des (mathematischen) Unterrichts“ gemacht wissen will (s. XIV, 464). Dafs aber in obigem Vortrage die mathematischen Extemporalien nicht gemeint sein können, scheint aus den Worten eines Vereinsmitglieds, des Dr. Schwalbe, hervorzugehen: „Mit den ganz unentbehrlichen Rechen-Extemporalien steht die Sache allerdings wesentlich anders.“

Wir haben bereits in einem frühern Artikel ds. Ztschr. Jahrgang I, S. 216 u. f. „Über schriftliche mathematische und naturwissenschaftliche Schülerarbeiten in höhern Lehranstalten“ uns am Schlusse (S. 225) auch über die Extemporalien ausgesprochen. Da jener erste Jahrgang nicht in den Händen aller Leser sein dürfte, so sei es gestattet, die betr. Stelle mit einigen Abänderungen hier zu wiederholen. Nachdem wir uns dort über Abfassung, Eigenart und Gebrauch mathematischer Lehrbücher ausgesprochen und als Schularbeiten die Ausarbeitung eines mit dem Leitfaden in organischer Verbindung stehenden Heftes und (gröfsere) Monatsarbeiten gefordert haben, sagen wir weiter:

„Die gröfsern Monatsarbeiten geben keine sichere Bürgschaft für die Selbständigkeit einer Schülerleistung und ebensowenig lassen sie die Schlagfertigkeit und Raschheit im Arbeiten erkennen. Beide Zwecke werden erreicht durch 3) die Extemporalien. Diese sind Wiederholungsaufgaben, welche in der Lehrstunde unter der Aufsicht des Lehrers in ein besonderes Heft gefertigt, am Schlusse der Stunde sofort abgeliefert, und in der nächsten Stunde, korrigiert und zensiert, zurückgegeben werden. Schon die Kürze der Zeit gebietet, sie leichter zu stellen, als die monatlichen Arbeiten. Sie werden immer nach Vollendung eines Abschnittes niedergeschrieben, damit der Schüler genötigt werde, den ganzen Abschnitt im Zusammenhange nochmals zu wiederholen und seine Kenntnisse darin darzulegen. Sie zeigen auch, welche Schüler rasch, welche langsam arbeiten. Die vorgelegten Aufgaben und Fragen sind nach der Natur des Gegenstandes verschieden: Definitionen, Berechnungen, leichte Gleichungen, Konstruktionsbeschreibungen

mit Skizze, Beschreibungen von Versuchen, Erklärungen physikalischer Vorgänge, in der Geographie: Angabe über Lage, Gröfse, Grenzen u. drgl. m. Zweckmäfsig ist es, die Fragen kurz und sehr bestimmt zu stellen und zu vermeiden, dafs in einer Frage mehrere zugleich enthalten sind. Ich lasse nach gethaner Frage diese und die Antwort verschmelzen, falls sie nicht in der Lösung einer mathematischen Aufgabe besteht. So hat der Schüler weniger zu schreiben und zugleich eine Übung im Stilisieren. Diese Arbeiten erfordern keine Zeit ausserhalb der Lehrstunden mit Ausnahme etwa der Präparation, falls die Zeit des Extemporale bekannt gemacht wird. Geschieht dies, — und es soll ja ohnehin immer nach Vollendung eines Abschnitts Extemporale sein —, so präparieren sich die Schüler und mancher, der sonst nicht fleifsig ist, liefert doch eine gute Arbeit. Es empfiehlt sich daher zur richtigen Erkenntnis des stetigen Fleifses und um denselben so zu sagen im Flufse zu erhalten, bisweilen diese Extemporalia ganz unverhofft, gewissermafsen extemporiert zu geben. Zu diesem Zwecke sammle ich die Extemporalienhefte nach jeder Korrektur wieder ein und bringe sie, wenn ich unangemeldet Extemporale halten will, in die Klasse mit. So kommt diese Übung „wie ein Blitz aus heiterm Himmel" und der Schüler ist genötigt, seine Repetition anhaltend fortzusetzen, sie gewissermafsen stetig zu machen. Diese Art der Arbeiten haben den nicht hoch genug zu schätzenden Vorteil, dafs bei strenger Aufsicht und nicht zu engen Sitzplätzen jeder Betrug abgeschnitten ist und man die wahren Leistungen eines Schülers erfährt."*)

Diesen vor 17 Jahren geschriebenen Worten haben wir heute wenig hinzuzusetzen. Wir wüfsten auch nicht, wie hieraus „Überbürdung" entstehen sollte. Wenn man sich aber nach der „Unlust" und „Entmutigung" der Schüler richten wollte, was hätte man da nicht schon alles aus dem Lehrplane streichen müssen. Das Barometer der Schülerlaunen ist sehr schwankend und ein schlechter Grundpfeiler für den Lehrplan. Das Extemporale ist gewifs das sicherste Mittel, sich über das jeweilige Wissen und Können der Schüler zu unterrichten und die gefertigten Arbeiten sind zugleich Dokumente, durch welche der

*) Ich lasse übrigens alle Hefte und Lehrbücher vor Beginn des Extemporale sammeln und bei Seite legen.

Lehrer der Aufsichtsbehörde und den Eltern gegenüber sein Urteil rechtfertigen kann. Eine Hauptaufgabe des Lehrers bei dieser Arbeit ist: das Abschreiben, überhaupt die Benutzung fremder Hilfe zu verhindern. Denn hierin sind ja die Schüler überaus listig und erfinderisch, ja sogar, wie Vorkommnisse bei den Abiturientenprüfungen in einer preufsischen Stadt vor wenigen Jahren bewiesen haben, raffiniert. Deshalb ist für das Extemporaleschreiben immer ein gröfseres Klassenzimmer, nötigenfalls die Aula zu verwenden, um die Schüler weit genug auseinandersetzen zu können. Alle Hilfsmittel (Lehrbücher, Hefte etc.) sind vor der Stunde zu entfernen, besser noch ist es, das Mitbringen derselben zu verbieten. Der Schüler hat lediglich zu zeigen, was er „im Kopfe" hat und dies ist ja der Zweck und zugleich der Vorzug des Extemporale vor andern Arbeiten.

Man hat behauptet, diese Arbeiten seien dem langsam und bedächtig arbeitenden Schüler ungünstig und sie führten deshalb zu einer falschen Beurteilung. Dagegen ist zu erwidern, dafs diese Nachteile ausgeglichen werden durch die längeren (monatlichen) Hausarbeiten, bei denen der langsamer arbeitende Schüler Zeit hat nachzudenken, die aber freilich den Mifsbrauch fremder Hilfe nicht verhindern.

Am Ende des Jahres ist aus den Zensuren für beide Arten von Arbeiten das arithm. Mittel zu nehmen und dieses kombiniert mit dem Mittel aus den Zensuren für den Klassenunterricht giebt die Hauptzensur. Durch dieses Verfahren wird es möglich die — um es mathematisch-physikalisch auszudrücken — unvermeidlichen psychologischen Beobachtungsfehler des Lehrers zu eliminieren oder wenigstens auf das geringste Mafs zurückzuführen. Es müfste doch merkwürdig zugehen, wenn bei so gewissenhaftem Verfahren nicht das Richtige getroffen würde.

Wie diese Arbeiten, mafsvoll angewendet, für den sprachlichen Unterricht nicht mehr anwendbar sein und deshalb beseitigt werden sollen, ist uns unverständlich. Denn — *abusus non tollit usum!* Doch das müssen die Sprachlehrer ja besser verstehen und sie werden hoffentlich nicht „das Kind mit dem Bade ausschütten." Für Mathematik und Naturwissenschaften (einschliefslich der Geographie) sind sie u. E. unbedingt beizubehalten.

Nachschrift.

Zwei neuere Aufsätze, die erst nach Abfassung und Drucklegung der vier vorausgehenden Artikel in unsere Hände gelangten, veranlassen uns zu folgender Nachschrift:

Zu der in Nr. I angeführten längeren Stelle aus dem Ellendtschen Programme sowie zu ähnlichen, den Wert der Mathematik verkennenden Äufserungen, vergleiche man die neueste Schrift von Prof. Schellbach; „die Zukunft der Mathematik an unsern Gymnasien“ 34 S. (Berlin 1887, Reimer). Einen ebenso schätzbaren Beitrag zur Darlegung des Bildungswertes der Mathematik und der Naturwissenschaften giebt der gehaltvolle Aufsatz: „Über Genauigkeit, ein Beitrag zur Pädagogik“ in den (ebenda erschienenen) Vorträgen und Abhandlungen des Berliner Sternwartendirektors Dr. Förster (2. Folge, S. 337 u. f.). Schellbach beginnt seine Rede, die wie ein begeisterter Hymnus auf die Mathematik erklingt, mit den Worten: „Wie lange noch sollen Mathematik und Naturwissenschaft als ein Lappen von einem neuen Kleide auf dem alten Kleide der Gymnasien dienen? Verkannt und verachtet aus Unkenntnis und Überhebung führten sie hier von jeher und noch heute ein kümmerliches Dasein!“ Sch. legt sodann den Bildungsgehalt und Bildungswert der Mathematik im Gegensatz zu den alten Sprachen in wahrhaft klassischer Weise dar und schliefst mit den Worten: „Jetzt, wo alle bildungsfähigen Nationen der Erde bei uns Licht und Einsicht suchen, sollen sie vielleicht auch durch die enge Pforte des Hellenischen Lebens zu uns eingehen? Kein Volk würde diesen Weg antreten, um das zu finden, was es sucht, und wir müssen uns über ihn erheben, um nicht im Fluge gehemmt zu werden.“ — Förster aber schliefst seinen Aufsatz wie folgt: „Willensstärke allein ohne den Lebensnerv der Wahrhaftigkeit und der Gerechtigkeit ist hohl und hinfällig. Möge Deutschland davor behütet werden, dafs es nicht im Vollgefühl der gegenwärtigen Kraft einen Verfall seiner Pädagogik und dadurch eine schwere Erkrankung jenes Lebensnervs erfahre.“ —

Kleinere Mitteilungen

Über die dritte Fundamentalaufgabe der ebenen Trigonometrie.

Von Friedrich Meyer, Gymn.-Oberlehrer in Halle.

Denjenigen meiner Fachgenossen, welche es sich infolge der Rücksichtnahme auf schwächere Schüler angelegen sein lassen, analytisch-trigonometrische Entwickelungen auch planimetrisch zu erhärten, werden vielleicht die folgenden Zeilen nicht unwillkommen sein. Eine Beweisführung wird in der Trigonometrie planimetrisch genannt, wenn nur die Definitionen der goniometrischen Funktionen vorausgesetzt werden. Nachdem ich in früheren Heften dieser Zeitschrift das fünfte Grundproblem (f, a, α) und die wichtige Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$ besprochen habe*), wende ich mich jetzt zu den Formeln, welche die Aufgabe lösen: ein Dreieck aus den drei Seiten a, b, c zu berechnen. Es geschieht dies mit Hilfe der „Halbwinkelsätze“: $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, etc. Gewöhnlich wird $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}$, wo $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ und s der halbe Umfang ist, allen übrigen Formeln vorgezogen. Es versteht sich von selbst, dafs die gefällige Ableitung der Halbwinkelsätze aus dem Cosinussatze $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ den ersten Platz behaupten mufs: keinem Schüler darf dieselbe erlassen bleiben. Nun zur Sache!

Lehrsatz. In jedem Dreieck ist das Rechteck zweier Seiten gleich dem Rechteck aus den Abständen ihres gemeinsamen Eckpunktes vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und dem Mittelpunkt des der dritten Seite angeschriebenen Berührungskreises; oder auch gleich dem Rechteck aus den Abständen des gemeinschaftlichen Eckpunktes von den Mittelpunkten der den beiden Seiten angeschriebenen Berührungskreise.

---

*) S. XVII, 507 und XVIII_2, 108. D. Red.

Beweis. Wir begründen nur den ersten Teil, weil der zweite ganz analog folgt. Dem Dreieck ABC sei der Kreis (O) eingeschrieben und der Seite BC der Kreis (M) angeschrieben; von O und M werden auf AB die Lote OD und ME gefällt und O mit C wie B mit M verbunden. Man erkennt mühelos die Ähnlichkeit der Dreiecke AOC und ABM, weil $\widehat{OAC} = \widehat{BAM} = \frac{1}{2}\alpha$ und $\widehat{AOC} = \widehat{ABM} = 90^0 + \frac{1}{2}\beta$ ist. Daher folgt: $AC : AO = AM : AB$. Das aber ist unser Satz.

Aus den Dreiecken ADO und AEM folgt: $AO = \frac{AD}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s-a}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$ und $AM = \frac{AE}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$. Die Substitution in die letzte Proportion ergiebt $b : \frac{s-a}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s}{\cos\frac{1}{2}\alpha} : c$, d. h. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$. Der zweite Teil des obigen Satzes führt ebenso behend auf $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BDO und BEM folgt umgehend: $\varrho \cdot \varrho_a = (s-b)(s-c)$, aus derjenigen von ADO und AEM dagegen $\varrho_a(s-a) = \varrho s$. Die Kombination beider Gleichungen liefert $\varrho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$. Da endlich im Dreieck ADO $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}$ ist, so schliefsen wir: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, demgemäfs $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$. Das aber sind alle Halbwinkelsätze.

Zum Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Prof. Dr. Lieber-Stettin und C. Müsebeck-Waren.

A. Auflösungen.

626. (Gestellt von Emmerich XVII$_7$, 525.) Unter welchen Winkeln müssen drei Strecken a, b, c, die im Punkte P zusammenstofsen, gegeneinander geneigt sein, wenn der Schwerpunkt des Systems in den Punkt P fällt?

1. Auflösung. Soll der Schwerpunkt der drei Strecken auf ihren gemeinsamen Punkt P fallen, so müssen sie in derselben Ebene liegen. $\sphericalangle(bc)$ werde mit α, $\sphericalangle(ca)$ mit β, $\sphericalangle(ab)$ mit γ bezeichnet. Der Schwerpunkt A der Strecke a ist deren Mittelpunkt, ebenso der Schwerpunkt der Strecke b der Mittelpunkt B derselben. Für den gemeinsamen Schwerpunkt D der beiden Geraden a und b auf AB hat man daher $AD : DB = b : a$ (1). Damit der Schwerpunkt der drei Strecken nach P fällt, mufs D in der Verlängerung von c liegen; mithin mufs sein $AD : \frac{a}{2} = \sin\beta : \sin ADP$ und $\frac{b}{2} : DB = \sin ADP : \sin\alpha$. Durch Multiplikation beider Proportionen und Berücksichtigung von (1) erhält man $b^2 : a^2 = \sin\beta : \sin\alpha$. Ebenso findet man $a^2 : c^2 = \sin\alpha : \sin\gamma$; $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a^2 : b^2 : c^2$. Nimmt man hierzu noch als dritte Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$, also $\sin\gamma = -\sin(\alpha + \beta)$, so findet man leicht

$$\cos\alpha = \frac{a^4 - b^4 - c^4}{2b^2c^2}, \quad \cos\beta = \frac{b^4 - c^4 - a^4}{2c^2a^2}, \quad \cos\gamma = \frac{c^4 - a^4 - b^4}{2a^2b^2}.$$

Bermann (Liegnitz). Drees (Oldenburg). Emmerich (Mülheim a. d. R.). Fuhrmann (Königsberg i. Pr.). Helm (Liegnitz). Hodum (Stafsfurt). v. Jettmar (Wien). Lengauer (München). Meinel (Fürth). Schlegel (Hagen). Schmidt (Spremberg). Sievers (Frankenberg i. S.) Simon (Berlin). Stegemann (Prenzlau). Stoll (Bensheim). Valta (München).

2. Auflösung. Liegt a fest und dreht sich b um den Punkt P, so beschreibt der Schwerpunkt B von b einen Kreis. Denkt man sich nun alle Punkte B mit A verbunden und auf diesen Geraden die bezüglichen Schwerpunkte D der beiden Strecken a und b nach dem Gesetz $AD : BD = b : a$ (1) konstruiert, so ist ein Ort für D der Kreis, der mit dem Kreise der B den Ähnlichkeitspunkt A hat.

Da dem Gewichte $a + b$ in D ein Gewicht c in dem Schwerpunkte C von c das Gleichgewicht halten soll, so mufs der Punkt D der Gleichung $a + b : c = \frac{c}{2} : PD$ genügen, wodurch ein zweiter Ort für D, der Kreis um P mit PD bestimmt ist. Mithin ist D und mit Hülfe von (1) die Richtung von b, und da C auf der Verlängerung von DP über P hinaus liegen mufs, auch C bekannt.

Schmidt (Spremberg).

627. (Gestellt von Szimányi XVII₇, 525.) Die Wurzeln folgender Gleichungen zu berechnen:

a) $\dfrac{24x^6 - 68x^5 + 102x^4 - 109x^3 + 82x^2 - 36x + 8}{6x^5 - 11x^4 + 18x^3 - 7x^2 + 2x} = 4;$

b) $\dfrac{34x^2 - 358x + 828}{(x-8)(x-4)(x-3)} = \dfrac{34x^2 - 322x + 648}{(x-2)(x-6)(x-7)};$

c) $x + \sqrt[5]{a - x^5} = \dfrac{b}{(x\sqrt[5]{a - x^5})^2}.$

a) Auflösung. Als gröfstes gemeinsames Mafs von Zähler und Nenner findet man $6x^2 - 5x + 2$; mithin $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{12}$. Nach Abscheidung jenes Faktors gelangt man zu der Gleichung $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$, deren Wurzeln $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_{5,6} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4}$ sind.

Bermann. Emmerich. End (Würzburg). Meixel. v. Miorini (Bielitz). Schmidt. Sievers. Stoll. Szimányi (Trenchin).

b) 1. Auflösung. Man zerlege beide Seiten der Gleichung in Partialbrüche, so erhält man $\frac{7}{x-8} + \frac{15}{x-4} + \frac{12}{x-3} = \frac{7}{x-2} + \frac{15}{x-6} + \frac{12}{x-7}$. Fafst man die Glieder mit gleichen Zählern zusammen, so ergiebt sich

$$\frac{7}{x^2 - 10x + 16} - \frac{5}{x^2 - 10x + 24} - \frac{8}{x^2 - 10x + 21} = 0;$$

und wenn $x^2 - 10x + 21 = y$ gesetzt wird, so erhält man für y die Gleichung $3y^2 - 31y - 60 = 0$, woraus $y = 12$ und $-\frac{5}{3}$; mithin $x_1 = 9$; $x_2 = 1$; $x_{3,4} = \frac{15 \pm \sqrt{21}}{3}$.

Dieselben und Hodum.

2. Auflösung. Reduziert geht die Gleichung über in $3x^4 - 60x^3 + 395x^2 - 950x + 612 = 0$ oder $3(x^4 - 20x^3 + 100x^2) + 95(x^2 - 10x) + 612 = 0$ oder $3(x^2 - 10x)^2 + 95(x^2 - 10x) + 612 = 0$; mithin $x^2 - 10x = -9$ oder $-\frac{68}{3}$ u. s. w.

Lengauer.

3. Auflösung. Setzt man $x = y + 5$, so geht die Gleichung über in $\frac{(17y^2 - 56) - 9y}{(y^3 - 7y) - 6} = \frac{(17y^2 - 56) + 9y}{(y^3 - 7y) + 6}$, woraus $3y^4 - 55y^2 + 112 = 0$ folgt.

END. STOLL.

c) 1. Auflösung. Man setze $\sqrt[5]{a - x^5} = y$, so ist $x^5 + y^5 = a$ (1); ferner $x^2y^2(x + y) = b$ (2). Durch Division von (1) und (2) erhält man die Gleichung $\frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4}{x^2y^2} = \frac{a}{b}$, welche in bekannter Weise zu lösen ist.

EMMERICH. FUHRMANN. HODUM. v. MIORINI. SCHMIDT. SIEVERS. STOLL. SZIMÁNYI.

2. Auflösung. Wird die Formel $(a + b)^5 = a^5 + b^5 + 5(a + b)^3 ab - 5(a + b) a^2b^2$ auf die gegebene Gleichung angewendet, so ergiebt sich

$$a + 5\left(x + \sqrt[5]{a - x^5}\right)^3 x\sqrt[5]{a - x^5} - 5\left(x + \sqrt[5]{a - x^5}\right)\left(x\sqrt[5]{a - x^5}\right)^2 = \frac{b^5}{\left(x^5(a - x^5)\right)^2}$$ oder mit Benutzung der gegebenen Gleichung

$$a + \frac{5b^3}{x^5(a - x^5)} - 5b = \frac{b^5}{\left(x^5(a - x^5)\right)^2}$$ oder $(a - 5b)\left[x^5(a - x^5)\right]^2 + 5b^3\left[x^5(a - x^5)\right] - b^5 = 0$, woraus $x^5(a - x^5)$ zu berechnen ist.

BERMANN. BEYENS (Cadiz.) END. LENGAUER. MEINEL.

628. (Gestellt von Szimányi XVII$_7$, 525). x, y, z zu berechnen aus $x + y + z = a$ (1); $xy - xz - yz = b$ (2); $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c$ (3).

Auflösung. Man setze $x + y = s$ und $xy = p$, so gehen die drei Gleichungen über in $s + z = a$ (1); $p - sz = b$ (2) und $s^3 + z^3 - 3p(s + z) = c$ (3). Durch Elimination von s und z erhält man $p = \frac{a^3 + 3ab - c}{6a}$ und dann für s die Gleichung $s^2 - as + \frac{a^3 - 3ab - c}{6a} = 0$. Man kennt also $x + y$ und xy und findet dann z. Durch Elimination von s und p findet man für z die Gleichung $6az^2 - 6a^2z + a^3 - 3ab - c = 0$; also $z = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3 + 6ab + 2c}{12a}}$. Für s und p erhält man dann die vorher gefundenen Werte.

BERMANN. BEYENS. EMMERICH. END. FUHRMANN. HELM. HODUM. LENGAUER. MEINEL. v. MIORINI. NISETEO (Zara). SCHMIDT. SIMON. STEGEMANN. STOLL. SZIMÁNYI. VALTA.

629. (Gestellt von Sporer XVII$_7$, 525.) Haben α, β, γ, irgend welche Werte und ist $C_0 = 1$; $C_1 = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$; $C_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma + \cdots$; $C_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \cdots$; so ist stets

$$(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2)\cdots + (C_1 + C_3 + C_5 + \cdots)^2 = (C_0 + C_2 + C_4 + \cdots)^2.$$

Auflösung. Es ist $(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)\cdots = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots$ und $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)\cdots = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots$;

durch Multiplikation ergiebt sich $(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)\cdots$
$=(C_0+C_1+C_2+C_3+\cdots)(C_0-C_1+C_2-C_3+\cdots)$
$=(C_0+C_2+\cdots)^2-(C_1+C_3+\cdots)^2.$

Bermann. Deses. Emmerich. Fuhrmann. Hodum. Lengauer. Meinel. v. Miorini. Schmidt. Sievers. Sporer (Weingarten). Stoll. Valta.

Von Beyens durch den Schlufs von n auf $n+1$ bewiesen.

630. (Gestellt von Haag XVII$_7$, 525.) a) Wieviel Würfel enthält ein Rhombendodekaeder, dessen Achse $2n$mal so grofs ist als eine der Würfelkanten? b) Wieviel Rhombendodekaeder enthält ein Würfel, dessen Kante $n$mal so grofs ist als die Achse der Rhombendodekaeder?

Auflösung. a) Die acht dreiflächigen Ecken des Rhombendodekaeders, welche den Würfelecken entsprechen, bestimmen einen Würfel, der sich in n^3 Würfelchen zerlegen läfst. Die den Seitenflächen dieses Würfels aufgesetzten Lamellen enthalten Würfelchen, deren Anzahl die Reihe $(n-2)^2+(n-4)^2+(n-6)^2+\cdots+16$ (oder 9) $+\,4$ (oder 1) $+\,0$ bilden, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Da die Differenzen zweier aufeinander folgender Glieder $(-4n+12)$; $(-4n+20)$; $(-4n+28)$ u. s. w. gleich 8 ist, so ist die Summe dieser aus $\frac{n}{2}$ Gliedern bestehenden Reihe

$$\frac{n}{2}(n-2)^2+\frac{n}{4}\left(\frac{n}{2}-1\right)(12-4n)+\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)8$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Die Anzahl der Würfelchen ist also $n^3+\frac{n(n-1)(n-2}{6}\cdot 6$ $=n(2n^2-3n+2)$. Für $n=\infty$ verschwinden $3n$ und 2 gegen $2n^2$ und es folgt der bekannte Satz, dafs das Dodekaeder doppelt so grofs ist wie der in dasselbe beschriebene Würfel.

b) Die Anzahl der Rhombendodekaeder ist ebenso grofs wie die Anzahl der Oktaeder, wobei die tetraedrischen Zwischenräume ausgefüllt werden; und man erhält $n(n^2+(n-1)^2)+(n-1)(n(n-1)+(n-1)n)=n(4n^2-6n+3)$. Haag (Rottweil).

631. (Gestellt von Emmerich XVII$_7$, 525.) Für beliebige Winkel a, b, c ist a) $\sin a\sin(b-c)\sin(b+c-a)+\sin b\sin(c-a)\sin(c+a-b)+\sin c\sin(a-b)\sin(a+b-c)=2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)$;

b) $\cos a\sin(b-c)\cos(b+c-a)+\cos b\sin(c-a)\cos(c+a-b)+\cos c\sin(a-b)\cos(a+b-c)=2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)$.

Beweis. a) Es ist 1) $\sin a\sin(b-c)\sin(b+c-a)+\sin b\sin(c-a)\sin(c+a-b)=$

$$\begin{vmatrix}\sin a\sin(b-c) & \sin(c+a-b)\\ \sin b\sin(a-c) & \sin(b+c-a)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} \sin a \sin (b-c) & \sin a \cos (b-c) - \cos a \sin (b-c) \\ \sin b \sin (a-c) & \sin b \cos (a-c) - \cos b \sin (a-c) \end{vmatrix} =$$

$$\sin a \sin b \begin{vmatrix} \sin (b-c) & \cos (b-c) \\ \sin (a-c) & \cos (a-c) \end{vmatrix}$$

$$- \sin (b-c) \sin (a-c) \begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix} =$$

$$\sin a \sin b \sin (b-a) + \sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a)$$

und 2) $\sin c \sin (a-b) \sin (a+b-c) + \sin a \sin b \sin (b-a) =$

$$\begin{vmatrix} \sin c \sin (a-b) & \sin (a-c+c) \sin (a-b) \\ \sin b & \sin (a+b-c) \end{vmatrix} =$$

$$\sin (a-b) \begin{vmatrix} \sin c & \sin (a-c) \cos c + \cos (a-c) \sin c \\ \sin b & \sin (a-c) \cos b + \cos (a-c) \sin b \end{vmatrix} =$$

$$\sin (a-b) \sin (a-c) \begin{vmatrix} \sin c & \cos c \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix} = \sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a).$$

Durch Addition von 1) und 2) erhält man das gesuchte Resultat.

b) Diese Formel wird aus der vorhergehenden dadurch hergeleitet, dafs man für a, b, c ihre Complemente setzt.

BERMANN. EMMERICH. FUHRMANN. HELM. HODUM. LENGAUER. MEIXEL. SCHMIDT. STEGEMANN. STOLL.

Ähnlich sind folgende beide Formeln zu beweisen:

1) $\cos a \sin (b-c) \sin (b+c-a) + \cos b \sin (c-a) \sin (c+a-b) + \cos c \sin (a-b) \sin (a+b-c) = 0$ und 2) $\sin a \sin (b-c) \cos (b+c-a) + \sin b \sin (c-a) \cos (c+a-b) + \sin c \sin (a-b) \cos (a+b-c) = 0$.

EMMERICH.

632. (Gestellt von Bermann XVII$_7$, 525.) Wie lautet die Bedingung für das wirkliche Vorhandensein der beiden Punkte P in der Ebene eines Dreiecks, für die $PA : PB : PC = m : n : p$ $(m < n < p)$ gegeben ist?

Auflösung. Die Halbierungslinien des Winkels BPC mögen BC in D und D', die des Winkels CPA mögen CA in E und E' und die des Winkels APB mögen AB in F und F' treffen. Dann gehen die Kreise mit den Mittelpunkten R, S, T über den Durchmessern DD', EE', FF' durch die beiden Punkte P und P'. Nun ist $CD' = \frac{ap}{p-n}$, $CD = \frac{ap}{p+n}$, $BD' = \frac{an}{p-n}$, also $DD' = \frac{2\,anp}{p^2-n^2}$ und $DR = r_a = \frac{anp}{p^2-n^2}$; ferner $BF' = \frac{cn}{n-m}$, $BF = \frac{cn}{n+m}$, also $FF' = \frac{2\,cmn}{n^2-m^2}$ und $FT = r_c = \frac{cmn}{n^2-m^2}$. Hierdurch findet man $BR = BD' - r_a = \frac{an^2}{p^2-n^2}$, $BT = BF' - r_c = \frac{cn^2}{n^2-m^2}$.

Damit sich die beiden Kreise R und T schneiden, mufs $RT < r_a + r_c$ sein, also $BR^2 + BT^2 + 2\,BR \cdot BT \cos\beta < (r_a + r_c)^2$, mithin

$$\frac{a^2n^4}{(p^2-n^2)^2} + \frac{c^2n^4}{(n^2-m^2)^2} + \frac{2\,acn^4\cos\beta}{(p^2-n^2)(n^2-m^2)} < \left(\frac{anp}{p^2-n^2} + \frac{cmn}{n^2-m^2}\right)^2.$$

Setzt man $2\,ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$, so erhält man nach einigen Reduktionen $am < bn + cp$, d. h. am, bn, cp müssen Seiten eines Dreiecks sein.

BERMANN. EMMERICH. FUHRMANN. LENGAUER. MEINEL. SCHMIDT. STEGEMANN. STOLL.

633. (Gestellt von End XVII$_7$, 525.) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a + b + c = 2s$, $\sphericalangle\,\alpha$ und der Mittellinie t_a (kurz t).

1. Analysis. Aus den drei Gleichungen $2s = a + b + c$ (1) $b^2 + c^2 = 2t^2 + \frac{a^2}{2}$ (2) und $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$ (3) ergiebt sich durch Elimination von b und c für a die Gleichung $a^2 - 4\frac{s\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}a = 4\left(t^2 - s\frac{s\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}\right)$ (4). Oder man stelle eine Gleichung für $b + c = 2x$ her, indem man in (2) und (3) durch Addition von $2\,bc$ das Quadrat ergänzt, dann aus beiden $2\,bc$ eliminiert und endlich a durch $2(s - x)$ ersetzt; man erhält dann $x^2 - 2s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha^2}{2}x = t^2 - s^2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha^2}{2}$ (5). Oder wenn $\beta - \gamma = \delta$ gesetzt wird, so ist $s^2 = 4r^2\cos\frac{\alpha^2}{2}\left(\cos\frac{\delta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$ und $t^2 = r^2(1 + 2\cos\delta\cos\alpha + \cos\alpha^2)$, also

$$\frac{s^2}{4t^2\cos\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{\cos\frac{\delta^2}{2} - 2\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha^2}{2}}{1 + \cos\alpha^2 + 2\cos\alpha\left(2\cos\frac{\delta^2}{2} - 1\right)};$$

und hieraus $\cos\frac{\delta^2}{2}\left(s^2\cos\alpha - t^2\cos\frac{\alpha^2}{2}\right) + 2\,t^2\cos\frac{\alpha^2}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}$ $= \sin\frac{\alpha^2}{2}\left(t^2\cos\frac{\alpha^2}{2} - s^2\sin\frac{\alpha^2}{2}\right)$ (6). Man kann somit zur Konstruktion noch eines Stückes eine der Gleichungen (4), (5) oder (6) benutzen und dann die weitere Konstruktion leicht ausführen.

END. FUHRMANN. HODUM. LENGAUER. MEINEL. NIESTEO. SCHMIDT. SIMON. VALTA.

Konstruktion von (5). Da $s\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha = \varrho_a$, so ist $x^2 - 2\varrho_a\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha + (\varrho_a + t)(\varrho_a - t) = 0$, wo ϱ_a der Radius des Ankreises an BC ist, sein Mittelpunkt sei m' und er berühre AB in E'. Zieht man den Durchmesser $E'm'Q$, ferner $QR \perp Am'$ (R auf AE'), so ist $E'R = 2\,\varrho_a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Trägt man ferner $t = m'T$ auf $m'E'$ ab, so ist $x^2 - E'Rx + TQ \cdot TE' = 0$. Ist $\varrho_a > t$, so sind beide Wurzeln positiv und zwar $x_1 + x_2 = E'R$, $x_1x_2 = TQ \cdot TE'$. Man kon-

struiert sie, indem man QR in U halbiert und mit UT um U einen Kreis schlägt, der $E'R$ in V trifft; dann sind $E'V$ und RV die Wurzeln. Trägt man nun $AS = E'V$ auf AE' ab, errichtet auf AS in S die Senkrechte, welche Am' in G trifft, und schlägt mit Gm' um G einen Kreis, so bestimmt dieser die Ecken B und C.

2. Analysis. Man setze $b + c = u$ und $bc = v$, dann ist $a^2 = u^2 - 4v\cos\frac{\alpha^2}{2}$ (1). In dem Dreieck, dessen Seiten $2t, b, c$ sind, ist $4t^2 = u^2 - 4v\sin\frac{\alpha^2}{2}$ (2). Durch Elimination von v aus (1) und (2) ergiebt sich $\frac{u^2 - 4t^2}{u^2 - a^2} = \frac{\sin\frac{\alpha^2}{2}}{\cos\frac{\alpha^2}{2}}$, also

$$\frac{u^2 - 4t^2}{4t^2 - a^2} = \frac{\sin\frac{\alpha^2}{2}}{\cos\frac{\alpha^2}{2} - \sin\frac{\alpha^2}{2}} \text{ (a) oder } \frac{u^2 - 4t^2}{a^2 - 4t^2} = \frac{\sin\frac{\alpha^2}{2}}{\sin\frac{\alpha^2}{2} - \cos\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Da ferner $u + a = 2s$ gegeben, so ist die Konstruktion nach Lieber und v. Lühmann, Geom. Konstr. Aufg. § 96 in folgender Weise auszuführen: Man zeichne $DE = 2s$ und beschreibe aus D und E Kreise mit $2t$. Ist nun $\alpha < 90^0$, so teile man die Strecke DE innerlich im Verhältnis $\sin\frac{\alpha^2}{2} : \cos\frac{\alpha^2}{2} - \sin\frac{\alpha^2}{2}$ und beschreibe um den Teilpunkt einen Kreis, der mit einem der beiden ersteren Kreise die Mittelsenkrechte von DE zur Potenzlinie hat. Dieser Kreis zerlegt DE in u und a. Ist $\alpha > 90^0$, so teile man DE äufserlich im Verhältnis $\sin\frac{\alpha^2}{2} : \sin\frac{\alpha^2}{2} - \cos\frac{\alpha^2}{2}$ und konstruiere um den Teilpunkt den Kreis, der mit den Kreisen um D und E die Potenzlinie gemeinsam hat.

Emmerich.

634. (Gestellt von Schlömilch XVII_7, 525.) In einer Ebene befinden sich drei unbegrenzte feste Gerade, deren Durchschnitte das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c bilden; in derselben Ebene liegt ein unbestimmter Punkt P, der von jenen Geraden die Abstände x, y, z hat. Wie mufs nun P gewählt werden, wenn das aus x, y, z konstruierte Dreieck dem Dreieck ABC ähnlich sein soll?

Auflösung. Innerhalb des Dreiecks giebt es sechs Punkte, welche der Aufgabe genügen und welche auf folgende Weise zu bestimmen sind:

P_1 durch $x:y:z = a:b:c$ P_4 durch $x:y:z = a:c:b$

P_2 „ $x:y:z = b:c:a$ P_5 „ $x:y:z = b:a:c$

P_3 „ $x:y:z = c:a:b$ P_6 „ $x:y:z = c:b:a$.

Die drei durch irgend einen dieser sechs Punkte P gehenden Ecktransversalen im Dreieck ABC seien AA', BB', CC'. Dann ist AA' $= \frac{CA' \sin\gamma}{\sin A'AC} = \frac{BA' \sin\beta}{\sin A'AB}$; mithin $\frac{A'C}{A'B} = \frac{b}{c} \cdot \frac{y}{z}$.

Für P_1 ist $\frac{y}{z} = \frac{b}{c}$, also $\frac{A'C}{A'B} = \frac{b^2}{c^2}$; daher sind AA', BB', CC' Gegenmittellinien (vgl. Lieber Progr. d. Friedr. Wilh. Realgymnasiums in Stettin 1886. § 25) und P_1 ist der Grebe'sche Punkt.

Für P_2 ist $\frac{y}{z} = \frac{c}{a}$, mithin $\frac{A'C}{A'B} = \frac{b}{a}$ und $A'C = \frac{ab}{a+b}$. Zur Konstruktion verlängere man CA über A hinaus um $AD = a$, verbinde D mit B und ziehe $AA' \parallel DB$.

Für P_3 ist $\frac{y}{z} = \frac{a}{b}$, mithin $\frac{A'C}{A'B} = \frac{a}{c}$ und $A'C = \frac{a^2}{a+c}$. Zur Konstruktion verlängere man BA über A um $AE = a$, verbinde E mit C und ziehe $AA' \parallel CE$.

Für P_4 ist $\frac{y}{z} = \frac{c}{b}$, also $\frac{A'C}{A'B} = 1$; mithin ist AA' Mittellinie und P_4 ist ein Punkt derselben. Ebenso liegen P_5 und P_6 resp. auf den von B und C ausgehenden Mittellinien. Die Konstruktion von P_4 ist am Schlufs der Auflösung angegeben.

Aufserhalb des Dreiecks liegen nun noch 18 Punkte, welche der Aufgabe genügen. Ist nämlich P einer der sechs vorher betrachteten Punkte, so bestimme man zu A, A', P den vierten harmonischen Punkt P', auf BB' den Punkt P'' und auf CC' den Punkt P'''. Dann geht $P'P''$ durch C, da die beiden harmonischen Büschel $C\,(AA'PP')$ und $C\,(BB'PP'')$ drei Strahlen gemeinsam haben, also auch den vierten. Ebenso geht $P''P'''$ durch A und $P'''P'$ durch B. Da ferner $B\,(AA'PP')$ ein harmonisches Büschel ist, so ist $\sin P'BA : \sin P'BA' = \sin PBA : \sin PBA' = z : x$; und da $C\,(AA'PP')$ harmonisch, so ist $\sin P'CA : \sin P'CA'$ $= \sin PCA : \sin PCA' = y : x$. Hieraus folgt, dafs P' denselben Bedingungen genügt wie P. Dasselbe gilt von P'' und P'''.

Ist P der Grebe'sche Punkt, also P_1, so ist P_1' Durchschnittspunkt der an den Umkreis von ABC in B und C gelegten Tangenten.

Ist P der Punkt P_4, so ist $P_4''\, P_4''' \parallel BC$ und $AP_4'' = AP_4'''$. Es ist in diesem Fall $AB' : CB' = bc : a^2$, mithin $AP_4'' = AP_4'''$ $= \frac{bc}{a}$. Hiernach lassen sich die Punkte P_4'' und P_4''' unabhängig von P_4 so konstruieren: Man verlängere BA um $AD = AC$, trage an AD in $D \measuredangle \gamma$ an, dessen freier Schenkel die durch A zu BC gezogene Parallele in P_4'' trifft. P_4 ist dann der Durchschnittspunkt von BP_4'' und AA'.

Bermann. Drees. Emmerich. Fuhrmann. Helm. Hodum. v. Jettmar. Lengauer. Meinel. Schlömilch. Schmidt. Sievers. Stegemann. Stoll. Valta.

635. 636. (Gestellt von Artzt XVII$_7$, 526.) Im $\triangle ABC$ schneiden sich die Ecktransversalen AA', BB', CC' in γ, β, α und

die Seiten BC, CA, AB so, dafs $\lambda = \frac{CB'}{AB'} = \frac{AC'}{BC'} = \frac{BA'}{CA'}$; E ist der Schwerpunkt von ABC, A'' liegt so auf AE, dafs $AE = EA''$ u. s. w.

635. a) Es ist $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot A + \cot B + \cot C$; speciell: $\cot A + \cot B + \cot C = \cot(180^0 - BEC) + \cot(180^0 - CEA) + \cot(180^0 - AEB)$.

b) $\cot B'BC + \cot C'CA + \cot(A'AB) = \frac{2+\lambda}{\lambda}(\cot A + \cot B + \cot C)$ und $\cot B'BA + \cot C'CB + \cot A'AC = (2\lambda + 1)(\cot A + \cot B + \cot C)$.

1. Beweis. a) Setzt man $\sphericalangle CAA' = A_1$; $\sphericalangle A'AB = A_2$; $\sphericalangle ABB' = B_1$ u. s. w., so ist $\alpha = B_2 + C_1$; $\beta = C_2 + A_1$; $\gamma = A_2 + B_1$: Da nun $b \sin A_1 : c \sin A_2 = 1 : \lambda$ oder $b \sin A_1 : c \sin(A - A_1) = 1 : \lambda$, so folgt $\cot A_1 = \frac{\lambda b + c \cos A}{c \sin A} = \frac{\lambda \sin B + \sin C \cos A}{\sin C \sin A}$; ebenso erhält man $\cot A_2 = \frac{\sin C + \lambda \sin B \cos A}{\lambda \sin B \sin A}$, $\cot B_1 = \frac{\lambda \sin C + \sin A \cos B}{\sin A \sin B}$, $\cot B_2 = \frac{\sin A + \lambda \sin C \cos B}{\lambda \sin C \sin B}$; $\cot C_1 = \frac{\lambda \sin A + \sin B \cos C}{\sin B \sin C}$; $\cot C_2 = \frac{\sin B + \lambda \sin A \cos C}{\lambda \sin A \sin C}$. Nun ist $\cot\alpha = \cot(B_2 + C_1) = \frac{\cot B_2 \cot C_1 - 1}{\cot B_2 + \cot C_1}$

$$= \frac{\sin A \sin B \cos C + \lambda(\sin A^2 - \sin B \sin C \cos C) + \lambda^2 \sin A \sin C \cos B}{(1 + \lambda + \lambda^2) \sin B \sin C \cos A};$$

$\cot\beta$ und $\cot\gamma$ erhält man durch Vertauschung von A mit B und C u. s. w. und zwar erhält man nach einigen Reduktionen $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} = \cot A + \cot B + \cot C$. Für $\lambda = 1$ werden die Winkel α, β, γ die Supplemente der Winkel BEC, CEA und AEB, wodurch der specielle Fall erledigt ist.

b) Bildet man die Summe der vorher erhaltenen Ausdrücke für $\cot A_1 + \cot B_1 + \cot C_1$, so ist diese gleich $\frac{(2\lambda + 1)(1 + \cos A \cos B \cos C)}{\sin A \sin B \sin C} = (2\lambda + 1)(\cot A + \cot B + \cot C)$. Vertauscht man λ mit $\frac{1}{\lambda}$, so erhält man $\cot A_2 + \cot B_2 + \cot C_2 = \frac{2+\lambda}{\lambda}(\cot A + \cot B + \cot C)$.

Artzt (Recklinghausen). Emmerich. Fuhrmann.

2. Beweis. a) Man zeige, dafs das aus den gegebenen Ecktransversalen t_a, t_b, t_c konstruierte Dreieck Δ_t dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ähnlich ist und zwar findet man $\frac{\alpha\beta}{t_c} = \frac{\beta\gamma}{t_a} = \frac{\gamma\alpha}{t_b} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$, so dafs $\frac{\Delta t}{\alpha\beta\gamma} = \left(\frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda^2 - 1}\right)^2$ oder mit Berücksichtigung des Wertes für $\alpha\beta\gamma$, der in Nr. 636 entwickelt wird, $\Delta_t = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\lambda + 1)^2}\Delta$. Da $\cot\alpha$

$+ \cot\beta + \cot\gamma = \dfrac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{4\Delta_t}$ und $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$, ferner $t_a^2 = \dfrac{(\lambda^2+\lambda)\,b^2 + (\lambda+1)\,c^2 - \lambda a^2}{(\lambda+1)^2}$, also $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \dfrac{(\lambda^2+\lambda+1)\,(a^2+b^2+c^2)}{(\lambda+1)^2}$, so wird $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot A + \cot B + \cot C$.

b) Es ist $\cot BB'C = \dfrac{a^2 + t_b^2 - B'C^2}{4\,B'BC}$. Da $B'C = \dfrac{\lambda b}{\lambda+1}$, $BB'C = \dfrac{\lambda\,\Delta}{\lambda+1}$ ist, so erhält man $\cot B'BC = \dfrac{(\lambda+1)^2a^2 + (\lambda+1)^2t_b^2 - \lambda^2b^2}{4\,\lambda\,(\lambda+1)\,\Delta}$ und analoge Ausdrücke für $\cot C'CA$ und $\cot A'AB$. Durch Summation der betreffenden Ausdrücke findet man die Richtigkeit der Behauptung.

Stegemann.

Anmerkung. Stellt man die Frage, wenn ist $\cot A_2 + \cot B_2 + \cot C_2 = 0$, so erhält man, da dieser Fall für $\lambda = -2$ oder $-\frac{1}{2}$ eintritt, den Satz: Wenn man die Seiten eines Dreiecks fortlaufend um sich selbst verlängert und die erhaltenen Endpunkte mit den bezüglichen Gegenecken verbindet, so haben die Winkel, die hierdurch an der Ecke so entstehen, dafs man zum äufseren Winkel noch den Dreieckswinkel hinzufügt, die Eigenschaft, dafs die Summe ihrer Cotangenten gleich Null ist, d. h. die Summe der Cotangenten der Winkel, welche die Mittellinien eines Dreiecks mit den betreffenden Seiten bilden, ist Null.

Fuhrmann.

636. α liegt auf der Ellipse um BCE mit dem Centrum A'' u. s. w. ABC gehört zur Schar $(\alpha\beta\gamma)$, E ist ihr Nulldreieck. $\alpha\beta\gamma = Max = 4\,ABC$, wenn $\beta\gamma \parallel BC$ u. s. w.

1. Beweis. Die Punkte A', B', C' bilden auf den Seiten ähnliche Punktreihen, also sind die Strahlen nach den betreffenden Punkten projektivische Strahlen und zwar in schiefer Lage. Die betreffenden Strahlen, welche von B und C ausgehen, erzeugen durch ihre Schnittpunkte einen Kegelschnitt, auf dem α liegen mufs, da BB' und CC' entsprechende Strahlen sind. Da ebenso Bb_0 und CC_0, wo die Mitten von BC, CA, AB resp. mit a_0, b_0, c_0 bezeichnet sind, entsprechende Strahlen sind, so geht der Kegelschnitt auch durch E; dem Strahl CB durch B entspricht BA, mithin ist BA Tangente an den Kegelschnitt und ebenso AC; B und C sind die Berührungspunkte. Der Kegelschnitt ist mithin bestimmt. Der Pol von BC ist A, mithin geht Aa_0 durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts. Ferner ist der eine Schnittpunkt des Kegelschnitts mit Aa_0 der Punkt E, der zweite der vierte harmonische zu E konjugierte in Bezug auf A und a_0, welchen man erhält, wenn man Aa_0 um sich selbst verlängert. Der Mittelpunkt des Kegelschnitts ist daher A'' u. s. w. wie im 2. Beweis.

Artzt. Fuhrmann.

(2. Beweis im nächsten Heft.)

B. Neue Aufgaben.

679. Eine homogene Halbkugel koncentrisch so auszubohren, dafs der Schwerpunkt der Schale in die Bohrfläche fällt.

Emmerich (Mülheim a. d. Ruhr).

680. Von den Spitzen zweier schiefen Ebenen L_1 und L_2 rollen zu gleicher Zeit zwei Kugeln ohne Anfangsgeschwindigkeit. Nach t_1 Sekunden kommt die eine Kugel am Fufse von L_1 und nach t_2 Sekunden die andere am Fufse von L_2 an. Wie grofs sind (abgesehen von den Bewegungshindernissen) die Längen von L_1 und L_2, wenn die Höhe von L_2 um h und die Horizontalprojektion von L_2 um d gröfser ist als von L_1?

Szimányi (Trenchin).

681. (Satz über den Brocard'schen Kreis.) Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der drei Parabeln in Nr. 625 (XVIII_3, 195) halbieren den Winkel HEZ und seinen Nebenwinkel. (H Mittelpunkt des Umkreises, Z der des Brocard'schen Kreises, E der Schwerpunkt).

Stoll (Bensheim).

682. In einem Dreieck ABC verlängere man die Höhen bis sie den Umkreis in A_1, B_1, C_1 schneiden; BC_1 und CB_1 mögen sich in M_a, CA_1 und AC_1 in M_b und AB_1 und BA_1 in M_c schneiden. Dann schneiden sich AM_a, BM_b, CM_c in einem Punkte F', welcher der Winkelgegenpunkt des Mittelpunktes F des Feuerbach'schen Kreises ist.

Fuhrmann (Königsberg i. Pr.).

683. A', B', C' seien die symmetrischen Punkte der Eckpunkte des Dreiecks ABC in Bezug auf den Mittelpunkt des Umkreises; sind ferner S_a, S_b, S_c die Seitenmitten von $\triangle ABC$, so sind die beiden Dreiecke $A'B'C'$ und $S_a S_b S_c$ perspektivisch; das Projektionscentrum ist der Höhenschnittpunkt von ABC, die Projektionsachse ist die unendlich ferne Gerade.

Bücking (Colmar i. E.).

684. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, wenn gegeben die Halbierungslinie $AE = w$ des Winkels A und die Abschnitte $AD = q$ und $BD = p$, in welche die Höhe CD die Seite $AB = c = p + q$ zerlegt.

Emmerich (Mülheim a. d. R.).

685. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Ecken A und B auf zwei Gegenseiten eines Quadrates gegeben sind, während die dritte Ecke C und der Höhenschnittpunkt D des Dreiecks auf den anderen Quadratseiten liegen.

Stoll (Weingarten).

686. Im $\triangle ABC$ seien w_a und w'_a die Halbierungslinien des Winkels α und seines Nebenwinkels, entsprechend w_b und w'_b, w_c und w'_c die der Winkel β und γ, und es sei $a < b < c$. Konstruiert man nun ein Dreieck, in welchem die Seiten w_a und w'_a den Winkel α einschliefsen, ebenso die Dreiecke aus w_b, w'_b, β und w_c, w'_c, γ und bezeichnet die Flächen derselben resp. mit S_a, S_b, S_c, so ist $\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_c} = \frac{1}{S_b}$.

Beyens (Cadix).

687. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem XOY sei auf der X-Achse $OC = r$ der Radius des zu teilenden Kreises und A derjenige Punkt, dessen Koordinaten $\frac{1}{2}r$ und $\frac{3}{4}r$ sind; aus dem Mittelpunkte O beschreibe man mit dem Halbmesser $OA = \frac{\sqrt{13}}{4}r$ einen Hülfskreis und konstruiere ferner diejenige gleichseitige Hyperbel, welche A zu einem der Hauptscheitel hat und deren Asymptoten OY und die im Abstande $OO' = \frac{1}{4}r$ parallel zu OX liegende Gerade $O'X'$ sind. Zwischen den positiven Seiten der x und y haben der Hülfskreis und die Hyperbel aufser A noch einen zweiten Punkt B gemein, dessen verlängerte Ordinate den ursprünglichen Kreis in D schneidet; es ist dann der Bogen $CD = \frac{1}{7} \cdot 2\pi r$. — Für diese Konstruktion soll der Beweis geliefert werden und aufserdem eine Untersuchung der Abscissen der beiden übrigen Durchschnitte des Hülfskreises mit der Hyperbel.

Schlömilch.

688. Gegeben sind die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Koordinaten der Ecken eines ebenen Vielecks $x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots . x_n, y_n$. Zu bestimmen die Koordinaten a) des Flächen-Schwerpunktes; b) des den Schwingungen des Vieleckes um beide Achsen gemeinsamen Schwingungspunktes.

Weinmeister (Tharandt).

689. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = P$ in ein Produkt zu verwandeln und anzugeben, wenn dies möglich ist.

Sievers (Frankenberg i. S.).

690. Wieviel wert (V) ist gegenwärtig bei einer jährlichen Verzinsung von $p\,\%$ eine jährlich vorauszahlbare Verbindungsrente von v Mark für zwei Personen, von denen die eine a Jahre, die andere $a + m$ Jahre alt ist, wenn diese Rente längstens $m + n$ Jahre lang zahlbar ist und im Durchschnitt jährlich $x\,\%$ Personen sterben?

Fleischhauer (Gotha).

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Auflösungen sind eingegangen von Adami 664. Bermann 667. 668. Emmerich 660—666. 668. 669. 671. 673—675. 677. 678. End 658. 661. 662. 671. Helm 654. 656. 657. 664. 666. Hodum 637—640. 642—646. 648. 651. 653. 654. 656. 657. 659. 661. 662. 664. 666—668. Klewe 664. Lengauer 654. 655. 658. 659. 661. 662. 664. 666—668. v. Miorini 671. 674. 675. Niseteo 656 (2). 661. 662. 664. (Schulze, Hamburg?) 656. Sievers 661. 662. Simon 660. Stammer 620 (2 Nachträge). 644—646. 649. 650. Stegemann 659. 662. 664—666. 668. Treumann 664. Wachter 644. 646. 656. 657. 664. 666.

Neue Aufgaben. Emmerich (5). Rulf (1). Sievers (5). Wachter (2). Weinmeister (2).

Litterarische Berichte.

A. Rezensionen.

STOLZ, Dr. OTTO, (ord. Professor an der Universität zu Innsbruck). **Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, nach den neueren Ansichten bearbeitet. Zweiter Teil:*) Arithmetik der komplexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen.** Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1886. VIII. 326 S.

Die vorliegende Schlufsabteilung des Stolzschen Werkes vervollständigt dasselbe in der Weise, dafs der abgehandelte Wissensstoff sich ungefähr dem Umfange nach mit der „Analysis des Endlichen" Kästners und mit der „Introductio" Eulers deckt. Die Erweiterung der früher gewonnenen Sätze für den Fall eines komplexen Argumentes und die umfassende Darstellung des Imaginären bilden allerdings einen Hauptbestandteil dieses zweiten Teiles, doch erfüllen sie denselben nicht so ausschliefslich, wie nach den Titelworten wohl anzunehmen wäre. Unsere Übersicht über den Inhalt der einzelnen Kapitel wird hierüber aufklären.

I. Abschnitt. Naturgemäfs enthält derselbe die formale Theorie des Ausdruckes $(a + bi)$, und zwar in dem allgemeinen Sinne von Weierstrafs. Als komplexe Zahl erscheint die Summe $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, wo e_1 und e_2 zwei willkürlich bestimmte Einheiten, α_1 und α_2 deren „Koordinaten" sind. Für die Addition und Subtraktion solcher Zahlen gelten die bekannten Regeln; hinsichtlich der Multiplikation ist zunächst zu fragen, ob das System einen „Modul" hat, d. h. ob eine Zahl e von der Bedingung existiert, dafs für jeden willkürlichen Wert von a das Produkt $ae = ea = a$ wird. Ist ein solcher vorhanden, so giebt es doch noch drei wesentlich verschiedene Zahlensysteme mit zwei Einheiten, bei welchen die Division als eindeutige Operation erscheint, und welche zugleich in dem Satze übereinstimmen: Sobald das Produkt zweier Zahlen gleich Null ist, mufs eine derselben selbst gleich Null sein. Man bezeichnet diese drei Systeme resp. als das elliptische, parabolische, hyperbolische; nur das erstgenannte ist so beschaffen, dafs es sich genau denselben

*) Die Besprechung des 1. Teils s. XVII, 205 u. f. D. Red.

Rechnungsregeln fügt, wie die Arithmetik der reellen Zahlen. Ist $e = 1$, so hat man es mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen zu thun. Im Anschlusse an Grafsmann wird sodann die allgemeine komplexe Zahl $a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ der Diskussion unterzogen, und es stellt sich heraus, dafs jedes mit mehr als zwei Einheiten konstruierte Zahlensystem in einzelnen Operationsgesetzen nicht mehr mit dem System des Komplexen (im gewöhnlichen Sinne) übereinstimmt. Der Hankelsche Beweis für diese von Gaufs aufgestellte Behauptung wird ebenfalls reproduziert; es wird ferner nach Dedekind gezeigt, dafs solche höhere komplexe Zahlen sich auch als Funktionen von Wurzeln höherer Gleichungen darstellen lassen. Durch diese Bemerkung fällt ein neues Streiflicht auf gewisse Algorithmen, deren Berechtigung man, weil bei ihrer Anwendung einzelne Regeln der Arithmetica universalis suspendiert werden müssen, hat bestreiten wollen. Selbst diese Gegner werden nunmehr der Hamiltonschen „Quaternion"

$$g = \xi_0 + \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 + \xi_3 i_3$$

die Anerkennung nicht mehr versagen, wenn ihnen dieselbe als Wurzel der Gleichung

$$g^3 - (3\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) g + 2\xi_0 (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = 0$$

entgegentritt. Man kann also für gewöhnliche Zwecke mit der Form $(a + bi)$ vollkommen ausreichen.

II. Abschnitt. Hier werden uns, als Anwendungen der vorher vorgetragenen Lehren über das Rechnen mit imaginären Zahlen, der Streckenkalkül von Möbius und der Aequipollenzenkalkül von Bellavitis vorgeführt. Es ergiebt sich, dafs die arithmetische Behandlung von Strecken die Lösung mancher Konstruktionsaufgabe ungemein erleichtert, wie dies für andere Fälle von V. Schlegel schon früher in dieser Zeitschrift angedeutet worden ist. Daran schliefst sich eine neue Darstellung der Goniometrie, für welche der „Richtungsfaktor" $(\cos\theta + i \sin\theta)$ als mafsgebend erkannt wird, und auch die Trigonometrie wird einheitlich aus einer sehr einfachen und augenfälligen Wahrheit abgeleitet. Bezeichnet $\dot{+}$ das Pluszeichen in der geometrischen Bedeutung im Gegensatze zum arithmetischen $+$, so sind die drei Seiten eines Dreiecks ersichtlich durch die Relation $AB \dot{+} BC \dot{+} CA = 0$ mit einander verknüpft; schreiben wir dies arithmetisch, so haben wir:

$$AB + BC \cos(AB, BC) + CA \cos(AB, BC) = 0.$$

Wie aber diese Fundamentalgleichung als rechnerische Basis der gesamten ebenen Trigonometrie verwertet werden kann, ist schon von verschiedenen Autoren, besonders hübsch von H. Pfaff, dargethan worden. Der geometrische Teil des zweiten Abschnittes schliefst ab mit einer ausführlichen Lehre von den Doppelverhältnissen. Doch reiht sich noch ein kurzer analytischer Exkurs an,

welcher feststellt, was man unter dem „Hauptwert“ einer — an und für sich $n$deutigen — $n$ten Wurzel zu verstehen habe.

III. Abschnitt. Generelle Theorie der Funktion $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, unter t eine reelle Veränderliche verstanden, mit geometrischen Anwendungen. Unter denselben heben wir die elegante Lösung des Ortsproblems hervor, den Kreis zu finden, der die Eigenschaft hat, dafs die von jedem seiner Punkte nach zwei festen Punkten gezogenen Strecken ein konstantes Verhältnis haben. Weiterhin folgen die Funktionen einer komplexen Variablen. Unter ihnen zeichnen sich die „eindeutigen, analytischen Funktionen“ von Weierstrass aus, deren Definition gegeben wird. Der Wert $x = \infty$ gilt für eine solche Funktion nicht als singulär, sowenig in der Ebene der endliche Punkt — bei der Funktionenlehre ist die Auffassung des geometrisch-unendlichen eine ganz andere als bei der projektivischen Geometrie — als singulär betrachtet wird. Nunmehr wird die Grenzwertrechnung auf die Funktionen komplexer Veränderlicher ausgedehnt, der Begriff der Stetigkeit und der Stetigkeitsunterbrechung wird näher präzisiert, und anhangsweise wird der Leser auch noch in das Wesen der isogonalen Verwandtschaft oder konformen Abbildung eingeführt.

IV. Abschnitt. Unter den neu gewonnenen Funktionen sind zunächst die rationalen die wichtigsten. Der Verfasser lehrt, mit ihnen zu rechnen, bestimmt ihre Ableitungen sowohl für eine Variable als auch für eine gröfsere Anzahl derselben und untersucht hierauf unter welchen Umständen zwei oder mehrere Funktionen einen gemeinsamen Teiler besitzen. Mit Hilfe der hier erzielten Ergebnisse über die Reduktibilität und Irreduktibilität von Funktionen ist ein verhältnismäfsig einfacher Beweis des Fundamentaltheorems der Algebra ermöglicht. Ein Anhang behandelt kurz die höheren arithmetischen Reihen und das Interpolieren, dessen Wert für die genaue Berechnung von Logarithmen besonders nachgewiesen wird.

V. Abschnitt. Derselbe entspricht völlig dem zehnten Abschnitte der ersten Abteilung, indem nur jetzt unendliche Reihen mit komplexen Gliedern in betracht gezogen werden. Der Verfasser macht selbst in der Vorrede darauf aufmerksam, dafs, wofern man sich nur den verschiedenen Sinn der Bezeichnung „Absoluter Betrag“ in jedem der beiden Fälle klar macht, die Darlegungen im ersten sich mit denjenigen im zweiten Teile vielfach decken müssen. Die Regeln für Konvergenz und Divergenz werden aufgestellt, und zwar mit Zurückweisung mancher an sich nahe liegender Annahmen, die sich jedoch nicht als durchaus stichhaltig erweisen. Auch die Zerlegung in Partialbrüche erscheint in teilweise neuer Beleuchtung. Unter denjenigen vom Verfasser systematisch behandelten Materien, die sachlich nicht gerade neu, jedoch noch niemals unter einem mehr didaktischen Gesichtspunkte aufgefafst sind, möchten wir insbesondere den „Doppelreihensatz von Weierstrass“ betonen, welcher u. a.

dazu dient, nachzuweisen, dafs analytische Ausdrücke als Funktionen von x vorkommen können, welche in getrennten Bereichen verschiedene analytische Funktionen von x darstellen. Eine wichtige Scheidung zwischen den reellen und komplexen Werten der Veränderlichen tritt nach Weierstrafs bei einer Potenzreihe in der Nähe der Endpunkte ihres Konvergenzintervalles hervor. Die Sätze von Cauchy und Laurent beenden diesen Abschnitt, welcher ganz vorzüglich dazu geeignet ist, in jene moderne Auffafsung der Functionentheorie einzuführen, welche als ihren Ausgangspunkt ganz bestimmt und speziell die Potenzreihe angesehen wissen will.

VI. Abschnitt. Indem der Verfasser die Frage aufwirft, wie sich die Funktionen sin, cos, log ... bei Einführung komplexer Argumente gestalten, betritt er wieder ein mehr elementares Gebiet, und die Art der Darstellung mufs sich damit auch derjenigen annähern, welche wir in andern Lehrbüchern, z. B. in demjenigen Schlömilchs vorfinden. Den Anfang machen die Kreisfunktionen, als deren natürliches Gegenstück auch die Hyperbelfunktionen Erwähnung finden, dann folgt der Logarithmus, die Potenz, die binomische und logarithmische Reihe, deren Konvergenzbedingungen leicht aus den allgemeinen Weierstrafsschen Kriterien erhalten werden, dann werden die Reihen und mit deren Hilfe die Additionstheoreme für die verschiedenen Arkusfunktionen entwickelt, und zuletzt werden ähnliche Reihenentwicklungen auch für einige Funktionen von verwickelterem Charakter durchgeführt, namentlich solcher, welche den Sinus oder Cosinus eines Multiplums jenes Bogens darstellen, dessen Sinus oder Cosinus das Argument x selber ist. Von besonderem Interesse aber dürfte die eingehende Diskussion der harmonischen Reihe $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ sein, weil dabei Gelegenheit gegeben ist, auch den Bernoullischen und Eulerschen Zahlen ihr Recht widerfahren zu lassen. Die independente Darstellung dieser Zahlgebilde, welche neuerdings in der allermannigfachsten Weise angestrebt und auch erreicht worden ist, hätte hier vielleicht auch eine Stelle verdient.

VII. Abschnitt. Die Sätze über unendliche Produkte werden hier mit grofser Umsicht und steter Berücksichtigung der neuern Anschauungen bewiesen; insbesondere ist der Unterschied zwischen bedingt und unbedingt konvergierenden Faktorenfolgen, dessen nähere Erforschung besonders durch Pringsheims Arbeiten gelungen ist, noch in keinem Kompendium so klar und bestimmt auseinandergesetzt worden wie in dem vorliegenden. Von grofsem Interesse ist auch die Verwendung der Produkte als eines Hilfsmittels zur Überführung gewisser Funktionen in Potenzreihen.

VIII. Abschnitt. Von den um die Theorie der Kettenbrüche besonders verdienten Mathematikern unserer Zeit ist Heine bereits verstorben, während Stern und Seidel seit geraumer Zeit mehr

an andern schwierigen Problemen der Analysis sich zu erproben vorziehen. Um so freudiger ist die hier gegebene zusammenfassende Darstellung zu begrüfsen, welche nicht nur in methodischer, sondern auch in rein szientifischer Hinsicht als ein Fortschritt zu bezeichnen sein wird. Unter welchen Umständen ein periodischer Kettenbruch konvergiert, divergiert oder oszilliert, war bisher nicht bestimmt zu entscheiden, während jetzt durch den auf S. 302 des Stolzschen Werkes formulierten Lehrsatz diese Frage gelöst werden kann. Dem Referenten war es erfreulich zu sehen, wie der von ihm selbst verallgemeinerte — ursprünglich von Seidel eingeführte — Begriff der Aequivalenz der Näherungswerte bei zwei verschiedenen ins unendliche sich erstreckenden Entwicklungen der nämlichen Funktion in den Händen des Verfassers als ein sehr leistungsfähiges Werkzeug bei der Behandlung unendlicher Kettenbrüche sich erwiesen hat.

Der Litteraturnachweis am Schlusse ist für jeden Studierenden, der auf der durch die „Vorlesungen" gelegten Basis fortbauen will, vom allerhöchsten Werte. Wir Deutsche dürfen überhaupt froh darüber sein, in unserer eigenen Sprache ein Werk zu besitzen, welches es gestattet, neidlos auf die gleichzeitig erfolgte Bereicherung der französischen Litteratur durch Jules Tannerys *„Introduction à la théorie des fonctions d'une variable"* blicken zu können.

München. Dr. S. Günther.

Jordan, Dr. W., (Professor an der technischen Hochschule zu Hannover.) Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin, Verlag von Julius Springer. 1885. VII. 364 S. Text. 26 S. Tafeln.

Wenn schon es unserer Litteratur an guten Anleitungen zur Bestimmung der geographischen Koordinaten keineswegs gebricht — wir erinnern nur an die bezüglichen Schriften von Weyer (nicht Weyr)*) und Peter —, so darf doch das in Rede stehende Buch ein besonderes Verdienst in Anspruch nehmen. Nirgends nämlich werden wir so gründlich in das Detail der Messungen und Rechnungen eingeführt, als hier, nirgends auch wird das Wesen der Instrument-Korrektion gleich gründlich dargelegt. Die grofse Menge vollständig durchgerechneter Zahlenbeispiele, welche grofsenteils dem bekannten Werke des Verfassers über die libysche Wüste entnommen sind, gewährt insbesondere dem angehenden Forschungsreisenden die Möglichkeit, sich mit allen einschlägigen Fragen aufs gründlichste bekannt zu machen. Auf Vollständigkeit allerdings hat der Verfasser durchaus kein Gewicht gelegt, er hat nur diejenigen

*) Es scheint gegen diese unrichtige Namenschreibung (S. 345 der Vorlage) deshalb Einsprache erhoben werden zu müssen, weil es bekanntlich auch zwei bedeutende Mathematiker Weyr giebt.

Methoden aufgenommen, die ihm als die zweckdienlichsten und am sichersten zum Ziele führenden erschienen, und es wäre wohl zu wünschen gewesen, dafs er der anderen Verfahrungsweisen wenigstens im Vorübergehen gedacht und etwa auch die Gründe angegeben hätte, welche ihn von einer eingehenderen Diskussion derselben abgehalten haben.' Man gewinnt eben den Eindruck, dafs der Autor nur Selbsterlebtes und Selbsterprobtes mitzuteilen beabsichtigte, wie er denn auch bei der Beschreibung der Beobachtungswerkzeuge stets auf die unter seiner eigenen Leitung stehende Sammlung des Polytechnikums zu Hannover Rücksicht nimmt. Über den verarbeiteten Stoff wird die nachstehende Inhaltsübersicht genügend aufklären.

Das erste Kapitel enthält die Grundlehren der sphärischen Astronomie, soweit sie für das Folgende notwendig sind; wir machen auf die Abschnitte über die Zeitgleichung und über Zeitverwandlung deswegen besonders aufmerksam, weil diese Punkte sonst in den Kompendien vielfach zu kurz zu kommen pflegen. Indem der Verfasser „Himmelskugel“ und „Himmelsgewölbe“ identifiziert, scheint er uns einigermafsen von dem üblichen Sprachgebrauche abzuweichen, denn seit Robert Smith bezeichnet man mit dem letzten Worte doch wohl ganz allgemein das gedrückte Gewölbe, welches dem Augenschein nach über unsern Häuptern sich ausspannt, während die Himmelskugel als Ortsfläche der zunächst als gleichweit vom Standorte des Beobachters entfernt gedachten Sterne auftritt. Im zweiten Kapitel begegnen wir zunächst der Schilderung des Theodoliten und der Uhr, und eben diese Individualcharakteristiken müssen wir als überaus lehrreich bezeichnen. Dann wird gezeigt, wie eine einzelne Höhenmessung zugleich die Zeit liefert; dafs ein so geübter Rechner, wie der Verfasser, die bekannte Überführung der Formel

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin d}{\cos \varphi \cos d}$$

(φ Polhöhe, t Stundenwinkel, h Höhe, d Deklination eines bestimmten Sternes) in eine logarithmisch bequemere Form für ziemlich überflüssig erklärt (S. 56), hat uns vom mathematischen Standpunkte aus zwar wunder genommen, allein gegenüber der Erfahrung, welche zu diesem Urteile führte, glauben wir das eigene zurücktreten lassen zu müssen. Die Bestimmung des Tag- und Nachtbogens eines Gestirnes, natürlich mit steter Berücksichtigung der Refraktion, schliefst sich unmittelbar an, auch wird die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Höhenänderung durch Bildung des ersten und zweiten Differentialquotienten von h nach t untersucht. Weiter wendet sich der Verfasser zur Ermittlung der Zeit durch korrespondierende Sonnenhöhen, wobei gewisser diese Prozedur erleichtender Apparate („Chronodeik“ von Chandler u. a.) mit Anerkennung gedacht wird. Ein anderes viel verwendetes Mittel der

Zeitbestimmung ist gegeben im Passageninstrument, dessen Achsenfehler bislang wohl noch keiner so einläfslichen Betrachtung unterzogen worden sein dürfte, wie an diesem Orte. Nunmehr folgt die Berechnung der Polhöhe aus gemessenen Mittagshöhen der Sonne; hat man solche nicht zur Verfügung, so reichen auch beliebig zerstreute Höhen hin. Einen besonderen und zwar sehr ausgedehnten Abschnitt beansprucht auch der Polarstern, sowohl in seiner Anwendung zur Auffindung des Azimuts als auch zur Auffindung der geographischen Breite. Von entschiedenstem Interesse ist es, dafs durch den Verfasser gewisse instrumentelle Vorrichtungen, die früher zum unentbehrlichen Inventar einer jeden Sternwarte gehörten, wieder in ihre Rechte eingesetzt werden: das sind der Gnomon, dessen Benützung durch Angabe eines sinnreichen Schattenbildes sehr erleichtert und mit dessen Erörterung zugleich diejenigen des Dentschen Dipleidoskopes verbunden wird, und die Sonnenuhr. Es wird allgemein und dann noch am konkreten Beispiele ausgeführt, wie man eine solche Uhr an einer Vertikalwand von beliebigem Azimut entwerfen und sich derselben mit Vorteil zum Bestimmen der wahren Sonnenzeit bedienen kann.

Nicht weniger denn 30 Paragraphe (§ 28—58) sind den Spiegel- und Prismeninstrumenten eingeräumt. Hier giebt Herr Jordan aus seinem Erfahrungsschatze heraus viele der wertvollsten Fingerzeige, z. B. über die Benützung des Stativs und des künstlichen Horizontes. Welche Fülle von Fehlerquellen jeder Beobachtung mit dem Sextanten anhaftet, ersieht man erst aus dieser Darstellung so recht vollständig, man erfährt aber auch, wie dieselben erkannt und rechnerisch ausgemerzt werden können. Ganz ebenso wird es mit den Prismenkreisen gemacht. Für weitere Kreise sehr beachtenswert ist die Vergleichung der verschiedenen Konstruktionsmethoden, welche der Verfasser vornimmt und deren wichtigstes Ergebnis das ist, dafs die nach dem Sextantenprinzip eingerichteten Reflexionskreise mit zwei Nonien den Vorrang vor allen übrigen Anordnungen behaupten, namentlich auch gegenüber dem Pistor-Martinsschen Kreise.

Nahezu der ganze Rest des Buches wird von der Längenbestimmung durch Monddistanzen eingenommen, welche der Verfasser für die zuverläfsigste aller astronomischen — d. h. nicht auf unmittelbarer Zeitübertragung beruhenden — Methoden erklärt und neben welcher er nur noch für Landreisen die sozusagen geodätische Übertragung der Längen durch Kompafs und Hodometer empfiehlt — ein Verfahren, von welchem er selbst bekanntlich bei den Karawanenreisen in der Sahara ausgiebigsten Gebrauch gemacht hat. Sehr dankenswert dünkt uns auch hier wiederum die Erörterung der Beobachtungspraxis, die nicht jeder an der Hand eines Lehrmeisters einzuüben in der Lage ist. Die Reduktion der gemessenen Distanz auf den Erdmittelpunkt wird u. a. auch mit Hilfe eines

graphischen Schemas bewerkstelligt, und endlich wird auch nachgewiesen, dafs einige Distanzbestimmungen auf der Reise zur Regulierung des mitgeführten Chronometers dienen können. — Vierzehn Hilfstafeln gewähren dem Beobachter ein erwünschtes Erleichterungsmittel bei der Berechnung dieser Beobachtungen.

Der Leser weifs nunmehr, was er in dem Jordanschen Lehrbuche suchen darf und was nicht. Manches, was er nach dem Titel zu erwarten berechtigt wäre, findet er nicht, so die Breitenbestimmung durch zwei Kulminationshöhen eines Zirkumpolarsterns, die zum gleichen Zwecke verwendeten Methoden von Böhm, Rümker und Douwes, die Längenbestimmung durch die Verfinsterungen der Sonne, des Mondes und der Jupiterstrabanten, sowie noch manches andere. Zumal die letzterwähnte Methode hätte schon ihres altehrwürdigen Charakters halber nicht fehlen sollen, und selbst heutigen Tages noch wird sie von den Reisenden gerne zur gelegentlichen Kontrolle ihrer anderweit gewonnenen Längenwerte benützt. Auch wird sich die Brauchbarkeit des Verfahrens noch sehr erhöhen, wenn es, was neuerdings angestrebt wird, gelingen sollte, den Moment des Eintritts eines Satelliten in den Schatten seines Hauptplaneten photometrisch schärfer zu fixieren, als es der blofsen Beobachtung gelingen wollte. — Allein desungeachtet müssen wir unsere eingangs ausgesprochene Empfehlung des Werkes wiederholen. Denn das, was es bietet, bietet es in vortrefflicher Weise, und gerade den pädagogischen Anforderungen, auf welche es uns hier in erster Linie ankommt, ward vom Verfasser alle mögliche Rechnung getragen. Auch die Ausstattung mufs als würdig, wo nicht als glänzend bezeichnet werden.

München. Dr. S. Günther.

Frischauf, Dr. J., (Professor an der Universität Graz.) Konvergenz der Kugelfunktion-Reihen. Graz. Verlag des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark. 1887. 24 S.

Für sehr viele Probleme der mathematischen Physik, ganz besonders aber für alle diejenigen, welche sich auf die Erforschung der wahren Gestalt der Erde beziehen, spielen die sogenannten Kugelfunktionen eine hochwichtige Rolle, allein gerade die Frage, unter welchen Umständen diese nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihen als konvergent zu betrachten sind, konnte erst verhältnismäfsig spät, und zwar mittelst ziemlich verwickelter Gedankenprozesse, zur Erledigung gebracht werden. Herr Frischauf hat deshalb sehr wohl daran gethan, nach einer mehr elementaren Behandlung des Gegenstandes zu suchen, die er uns hier mitteilt. Für $\alpha < 1$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}} = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \cdots + P_n\alpha^n + \cdots,$$

und P_n selbst ist durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\gamma}\frac{\cos\left(n\psi+\frac{1}{2}\psi\right)d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\psi)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\psi)}}$$

gegeben, wo $\alpha = e^{\psi i}$ gesetzt ward. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, dafs die Entwicklung auch für $\alpha \geqq 1$ zu recht besteht, und eben in diesem Nachweise liegt der Schwerpunkt der Frischauf-schen Methode. Es wird hiezu nichts vorausgesetzt als etwas Kenntnis der Geometrie und der geometrischen Progressionen. Der Verfasser geht nämlich jetzt umgekehrt aus von der Reihe

$$S = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \cdots + P_n\alpha^n + \cdots,$$

bringt sie auf die Form

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\gamma}\frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\gamma-\sin^2\frac{1}{2}\psi}}\cdot\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\psi i}}{1-\alpha e^{\frac{1}{2}\psi i}}+\frac{e^{-\frac{1}{2}\psi i}}{1-\alpha e^{-\frac{1}{2}\psi i}}\right)$$

und erhält so die ursprüngliche Gröfse $(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ wieder, von welcher er ausgegangen war. Hier aber ward α als völlig willkürlich vorausgesetzt. Weiter wird nun in ganz elementarer Weise*) gezeigt, dafs P_n für $n = \infty$ und $\gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ den Wert 0 annimmt, dafs ein gleiches der Fall ist, wenn zwar γ mit n unendlich klein, $n\gamma$ aber mit n unendlich grofs wird, dafs für ein unendlich grofses n, für ein unendlich kleines γ und für ein endliches $n\gamma$ die Gröfse P_n in die Cylinderfunktion $J(n\gamma)$ sich verwandelt, und dafs auch für $n=\infty$, $\gamma = n\gamma = \frac{1}{\infty}$ dieses P sich angeben läfst. Wenn man nun auf einer Kugel vom Radius 1 einen festen Punkt markiert, so läfst sich die reziproke Entfernung dieses festen Punktes von einem veränderlichen Punkte mit den Koordinaten ϑ, φ durch eine Reihe darstellen, in deren Koeffizienten jenes P_n wiederum auftritt, und es gilt, zuzusehen, wie sich das erweiterte allgemeine Glied unter der Voraussetzung $n=\infty$ ermitteln läfst. Herr Frischauf führt die Untersuchung zunächst für $\vartheta = 0$ durch, zeigt aber dann noch weiter, wie sich das Resultat für beliebige Werte von ϑ gestaltet. Im „Anhang" werden

*) Den Mittelwertsatz Du Bois Reymonds zählen wir noch den Elementen bei.

verschiedene analytische Darstellungen mehr im Detail ausgeführt; insbesondere verdient eine schöne Transformation der Besselschen Funktion erster Ordnung hervorgehoben zu werden.

München. Dr. S. Günther.

Meisel, Geometrische Optik, eine mathematische Behandlung der einfachsten Erscheinungen auf dem Gebiete der Lehre vom Licht. Mit einem Atlas von fünf Tafeln. Halle a/S. Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1886. 171 S. 8. Preis 6 ℳ.

Wie der Verfasser wird schon mancher Lehrer der Physik die Lücke empfunden haben, welche zwischen den elementaren Lehrbüchern der Physik, die das Hauptgewicht auf die Beschreibung von Versuchen und Apparaten legen und den Lehrbüchern der höhern Optik, die auf der Wellenlehre fufsend die elementaren Erscheinungen wenig eingehend zu behandeln pflegen, besteht.*) Die vorliegende Schrift ist dazu bestimmt, diese Lücke auszufüllen; sie beansprucht keinerlei physikalische Vorkenntnisse und von der Mathematik werden auch nur die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung gebraucht — meistens sogar nur die Elementar-Mathematik. Dabei werden aber alle Untersuchungen eingehend und streng durchgeführt und die geometrischen Grundbegriffe der Optik zur vollständigen Klarheit gebracht.

Das Buch zerfällt in drei Hauptabschnitte: der geradlinige Weg des Lichtes, die Zurückwerfung und die Brechung des Lichtes. Der erste Abschnitt behandelt zuerst die Lehre vom Schatten, sodann die Form der Sonnenbilder, welche durch verschiedene Öffnungen erzeugt werden, endlich die Beleuchtung körperlicher Oberflächen. Dabei werden u. a. folgende Aufgaben vollständig durchgeführt: Berechnung der gröfsten Helligkeit eines innern Planeten, ferner die Beleuchtung einer Ebene nicht nur durch einen, sondern durch zwei Punkte, — sodann die Beleuchtung von Kegel, Cylinder und Kugel, endlich auch die einer beliebigen Fläche durch einen Lichtpunkt. Diese Aufgaben dürften wenigstens zum gröfsten Teil bisher noch nirgends behandelt sein.

Vor dem zweiten und dritten Teil befindet sich eine Vorbemerkung allgemeinen Inhalts über die Einteilung der optischen Bilder; gewöhnlich werden dieselben, wie bekannt, nur eingeteilt in reelle und virtuelle. Der Verfasser weist aber noch auf einen andern Unterschied hin, der in den gebräuchlichen Lehrbüchern

---

*) Auch Herr Prof. Schellbach klagt in seiner Schrift „über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien" (S. 31) darüber, dafs die geometrische Optik fast in allen Lehrbüchern auf eine unverzeihliche Weise vernachlässigt werde; — in ganz Berlin gäbe es nicht tausend Menschen, die über den Regenbogen mehr Licht als Goethe verbreiten könnten. (S. 33).

nicht mit der wünschenswerten Schärfe hervorgehoben wird; er unterscheidet nämlich die Fälle, in denen die gespiegelten bezw. gebrochenen Lichtstrahlen einander in einem Punkte schneiden von den Fällen, in denen die Lichtstrahlen eine einhüllende Curve bezw. Fläche bilden; Herr Meisel nennt die im ersten Falle entstehenden Bilder, welche von der Lage des betrachtenden Auges unabhängig sind, absolute, die andern, deren Lage sich mit der Stellung des Auges ändert, relative — er unterscheidet also im ganzen vier Arten von Bildern:

reelle absolute,
„ relative,
virtuelle absolute,
„ relative;

diese Unterscheidung trägt sehr viel zur Klarheit der Auffassung bei.

Diejenigen Leser, welchen die „darstellende Optik" von Engel und Schellbach mit dem dazugehörigen Atlas bekannt ist, werden hierbei sicher sofort an dieses treffliche Werk denken; auch Herr Meisel weist in seinem Buche wiederholt auf dasselbe hin.

Im zweiten Teil giebt der Verfasser zuerst das Grundgesetz der Reflexion, bespricht dann die Spiegelung an einer ebenen Fläche und macht dann sofort eine Anwendung davon, indem er eine sehr einfache, dabei aber doch ganz allgemein gültige Theorie des Winkelspiegels entwickelt. Die nächsten Kapitel handeln von der Zurückwerfung des Lichtes an Kugelflächen, von der Katakaustik, sodann von der Lage und Gröfse der Bilder und von der Krümmung derselben. Es folgt die Zurückwerfung des Lichtes an cylindrischen und kegelförmigen Flächen, bei welcher Gelegenheit die Gleichungen für die „optischen Anamorphosen" entwickelt werden; auch die Reflexion an einer beliebigen Fläche wird in den Kreis der Betrachtungen gezogen und die bezügliche Differentialgleichung aufgestellt. Den Schluss dieses Abschnittes bilden allgemeine Betrachtungen über die zerstreute Zurückwerfung des Lichtes und den Einflufs derselben auf die Beleuchtung der Körper; bei dem augenblicklichen Stande unserer Kenntnisse hält es der Verfasser nicht für möglich diesen Einflufs mathematisch zu behandeln und er weist daher auch den in manchen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie gemachten Versuch, im Eigenschatten der Körper noch Isophoten zu zeichnen, energisch zurück. Denn im Eigenschatten ist die Beleuchtung gleich Null, und die Null hat bekanntlich keine Abstufungen.

Der dritte und letzte Teil, welcher fast die Hälfte des Buches umfafst, enthält die Lehre von der Brechung des Lichtes und zwar gleichfalls in strenger Behandlung. Auf die Wellenlehre wird nur insofern Rücksicht genommen, als das Brechungsgesetz gleich von vornherein nur für Strahlen von einer bestimmten Wellenlänge (Farbe) ausgesprochen ist. Nach Ableitung des Fermatschen Principes

(vom geringsten Zeitverbrauch) und des Satzes vom Grenzwinkel folgt zunächst die Lehre von der Brechung an einer Ebene, und als Anwendung davon die Lage der Bilder von unter Wasser befindlichen Gegenständen in ihrer Abhängigkeit vom Orte des Auges. Es ist dies eine Aufgabe, die man, obgleich sie sehr nahe liegt, in den Lehrbüchern der Physik vergeblich sucht; nur Engel und Schellbach widmen ihr einige vortrefflich gezeichnete Figuren, zu denen hier Meisel die Theorie liefert.

Die nun folgende Untersuchung der Brechung in planparallelen Platten führt zu dem überraschenden Ergebnis, dafs auch die hierdurch entstehenden Bilder nicht absolut, sondern relativ, d. h. vom Orte des Auges abhängig sind. Es folgt dann das Prisma, das Minimum der Ablenkung, die Brechung an Kugelflächen und in sphärischen Linsen, die Vollkugel eingeschlossen. Aufser den sphärischen werden auch die aplanatischen Linsen einer Untersuchung unterworfen, dann auch die Brechung an einer bel. Fläche (Resultat in Form einer Differentialgleichung.) Das letzte Kapitel des Buches behandelt die Farbenzerstreuung und die achromatischen Linsen.

Dies der Inhalt des Buches; derselbe ist hier ziemlich ausführlich wiedergegeben worden, um zu zeigen, wie gründlich der Verfasser das in seinem äufsern Umfang etwas beschränkte Gebiet bearbeitet hat. Auch über die Form, in der der Verfasser den Stoff darbietet, kann man sich nur lobend aussprechen: die Darstellung ist durchweg klar und durchsichtig, die Rechnungen und Formeln sind sämtlich höchst übersichtlich und machen dem Leser keine überflüssigen Schwierigkeiten. An die allgemeinen Resultate sind häufig noch spezielle Fälle angeknüpft, durch die sich der „studierende“ Leser wohl veranlafst fühlen kann, noch andere ähnliche Fälle zu bearbeiten, — doch mufs er sich die Aufgaben erst selbst bilden, denn der Verfasser hat leider keine Übungsaufgaben beigefügt. Erwünscht wäre es wohl auch gewesen, wenn an einzelnen Stellen des Buches kurze historische Notizen und Litteraturnachweise angebracht wären, wenigstens wäre damit gewifs manchem Leser gedient. — Die Figurentafeln endlich, die der Verfasser seinem Werke beigegeben hat, sind offenbar mit besonderer Liebe, sorgfältig und genau gezeichnet; wenn sie der Verfasser in der Vorrede als „verhältnismäfsig primitiv“ bezeichnet, so ist das nur im Vergleich mit den ausgezeichneten Tafeln des oben erwähnten Atlas von Engel und Schellbach geschehen; in Wirklichkeit sind sie ganz vortrefflich und können sich recht gut selbst neben jenem berühmtem Werke ohne Scheu sehen lassen und der Verleger hätte nicht nötig gehabt, sie verschämt in einen grofsen Bogen Papier einzuwickeln; im Gegenteil er würde für das Werk sicher noch mehr Abnehmer finden, wenn er die Tafeln zu einem richtigen Hefte vereinigte, wie man es jetzt im Buchhandel gewohnt ist. Dazu dürfte es auch jetzt

noch nicht zu spät sein; nur dürfte der Titel desselben nicht lauten wie jetzt: „Atlas zu geometrische Optik von Meisel." Die Scheu, einem Titel Declinationsendungen anzuhängen, der man jetzt mitunter begegnet, ist gänzlich unbegründet, aufserdem kann man die Declination leicht vermeiden, indem man entweder sagt: „Atlas zu dem Werke . . ." oder „Geometrische Optik, zweiter Teil: Atlas." — Mit diesen Bemerkungen wollen wir aber dem Buche selbst nicht zu nahe treten, im Gegenteil, wir empfehlen es allen Mathematikern, die sich mit diesem Teile der Optik lehrend und lernend zu beschäftigen haben, aufs angelegentlichste. Wir bringen dabei auch die „darstellende Optik" von Engel und Schellbach (ebenfalls im Verlag von H. W. Schmidt in Halle) nochmals in Erinnerung, da sich dieselbe mit dem Meiselschen Werke in ganz vortrefflicher Weise ergänzt.

Erfurt. G. Schubring.

Mohn, H., (Prof. d. Meteorologie a. d. Univ. Christiania u. Dir. d. Norw. met. Inst.) Grundzüge der Meteorologie. Die Lehre von Wind und Wetter, nach den neuesten Forschungen gemeinfafslich dargestellt. Deutsche Originalausgabe. Vierte verb. Aufl. Mit 23 Karten und 36 Holzschnitten. 8°. Berlin, Reimer, 1887. X. u. 364 S. Pr. geb. 6 Mark.*)

Dieses in unserer Zeitschrift bereits zweimal (XI, 222 und XIV, 535**) besprochene ausgezeichnete Werk erscheint hier in vierter Auflage. Die sich nötig machende neue Auflage gab dem Verfasser die willkommene Gelegenheit an der i. J. 1883 erschienenen 3. Aufl. mehrfache Verbesserungen anzubringen. „An vielen Stellen sind kleine Veränderungen und Zusätze im Texte vorgenommen. Die Isothermen-, Isobaren- und Wind-Karten sind nach den Resultaten der neuesten Untersuchungen korrigiert. Einige Figuren sind neu gezeichnet." Dagegen ist die Anordnung der einzelnen Paragraphen, sowie auch diejenige der Figuren und Karten unverändert geblieben. Tabelle V letzte Hälfte ist neu.

Der von unserm geehrten Mitarbeiter Günther in XIV, 537 ausgesprochene Wunsch, es möchten auch die Astrometeorologie, insbesondere die Arbeiten Koeppens, gebührende Würdigung finden, scheint nicht in Erfüllung gegangen zu sein.

Für eine neue Auflage dürfte sich u. E. empfehlen ein Verzeichnis der Karten und Holzschnitte, um dieselben beim Nachschlagen besser finden zu können. Der von uns schon in XI, 225 ausgesprochene Wunsch, bezügl. der litter. Nachweise und eines alphabetischen Registers ist leider unerfüllt geblieben. H.

---

*) Der Redaktion von der Verlagsbuchhandlung in elegantem Einbande dargereicht. D. Red.

**) Die erste dieser Anzeigen ist von uns, die zweite von Günther. D. Red.

Leunis, Dr. Johannes, Synopsis der Pflanzenkunde. Ein Handbuch für höhere Lehranstalten und für Alle, welche sich wissenschaftlich mit der Naturgeschichte der Pflanzen beschäftigen wollen. Dritte gänzlich umgearbeitete mit vielen hundert Holzschnitten vermehrte Auflage von Dr. A. B. Frank, (Professor an der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin.) III. Band. Spezielle Botanik. Kryptogamen. Mit 176 Holzschnitten. Hannover. Hahnsche Buchhandlung 1886.

Die Synopsis der Pflanzenkunde in ihrem neuen, unserer weit vorgerückten Zeit entsprechenden Gewande hat mit diesem Bande ihren Abschlufs erreicht. Die „Kryptogamen" jetzt noch in einem Bande zu behandeln, es war fürwahr ein schwieriges Problem, auf dessen Lösung man gespannt sein konnte. Aber es ist zu unserer höchsten Befriedigung gelöst worden. Das bei den Blütenpflanzen befolgte Prinzip, sämtliche einheimischen Spezies aufzunehmen, liefs sich bei den Sporophyten wegen der aufserordentlich grofsen Anzahl der bis jetzt schon bekannten Arten derselben nicht allgemein durchführen. Es war dies nur bei den Gefäfspflanzen möglich; von den Moospflanzen an konnte nur eine Vollständigkeit der deutschen Gattungen erreicht, innerhalb derselben eine Auswahl der häufigsten und wichtigsten besonders nützlichen und schädlichen Spezies getroffen werden. Von den ausländischen Formen sind nur die bemerkenswertesten aufgenommen. Unter den Pilzen ist auf die efsbaren und giftigen, und die als Krankheitserreger schädlichen Parasiten von Mensch, Tier und Pflanze ein besonderes Augenmerk gerichtet. Ebenso ist einem Bedürfnis entsprochen, indem die als Gärungs- und Krankheitsursachen wichtigen Bakterien besonders ausführlich behandelt sind.

Die Behandlung der einzelnen Abteilungen ist nicht mehr die schablonenhafte trockene, wie sie hier und da beim „alten Leunis" hervortrat, sondern eine modern systematische von dem Geiste der physiologischen, biologischen, anatomisch-mikroskopischen Forschung belebte und das Interesse nach jeder Seite fesselnde und anregende. Dafs im einzelnen dem gelehrten Herausgeber diese und jene wissenschaftliche Entdeckung, welche hätte Verwendung finden können, entgangen ist, ist bei dem ungeheuren in der Synopsis zu bewältigenden Material erklärlich. So hätten die Entdeckungen des Algenpolymorphismus hie und da zu Vereinfachungen führen sollen. *Ulothrix parietina (Hormidium)* Kütz. und *Prasiola crispa* Ag. sind, wie man sich leicht überzeugen kann, Entwickelungszustände ein und derselben Alge. Ebenso ist die Gattung Chantransia p. 146 einzuziehen, da es nach den letzten Untersuchungen von Sirodot u. A. feststeht, dafs die Arten dieses alten Genus Entwickelungsformen von Batrachospermum (z. B. *Chantransia pygmaea*) und Lemanea (z. B. *Chantransia chalybea*) sind etc. Die letztere Gattung ist in Deutschland weiter verbreitet als man gewöhnlich annimmt;

um so mehr ist es zu verwundern, dafs ihre Entwickelungsgeschichte, die sich hierzu besser eignen würde als die mancher Meeres-Floridee, in keinem botanischen Buche und auf keiner botanischen Wandtafel [Kny etc.] bisher durch Abbildungen erläutert ist. Wir erlauben uns besonders auf die hübschen Tafeln von Sirodot*) in den Annales d. sciences nat. V Sér. t. 16. 1872 aufmerksam zu machen.

Bei den Pilzen werden die „Imperfecti“ d. h. die Pilzformen, die in den Entwicklungskreis anderer bekannter oder noch unbekannter Pilzspezies gehören, wie dies üblich ist und zur ersten Bestimmung nötig scheint, durchweg gesondert und mit besonderen Namen aufgeführt, ein Prinzip, mit dem sich Recensent nicht einverstanden erklärt. Bei *Puccinia graminis* begegnen wir z. B. noch einmal den Entwickelungsformen als *„Uredo linearis“*, *„Aecidium berberidis“* etc. — Namen, über deren Beseitigung man sich doch freuen sollte. Bei manchen der unentwickelten Pilzformen ist die Entwicklung jetzt bekannt, so bei Ozonium p. 614, dessen Arten Mycelformen folgender Pilze sind:

Coprinus Filhoii Tde (*Ozonium aureum* Dub.). — *C. sociatus* Schum., *C. velatus* Q., *C. intermedius* Penz., *Bolbitius Ozonii* Schulzer *(Ozonium auricomum)*. — *Coprinus alopecia* Fr. (*Oz. stuposum* P·). — *Lenzites trabea* Fr. (*Oz. ferrugineum* Grog.). — *Craterellus muscigenus (Oz. muscorum* Roum. et Patouill.)

ebenso bei Ptychogaster albus Corda. *(Polyporus Ptychogaster)*, *P. aurantiacus* Pat. u. a. — Die p. 608 und 609 beschriebenen und abgebildeten „Pilze“ Schinzia und Frankia in den Wurzelknollen der Leguminosen, Elaeagnaceen und Erlen sind von dem Herausgeber neuerdings wieder eingezogen worden, da sie sich bei genauerer Untersuchung als geformte Eiweisskörper der betreffenden Pflanzen selbst erwiesen haben. —

Den Schluss dieses letzten Bandes der botanischen Synopsis, die in jeder Schulbibliothek stehen sollte, wie sie die Privatbibliothek jedes naturwissenschaftlichen Lehrers schmücken möchte, bildet ein alphabetisches Verzeichnis derjenigen Botaniker, die als Autorität aufgeführt oder nach welchen Pflanzen benannt worden sind, sowie der hervorragendsten botanischen Schriftsteller. F. Ludwig (Greiz).

Wossidlo, Dr. Paul, (Direktor des Realgymnasiums zu Tarnowitz.) Lehrbuch der Zoologie für höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Mit 649 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung, 1886. Preis 4 Mark, gebunden 4,60 Mark.

Das Lehrbuch von Wossidlo bildet die Ergänzung zu einem „Leitfaden“ desselben Verfassers, von dem es sich, abgesehen von

*) Sirodot, M. S. Etude anatomique, organogénique et physiologique sur les algues d'eau douce de la famille des Lémanéacées.

der hier in Wegfall gekommenen „methodischen“ Zwangsjacke, durch gröſsere Auswahl des Stoffes und vollständigere und ausführlichere Beschreibungen unterscheidet.*) Es soll hauptsächlich in den oberen Klassen Verwendung finden und dem Lehrer als Unterlage dienen.

Das Lehrbuch scheint sich einer besonderen Beliebtheit des Publikums zu erfreuen; denn wir sahen es in den Händen manches Schülers, dem wegen besonderen Interesses für Naturgeschichte am Weihnachtstage oder Geburtstage ein „besseres“ Naturgeschichtsbuch bescheert worden war. Um so mehr ist in unserer Zeitschrift eine fachmännische Beurteilung des Buches am Platze.

Die erste Abteilung (bis Seite 430) umfasst das Tierreich, eine zweite (Seite 431—512) enthält eine Beschreibung des Baues und der Verrichtungen des menschlichen Körpers. Die Beschreibungen der einzelnen Klassen, Ordnungen, Familien und der wichtigeren Gattungen und Arten, sind schulmännisch wohl durchdacht, nicht schablonenhaft; sie unterscheiden sich ebenso wohl von denen rein wissenschaftlicher Lehrbücher, als von denen vieler Schullehrbücher durch originelle Auswahl alles dessen, was von den Ergebnissen der zoologischen Forschung für die Schule als ersprieſslich zu erachten ist.

So sind bei der Behandlung mancher Abteilungen neuere systematische Gesichtspunkte in den Vordergrund gestellt (z. B. bei den Fischen das Schlundgebiſs etc.). Die mannigfachen Beziehungen der Tiere zum Pflanzenreich sind wenigstens angedeutet (freilich knapp). Bei den Hummeln ist z. B. nur angegeben: „Alle erweisen sich der Landwirtschaft nützlich durch Befruchtung des roten Klees.“ Dieses Darwinsche Beispiel muſs ewig vorhalten; daſs wir ohne Hummeln keine Bohnen, Stachelbeeren etc. etc. bauen würden, wäre ebenso wissenswert gewesen. Bei den Ameisen ist die eminente Bedeutung für das Pflanzenreich, die zuletzt F. Delpino so gründlich behandelt hat in seinem *„Prodromo d' una monografia delle piante formicarie. Funzione mirmecofila nel regno vegetale.* Bologna 1886“ nicht erwähnt.

Den einzelnen Tierkreisen folgen zusammenfassende Übersichten der Klassen und Ordnungen, wie dem Ganzen ein zusammenfassender Überblick über die Tierkreise selbst folgt — alles in dem die Vergleichung wesentlich erleichternden Diagnosenstil. Was die Auswahl des behandelten Materiales anlangt, so möchten wir von einem „Lehrbuch“ doch eine gröſsere Vollständigkeit verlangen. Es fehlen ganze Familien: so bei den Würmern die im Süſswasser allverbreitete durch Entwicklung und Formgestaltung, wie durch Lebensweise gleicherweise das Interesse fesselnde Familie der Bryozoen (*Alcyonella, Cristatella,* der zierliche Hahnenkammpolyp mit seinem

---

*) Der „Leitfaden“ ebenda erschienen. 314 S. und 487 Text-Abbild. Pr. 3 M. D. Red.

Kolonialnervensystem etc.). Die Nomenklatur ist öfter von der allgemeingebräuchlichen abweichend und das ist störend.

Die Anthropologie, die in dem „Lehrbuche" freilich ebenfalls weniger knapp hätte behandelt werden sollen, schliefst sich in gleicher praktischer Behandlung der Zoologie an. Die ersten physikalischen Grundgesetze (z. B. das Hebelgesetz, Gesetze des Luftdruckes etc.), in die der Obertertianer gelegentlich in der Anthropologie eingeführt werden mufs, haben die nötige Berücksichtigung dabei erfahren. [Zur Vorbereitung auf den anthropol. Unterricht insbesondere, wie zur Berücksichtigung im zool. Unterricht überhaupt möchten wir hier die hübsche Arbeit von Graber „über die mechanischen Werkzeuge der Tiere" in der Bibliothek des Wissens der Gegenwart zur Einsicht empfehlen].

Erwähnen wir zum Schlusse die Abbildungen, so berühren wir einen der hauptsächlichsten und am meisten in die Augen fallenden Vorzüge, den das Buch vor vielen anderen Schullehrbüchern hat. Sie sind gut, einfach, und geben möglichst vollständige und zusammenhängende Darstellungen der Entwickelung der einzelnen Tiere, sowie des menschlichen und tierischen Körperbaues. Das ganze Buch kann nach alledem empfohlen werden.

Greiz. LUDWIG.

HOLLE, Dr. H. G., (Gymnasiallehrer in Bremerhaven.) Leitfaden für den Unterricht in der Botanik an höheren und mittleren Schulen. Bremerhaven, L. v. Vangerow, 1884. 8°.

Das Buch, welches keine Abbildungen und nur 80 Seiten inhaltreichen Text enthält, ist für solche Schulen geschrieben, an denen — wie dies freilich überall sein sollte — der Fachlehrer für Naturwissenschaften die Botanik selbst wissenschaftlich betrieben hat und daher aus dem Vollen schöpfen, die üblichen Abbildungen der Lehrbücher durch Präparate und sie begleitende Zeichnungen ersetzen kann und seinen Unterricht an und in der lebenden Natur erteilt. Es erfüllt für solche Anstalten nicht allein seinen Zweck voll und ganz, sondern es gehört auch, wie wir zu behaupten nicht anstehen, zu den hervorragendsten Leistungen auf dem Gebiet der botanischen Schullitteratur.

Merkwürdigerweise hat der Hollesche Leitfaden, trotzdem er schon 1884 erschienen ist, keine neue Auflage erlebt, er scheint sogar wegen seines allzu bescheidenen Äufseren unter der Unzahl prunkender und mittelmäfsiger Waren des botanischen Büchermarktes der Mehrzahl der Fachgenossen verborgen und unbekannt geblieben zu sein. Um so mehr halten wir es für unsere Pflicht, darauf aufmerksam zu machen, wenn wir auch nunmehr — post festum — von einer näheren Besprechung der ersten Auflage absehen.

Greiz. LUDWIG.

Zu den Lehrmitteln.

Klaus, K. P., (Oberlehrer an der Realschule zu Reichenbach i. Vogtl.) Hundert Flechtenarten für Schulen, sowie zum Selbstunterricht. Im Selbstverlag des Verf. Preis 21 Mark (incl. Verpackung).

Die Flechtensammlung von Klaus, welche 100 der verbreitetsten Flechtenarten in reichlichen, gut präparierten Exemplaren enthält, ist ihrer praktischen Auswahl wegen, wie auch wegen ihrer musterhaften sauberen Ausstattung als Unterrichtsmittel sehr zu empfehlen.

Die Exemplare sind weder gepresst, noch in Papier eingeschlagen, sondern liegen locker befestigt und systematisch geordnet auf sechs grofsen Papptafeln, die durch Korke von einander entfernt gehalten werden und von einem Pappkasten umschlossen sind. Die Bestimmungen sind durchweg richtig, die Nomenklatur ist die neuerdings gebräuchliche, z. B. in Cohns Kryptogamenflora von Schlesien angewandte.

Halten wir sonst auch von Schulherbarien, wenn solche nicht im Unterricht oder im Anschlufs an den Unterricht entstanden sind, nichts, so sind doch derartige, gewisse Abteilungen der Sporenpflanzen (Flechten, Meeresalgen etc.) umfassende Sammlungen für den Unterricht fast unentbehrlich.

Greiz. Ludwig.

B. Programmschau } vacat.
C. Bibliographie }

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Die Verhandlungen des Einheitsschul-Vereins zu Halle a/S.

am 13.—14. April 1887.

Bericht vom Herausgeber.

Da wir uns seit Jahren ebenfalls mit der Idee der „Einheitsschule“ herumgetragen hatten und oft aus dem Munde und aus Schriften von (Real-) Schulmännern*) die Behauptung hatten hören müssen, die Einheitsschule sei unmöglich, da ferner die Lektüre der Steinbartschen Schrift „Die Unmöglichkeit der Einheitsschule“ uns noch besonders in der Erinnerung war, so mufste uns natürlich der angekündigte Vortrag über das geradezu entgegengesetzte Thema „die Möglichkeit der Einheitsschule“. zum Besuche der Versammlung der Einheitsschulmänner („Unitarier“) aufserordentlich anregen. Wir beschlossen daher — trotzdem wir bei unserm Alter jedem Reisen abgeneigt sind — bei der günstigen Nähe des Orts die Versammlung doch zu besuchen und bereuen es nicht, dies gethan zu haben; denn diese Verhandlungen haben unsere Ansicht über diese „brennende Frage“ geklärt und befestigt.

Im Programm waren folgende Vorträge angemeldet:

Für den 13. April: 1. Vortrag des Dr. O. Frick, Direktor der Frankeschen Stiftungen in Halle a. S.: *Die Möglichkeit der Einheitsschule.*

2. Vortrag des Gymnasiallehrers F. Hornemann aus Hannover: *Die Pflege des Auges und der Anschauung in der Einheitsschule.*

Für den 14. April: 3. Vortrag des Prof. Dr. G. Koerting aus Münster i. W.: *Der neusprachliche Unterricht in der Einheitsschule.*

4. Vortrag des Prof. Dr. Lothar Meyer aus Tübingen: *Die Mathematik und die Naturwissenschaften in der Einheitsschule.*

Dieses Programm erlitt insofern eine Änderung, als wegen Behinderung des Prof. Körting der 4. Vortrag (von Meyer) zum zweiten erhoben und also schon am 1. Tage gehalten wurde.

Die anfangs sehr zahlreich besuchte Versammlung wurde durch einen Vortrag des Vorsitzenden Dir. Dr. Steinmeyer aus Aschersleben über Zweck und Ziele des Vereins eingeleitet. Hierauf hielt Hr. Dr. O. Frick,

---

*) Z. B. von Friedländer-Hamburg ds. Z. X, 403.

(Ober-) Direktor der Frankeschen Stiftungen in Halle, seinen angekündigten Vortrag. Seine sehr durchdachte und wohl ausgearbeitete Rede war trotz ihrer Länge sehr anziehend und anregend. Der Redner deckte mit seltener Freimütigkeit die Schäden auf, welche unserer gegenwärtigen Gymnasialbildung immer noch anhaften. Es gab dabei manche humoristische Stellen*) und treffende Schlagworte. Er trat vor allem ein für die Besserung der Unterrichtsmethode, indem er den in die Sprache der Physik eingekleideten Satz aufstellte: man müsse die Last des Schülers in Kraft umsetzen (umwandeln) und damit zugleich die Unlust in Lust.

Was wir aber an dem Vortrage, dessen Veröffentlichung man wünschen muſs,**) vermiſsten, das war der endgiltige Beweis und die auf Grund desselben befestigte Überzeugung von der Möglichkeit der Einheitsschule, insofern dieselbe nämlich den beiden Seiten der sprachlich-geschichtlichen und der mathem.-naturwissenschaftlichen gerecht werden soll; also gerade das, was man erwartete, blieb aus. Die Einheitsschule des Redners soll nämlich beide Schulgattungen Gymnasium und Realschule verschmelzen. Über die Möglichkeit dieser Verschmelzung lassen wir nun am besten den Vortragenden durch das Programm selbst sprechen:

„Dieselbe (nämlich die Verschmelzung beider Schularten) scheint ihm (dem Vereine) mit Beibehaltung sämtlicher Unterrichtsfächer beider Schulen insonderheit des *Griechischen* und *Englischen*, ohne Vermehrung der Gesamtzahl der Lehrstunden und ohne Überanstrengung der Schüler möglich unter folgenden Bedingungen:

1. Ausscheidung von allem für die Aufgabe der Schule Unnötigen und Fachwissenschaftlichen aus dem Lehrstoffe.

2. Verteilung der pädagogisch-didaktischen Aufgaben des fremdsprachlichen Unterrichts auf die einzelnen Sprachen nach der Eigentümlichkeit einer jeden.

3. Herstellung einer möglichst fruchtbaren Beziehung der Unterrichtsgegenstände unter einander.

4. Ausbildung einer zweckentsprechenden Lehrweise in jedem Fache.

5. Herbeiführung einer besseren theoretischen und praktischen Vorbildung der Lehrer für das höhere Lehramt."

Aber diese Bedingungen verstehen sich doch für jede gute höhere Schule von selbst und sind gar nicht ein Monopol der Einheitsschule! Hierin und in der ungeheuren Überbürdung (mit Deutsch: im Ganzen fünf Sprachen!) liegt schon der Todeskeim dieser Neugeburt. Zudem trägt diese neue Schule viel zu wenig den exakten Unterrichtsfächern und somit den Forderungen des Realgymnasiums Rechnung. Denn die Schule, welche der Redner vor den Ohren seiner Zuhörer aufbauete, war nichts weiter als eine wenig verbesserte Auflage unsers gegenwärtigen Gymnasiums, in welchem bezüglich der beiden Hauptgruppen der Lehrgegenstände dasselbe ungerechte Verhältnis (4 : 1 oder höchstens 3 : 1) wie früher sich vorfand. Der Hr. Vortragende gab das auch am Schlusse seiner Rede zu in den Worten: „Hiernach würde allerdings die künftige Einheitsschule dem Gymnasium weit ähnlicher sehen, als dem gegenwärtigen Realgymnasium."

Nachdem der Redner unter Beifallsbezeugungen geendet hatte, wurde der Meinungskampf (d. Diskussion) eröffnet. An demselben nahmen leider sehr wenige teil, und was vorgebracht wurde, war in bezug auf das Wesentliche des Themas, nämlich die Möglichkeit der Einheitsschule,

---

*) Z. B. daſs manche „Gebildete" einen Apfelbaum nicht von einem Birnbaum unterscheiden könnten, wenn nicht gerade Früchte daran hingen u. v. a.

**) Derselbe erscheint vermutlich in den Fricksehen „Lehrproben".

belanglos; man konnte somit die Diskussion als unfruchtbar bezeichnen. Das war sehr zu bedauern. Einiges Interesse erweckte der Widerspruch eines Herrn gegen die im Vortrage belobte angebliche neue Methode der Behandlung der Naturgeschichte in Gruppen oder sogen. „Gemeinschaften" („Der Dorfteich" von Junge u. a.), eine Methode, die gegenwärtig als eine Art neues Evangelium bei den Naturgeschichtslehrern Deutschlands auftritt und besonders von Seminarlehrern gepflegt wird und über die wir in ds. unsrer Ztschr. uns noch auszusprechen haben, da sie so recht eigentlich vor unser Forum gehört.

Nach einer Pause hielt Hr. Universitätsprofessor Dr. Lothar Meyer aus Tübingen seinen oben bezeichneten Vortrag, allerdings vor einem weit weniger zahlreichen Publikum. Was dieser Herr vorbrachte, war durchaus nicht neu. Es waren die alten Klagen über die mangelhafte Vorbildung der Gymnasiasten, welche sich auf der Universität der Medizin oder den Naturwissenschaften widmen; die geringe Schulung im mathem. Denken (Abscheu vor Formeln!), Unbeholfenheit im Anschauen und Untersuchen naturw. Vorgänge und Unfähigkeit, das Angeschaute graphisch darzustellen. Ferner die Aufgeblasenheit und Blasiertheit der Realgymnasiasten, die „das schon alles gehabt haben" und elementare Vorträge nicht mehr hören wollen.*)

Aber gerade das, was Referent vom Vortragenden erwartet hatte, nämlich: die bessere organische Verbindung der Schule mit der Universität und die Hilfe der Hochschule — blieb aus. Darüber schwieg der Vortragende. Es ist sehr leicht, über die geringen Erfolge der Schule zu klagen, aber schwerer, den Mängeln abzuhelfen. Warum in aller Welt — so frugen wir uns — thun denn die Herren Hochschulprofessoren nicht mehr für die Verbesserung der Lehrmethode, indem sie bei den Unterrichtsverwaltungen auf die endliche Errichtung von Hochschulseminarien (mit Übungsschulen!) die nun schon seit vielen Jahren begehrt sind, dringen? Auch dieser Redner kam zu keinem andern Resultat, als zu einem reorganisierten Gymnasium und es änderte daran auch nichts der sich anknüpfende Meinungsaustausch einiger Zuhörer.

Da der Berichter, in der irrtümlichen Meinung, dafs Gästen zu sprechen nicht gestattet sei, beim 1. Vortrage das Wort nicht erbeten hatte, so holte er dies hier nach. Er bemerkte, dafs das meiste von dem, was der Hr. Vortragende vorgebracht habe, bereits in den 17 Jahrgängen der von ihm gegründeten und herausgegebenen Zeitschrift, wenn auch zerstreut, enthalten sei, ferner, dafs er es für Pflicht der Hochschulprofessoren halte, selber mit Hand ans Werk zu legen zur Beseitigung der gerügten Übelstände; was aber die Möglichkeit der Einheitsschule anlange, so sei er der Ansicht, dafs sie nur möglich sei unter Verzicht auf zwei fremde Sprachen (des Griech. u. Franz.) und unter Erhöhung der Stundenzahl für die mathem.-naturw. Lehrfächer.**) Das Nähere hierüber ersieht man aus unserem Originalartikel in diesem Hefte, auf den wir deshalb die Leser verweisen.

Und das Resultat unserer Reise? Die Versammlung hatte uns zwar lehrreiche Anregungen gegeben, aber uns doch nicht befriedigt. Wir hielten es daher auch nicht des Opfers wert, in Halle noch den zweiten

---

*) Die Wahrnehmung, dafs Gymn.-Abiturienten zwar anfänglich sich langsamer in die Naturw. fänden, aber in der Folgezeit viel rascher vorwärts kämen und die Realschul-Abiturienten bald überflügelten, eine Erfahrung, die von manchen Hochschulprofessoren (Hankel, Breithaupt u. a.) als eine ausgemachte Thatsache hingestellt wird, schien Redner nicht in dem Mafse gemacht zu haben.

**) Als Kuriosum sei erwähnt, dafs ein (uns unbekannter) Berichterstatter des Leipziger Tageblattes in Nr. 106, Beil. I seinen kurzen Bericht mit den Worten schlofs: „und hielt der bekannte sächsische Schulmann Hr. Hoffmann 6 (sechs) Stunden für Mathematik und Naturw. für ausreichend", was den Verfasser ds. Berichts in Nr. 109, IV. Beil. des gen. Blattes zu einer Berichtigung nötigte.

Versammlungstag abzuwarten, an dem, nach dem Ausfalle des Körtingschen Vortrags, nur noch das Hornemannsche Thema*) behandelt werden sollte und kehrten (nach einem Besuche des neuen prachtvollen Theaters) am Abend desselben Tages nach Leipzig zurück.**) —

Der lateinische Aufsatz.***)

Von W. Ottfried.

Kürzlich kam mir ein Aufsatz in die Hand: „Über Zweck und Ziel des lateinischen Unterrichts an Gymnasien." Er war mir im hohen Grade interessant; lebhaft traten mir beim Durchlesen desselben jene Zeiten vor die Seele, in der ich noch die Schulbänke drückte und die Schulbänke mich, und alte Geister wurden wieder wach.

Doch nicht alles, was der geehrte Herr Verfasser mitteilt, möchte ich unterschreiben, insbesondere kann ich mich nicht seinen Ansichten über den hohen Wert des lateinischen Aufsatzes anschliefsen, in welchen derselbe als ein vorzügliches Mittel für die geistige Gymnastik, für die logische Schulung des Verstandes hingestellt wird.

Nun, wäre dies wirklich der Fall, warum ist denn der lateinische Aufsatz an den höheren Schulen in Elsafs-Lothringen beseitigt worden? Warum geht die „Schulordnung für die Studienanstalten im Königreich Bayern" stillschweigend über ihn hinweg? Warum endlich hört man selbst aus den Kreisen der Fachlehrer Stimmen, die sich für seine Abschaffung aussprechen?

Doch die Meinung Anderer ist für mich nicht mafsgebend. Das Urteil, das ich mir über den Wert des lateinischen Aufsatzes gebildet habe, beruht auf eigenen Erfahrungen, und diese mögen im folgenden kurz wiedergegeben werden. Ist doch jedem gestattet, seine Meinung frei zu äufsern, vor allem in solchen Fragen, in denen das Urteil des „Fachmannes" nicht schwerer wiegt als das des „Nichtfachmanns"; ja fast könnte man hier das Umgekehrte behaupten. Denn einem Altphilologen, welcher aus jener Übung im Lateinschreiben für sein späteres Leben Vorteil zieht und der überdies den alten Sprachen begeistert anhängt, wird es ungleich schwerer werden, rein sachlich über dessen allgemein bildenden Wert zu urteilen, als demjenigen, welcher sich später anderen Fächern zuwendet.

An der Schule, welche ich ehemals besuchte, wurden die ersten lateinischen Aufsätze in Untersekunda angefertigt. „Kurze Sätze" war hier die Losung, welche ausgegeben wurde. Das war ja sehr schön, aber die Sache hatte einen Haken, der Anfängern viel zu schaffen machte: die Verbindung dieser kurzen Sätze unter einander. Man konnte ja doch nicht jeden dritten Satz mit *sed, nam, quam ob rem* anfangen; standen aber die Sätze unverbunden neben einander, so war der Aufsatz natürlich ungenügend. Da verfielen einige Schlauköpfe auf ein gutes Auskunftsmittel: sie stellten sich eine Reihe solcher Satzverbindungswörter zusammen, und nun wurde lustig darauf losgearbeitet, bis alle Partikeln dieser Reihe verbraucht waren — dann fing die Geschichte von vorn an.

---

*) Die Behandlung desselben soll übrigens sehr lehrreich und anziehend gewesen sein; wahrscheinlich erscheint der Vortrag ebenfalls in den Frickschen „Lehrproben".

**) Zur Austeilung unter die Mitglieder gelangten u. A. folgende die „Einheitsschule" behandelnden Schriften:

1) Hornemann, die einheitliche höhere Schule (Abdr. aus d. päd. Arch. 1886. Hft. 8).
2) Pfitzner, das christliche Gymnasium. (Parchim 1863.)
3) Vieweger, das Einheitsgymnasium als psychologisches Problem behandelt. (Spremberg 1887.)

***) Aus der „Tägl. Rundschau" (Unterhaltungsbeilage) Nr. 67 (1887).

Unbedingt notwendig bei der Anfertigung der Arbeit war übrigens das „*Collectaneum*“, in welchem alle die herrlichen lateinischen Phrasen sorgfältig verzeichnet waren, welche während des Unterrichts vorkamen. Davon mufste natürlich möglichst viel in den Aufsatz hineingepackt werden, je mehr desto besser. Das war nicht immer leicht, aber bei einigem guten Willen ging es doch, nötigenfalls auf Kosten des Inhalts. Aber das verschlug nichts. Hatten wir doch oft genug erfahren, dafs es bei dem lateinischen Aufsatze nicht auf den Inhalt, sondern auf die Form ankomme, der erstere mufste sich daher der letzteren anbequemen.

In der folgenden Klasse waren die Forderungen des Lateinlehrers ganz andere. Da galt es, Perioden zu bauen, je länger, desto besser — sie kamen vor bis zur Länge einer Seite; und hatte jemand ein solches Kunstwerk fertig gestellt, so war er stolz darauf, und seine Mitschüler beneideten ihn um seine Geschicklichkeit.

Mindestens drei Vierteile sämmtlicher Aufsätze begannen mit einer abgedroschenen Phrase, wie z. B. *inter omnes constat* (es ist eine ausgemachte Sache), *quis est, qui nesciat**) (wer ist, der nicht weifs) und dann folgte eine Behauptung, die meist auf so schwachen Füfsen stand, dafs sie kaum durch jene energische Stütze über Wasser gehalten werden konnte. Andere begannen mit *Cogitanti mihi* (als ich darüber nachdachte), womit übrigens nie gesagt sein sollte, dafs der Verfasser wirklich einmal einen selbständigen Gedanken gehabt hätte, es klang dies aber gut und wurde darum häufig angewendet u. s. f. — Und der Schlufs? Ja, der war schwierig, denn: Ende gut, alles gut; ein guter Schlufs macht immer einen günstigen Eindruck und beeinflufst die Zensur mehr, als ein guter Anfang. Nun, Noth macht erfinderisch. Wer Gelegenheit dazu hatte, verjüngte die Schlufssätze aus älteren, günstig beurteilten Arbeiten; andere appellierten an die patriotische Schwärmerei des Klassenlehrers und schlossen mit einem Aufruf an die deutschen Jünglinge: *Vos denique oro atque obsecro, milites et defensores patriae nostrae carissimae, ne animis deficiatis his dubiis formidulosisque temporibus* (die Zeiten waren damals nicht im geringsten *formidulosa*, sondern ausnehmend ruhig und friedlich), *si forte in bello e pugna victi discedatis, ne perterriti salute desperata vos nosque omnes victori in potestatem tradatis; tum animos advertatis ad Graecorum fortitudinem, quanta virtute pro patria pugnaverint, et certetis, neve prius finem faciatis aggrediendi, quam portaveritis victoriam, patriaeque libertatem servaveritis; tum nomine digni eritis virorum, Germanorum!* (Schliefslich bitte und beschwöre ich euch, Krieger und Verteidiger unseres teuren Vaterlandes, dafs Ihr nicht den Mut sinken lasset in diesen unsicheren, Grausen erregenden Zeiten, wenn Ihr vielleicht im Kriege besiegt das Schlachtfeld verlafst, dafs ihr nicht an der Rettung verzweifelt und euch und uns alle dem Sieger in die Hände liefert. Dann blickt hin auf die Tapferkeit der Griechen, sehet, mit welchem Mute sie für ihr Vaterland gekämpft haben; eifert ihnen nach und wanket nicht bis Ihr den Sieg davongetragen und das Vaterland befreit habt. Dann seid Ihr würdig des Namens Männer! Deutsche!) — Diesen Schlufs, den ich übrigens nicht einmal selbst verbrochen zu haben glaube, finde ich in zwei mir vorliegenden Aufsätzen, die ganz verschiedene Themata behandeln; in keinem Fall hat der beurteilende Lehrer auch nur eine Bemerkung über diesen an den Haaren herbeigezogenen Schlufsgedanken fallen lassen, es kam ja bei der Beurteilung des Aufsatzes nicht auf den Inhalt an, sondern nur auf den lateinischen Stil.

Ja, dieser lateinische Stil, ob der wirklich durch die Arbeit so sehr

---

**) Diese Phrase ist wie das französische „*chaque sait*“ um so einfältiger, als in 9 von 10 Fällen man darauf wetten kann, dafs es eben noch lange nicht „jeder weifs“! Es ist also darin eine Übertreibung (Hyperbel). Wenn die Rhetorik solchen Redeschmuck lehrt, so setzt sie natürlich voraus, dafs er passend angewandt werde. Besser schon ist: „Sollte vielleicht jemand etc. nicht wissen etc.?“ als das zuversichtliche „wer wüfste nicht?“

gefördert wurde? Ich erinnere hier an die Schwierigkeiten, welche erwiesenermaſsen selbst Schüler höherer Klassen zu überwinden haben, um einen leidlich lesbaren **deutschen** Aufsatz zu schreiben, um sich in ihrer Muttersprache, die sie den ganzen Tag über üben, in der sie zahlreiche Werke lesen, in der sie auch Unterricht empfangen, nur einigermaſsen flieſsend auszudrücken; und nun sollen sie sich durch jährlich etwa 2—3 Aufsätze in einer Sprache einen guten Stil aneignen, die sie nur soweit beherrschen, um mit einiger Kraftanstrengung und mit Hilfe des Lexikons die Schriftsteller in das Deutsche übersetzen zu können? Ja, man könnte hier sogar die Frage aufwerfen: ist denn wohl jeder Lehrer, der lateinischen Unterricht erteilt, auch wirklich im stande, zu beurteilen, was guter lateinischer Stil ist und was nicht?

Aus dem Elsaſs drang seiner Zeit das Gerücht, daſs auſser anderem auch der Zweifel an dieser Befähigung der Lehrer die obere Schulbehörde bestimmt habe, den lateinischen Aufsatz zu beseitigen. Ob dies mehr ist als ein Gerücht, bleibe dahingestellt. Daſs aber derartige Zweifel nicht ganz unberechtigt sind, scheint mir aus den Urteilen über mehrere meiner lateinischen Aufsätze hervorzugehen, die mir noch vorliegen. Einer derselben wurde von dem Klassenlehrer der Unterprima mit folgenden Worten beurteilt: *Quamquam in ipsa quaestione tractanda initio paullum aberravisti, tamen haec propter emendatum et facile dicendi genus merito laudanda sunt* (Obwohl Du bei Behandlung der Frage selbst anfangs ein wenig abgeschweift bist, so ist diese Arbeit doch wegen der fehlerfreien und leichten Darstellungsweise mit Recht zu loben). — Von dem nächsten Aufsatz in der folgenden Klasse weiſs ich nur noch anzugeben, daſs er sehr schlecht beurteilt war und darum von mir vernichtet wurde. Daſs dem so ist, geht aus der Beurteilung des darauf folgenden hervor, in welcher unter Anerkennung eines „erfreulichen" Fortschritts hervorgehoben wird, daſs derselbe „nicht unlateinisch" geschrieben sei. — Es lieſse sich vermuten, daſs auf letzteren vielleicht weniger Arbeit verwandt worden sei, doch ist dies kaum anzunehmen, da die letzten Arbeiten vor der Abgangsprüfung wohl von keinem Schüler über das Knie gebrochen werden. Beide im Vorhergehenden erwähnten Lehrer waren übrigens überaus tüchtige Männer in ihrem Fache, standen als Altphilologen weithin in gutem Rufe — und trotzdem, welche Abweichung in ihrem Urteile über den lateinischen Stil!

Daſs ein solches Zusammenstoppeln*) eines lateinischen Aufsatzes, wie es oben geschildert wurde, keine geistige Gymnastik genannt werden kann, leuchtet ein. Viel mehr kann man hier von einer vorzüglichen Übung reden, die Inhaltslosigkeit einer Rede durch leere, schwülstige Phrasen zu verdecken. Wurde doch dem Schreiber dieses bei Abfassung einer Gelegenheitsrede, zu welcher der gegebene Stoff äuſserst dürftig war, von einem sehr würdigen und hochverdienten Lehrer in allem Ernste der Rat erteilt, dieselbe in lateinischer Sprache zu halten, weil man in letzterer mit Phrasen die Inhaltslosigkeit verdecken könnte! — Von leerer Phrasendrescherei bis zur Unwahrheit und Heuchelei ist aber nur ein kleiner Schritt!

Ich weiſs sehr wohl, man wird hiergegen einwenden: „Lieber Freund: was Du da mitteilst, beweiſst nur, daſs Du Deine Pflicht grenzenlos vernachlässigt hast, denn so wie Du angiebst, sollen und dürfen die latei-

---

*) Diese Kunst haben auch wir vor ca. 40 J. als Alumnus und Quartaner der Kreuzschule (unter Rektor Gröbel) üben sehen. Ein als groſser Lateiner angesehener Currendaner und Primaner, der das „*Officium*" hatte die lat. Arbeiten einzusammeln und dem betr. Lehrer zu überbringen, fertigte häufig die seinige nach der Schule in unserer „Kammer" oder „Zelle", also gerade noch vor Thorschluſs. Er muſste sonach ein wahrer Virtuos im lat. Schreiben sein. Wir besitzen auch noch einige Hefte eines später nach Amerika gegangenen und dort verstorbenen nahen Verwandten, welcher als abgegangener Meiſsener Fürstenschüler auf der Kreuzschule mit seinem Latein „florierte". Wir finden darin dieselben Phrasen w. o. und so ganz die Mitteilungen des Verfassers bestätigt. D. Red.

nischen Aufsätze gar nicht gemacht werden." — Aber ich kann nur entgegnen: so wurden sie damals, zu meiner Zeit, gemacht — und zwar an einer Schule, welche wegen der Gründlichkeit, mit welcher an ihr die klassischen Sprachen betrieben wurden, weithin berühmt war — und nicht von mir allein, auch nicht von einigen wenigen, sondern von der weit überwiegenden Mehrzahl der Schüler. Möglich, dafs es jetzt etwas anders geworden ist, viel aber jedenfalls nicht; denn so viel ich mich an anderen Schulen davon zu überzeugen Gelegenheit gehabt habe, sind bei Lehrern und Schülern dieselben Grundsätze noch jetzt mafsgebend. Wird doch erst noch ganz kürzlich (Direktorenversammlung von Ost- und Westpreufsen) von einem Fachmanne in allem Ernst die Satzung aufgestellt: „Von Quarta ab ist auch auf Aneignung eines geeigneten Phrasenschatzes hinzuwirken. Auf der Mittelstufe diktiert der Lehrer die Phrasen, auf der Oberstufe sind die Schüler anzuleiten, sich eigene Sammlungen nach bestimmten Kategorien anzulegen."

Nun aber eine andere Frage. Welches ist der G e w i n n, den ich dem lateinischen Aufsatze einzig und allein verdanke, den ich also nicht etwa auch auf anderem, leichterem Wege hätte erreichen können? — „Eine gröfsere Fertigkeit im Gebrauch der lateinischen Sprache." — Nun gut! Diese kommt entschieden dem späteren Altphilologen zu Gute, aber es kann doch nicht jeder Altphilologe werden; und was nützt sie den anderen, die sich später durchaus anderen Fächern zuwenden? — Keinesfalls steht dieser Gewinn im richtigen Verhältnis zu dem Verlust an Zeit, die auf das Lateinschreiben verwandt werden mufs, zu der kostbaren, ja unersetzlichen Zeit des frischen, leicht empfänglichen Jugendalters. Was hätte ich in derselben an Stelle dieser unnützen Floskelndreherei alles lernen können!

Z u n ä c h s t d i e n e u e r e n S p r a c h e n! Ich habe — wie jeder andere gebildete Mensch — das Bedürfnis, an dem Kulturleben unserer Nachbarvölker Teil zu nehmen; aber kann ich dies bei den Kenntnissen, die ich dem Gymnasium verdanke? Es wäre nun unbillig, zu hohe Anforderungen an die Schule stellen zu wollen, die Schule kann unmöglich a l l e s lehren, v i e l e s mufs der eignen, späteren Thätigkeit überlassen bleiben. Aber d a s mufs man doch von ihr verlangen, dafs sie ihre Zöglinge befähigt, selbständig die Lücken in ihrer Bildung auszufüllen, sich ohne allzu viel Anstrengung in irgend ein wissenschaftliches Gebiet hineinzuarbeiten. Ist dies aber z. B. bei der englischen Sprache möglich selbst bei hervorragenden Kenntnissen des Lateins? Allerdings wird oft leicht genug behauptet, „wer Latein versteht, lernt die neueren Sprachen im Handumdrehen", — ich wüfste aber keinen meiner Altersgenossen zu nennen, der nicht späterhin ein gut Teil Zeit und Geld hätte opfern müssen, um nachzuholen, was die Schule versäumt hatte. Wer aber verfügt stets über beides? Wie viele müssen besonders wegen Mangel an Zeit auf die Aneignung dieser Kenntnisse verzichten, und wer über Zeit und Geld verfügt, dem fehlt es, besonders in kleineren Städten, oft genug an guter Gelegenheit.

Weiter aber empfinde ich als schwere Lücke in meiner Vorbildung: d i e m a n g e l n d e K u n s t f e r t i g k e i t i m Z e i c h n e n, mehr aber noch als diese: d i e g e r i n g e F ä h i g k e i t, s e l b s t ä n d i g z u b e o b a c h t e n. Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr; wer nicht von Jugend auf daran gewöhnt wird, selbständig zu beobachten und aus dem Beobachteten sein Urteil zu bilden, dem wird es später ungeheuer schwer, diese Lücke auszufüllen. Denn ganz besonders gilt hier, was im Allgemeinen von jeder anderen Geisteskraft gilt: wenn sie nicht geübt wird, bleibt sie nicht auf ihrem anfänglichen Standpunkte stehen, sondern geht immer mehr und mehr zurück. Dasselbe gilt auch von der Raumanschauung, die anerzogen sein will, und, wenn in der Jugend vernachlässigt, sich nicht in vollem Umfange nachholen läfst. — Tritt aber schon in den

unteren Klassen des Gymnasiums das selbständige Beobachten gegen das Aneignen der Kenntnisse aus Büchern wesentlich zurück, so noch mehr in den oberen Klassen, wo das Bücherstudium alles Andere überwuchert. Ohne Zweifel ist nicht zum geringsten Teile auf diese Art der Vorbildung die gröfsere oder geringere Unbeholfenheit und Schwerfälligkeit zu schieben, welche so viele höher Gebildete — besonders die Gelehrten, von deren Ideale sie nach deutschen Anschauungen unzertrennlich sind — in praktischen Dingen, zu deren Beurteilung eigentlich weiter nichts gehört als ein gesunder Verstand und ein geübtes Auge, an den Tag legen. Idealismus nennt man gern diesen Abscheu vor allen Dingen, welche das praktische Leben betreffen, es wurzelt dieser Idealismus aber in dem Gefühle der Ohnmacht gegenüber dem praktischen Leben. Aber es werden auch noch andere Anforderungen an die Schule gestellt. Als vor etwa 10 Jahren vom preufsischen Kultusminister eine Anfrage an die Ärzte erging, ob die Realschulabiturienten zum Studium der Medizin zuzulassen seien, wurde dies von der Mehrzahl der Ärzte zwar verneint, von vielen aber nur unter der Voraussetzung, dafs auf den Gymnasien in Zukunft die naturwissenschaftlichen Fächer mehr getrieben würden, als bisher. Aber auch aufserdem noch, früher und später, haben sich viele Stimmen mit der gleichen Forderung erhoben. — Wem bangt dabei nicht für das körperliche Wohl unserer Jugend? Schon jetzt wird über Überbürdung geklagt, welche dem Schüler nicht genügend freie Zeit zur Erholung des Geistes und Körpers lasse, und gerade in den Jahren der Entwickelung, in denen dies am notwendigsten erscheint — und nun soll diese Last noch vergröfsert werden?

Nein! Wenn oder vielmehr da auf die unabweisbaren Forderungen des Lebens unbedingt Rücksicht zu nehmen ist, so mufs an den Schulen auch für sie Platz geschafft werden, d. h. es sind solche Arbeiten zu beseitigen, die am leichtesten entbehrlich sind — und das ist in erster Linie der lateinische Aufsatz, dessen Wert für die „allgemeine Bildung“ nur sehr gering ist, und dessen Zweck in jetziger Zeit, in der das Latein längst nicht mehr wie früher als die Sprache der Gelehrten gilt, nicht ersichtlich ist.

Das Urteil eines Amerikaners über das Griechische.*)

Von Dir. Dr. Krumme-Braunschweig.

Die Rede, deren Grundgedanken nachstehend dargelegt sind, wurde 1883 von Charles Francis Adams jr.**) vor einem Kapitel der Phi Beta Kappa-Brüderschaft in Cambridge Mass. gehalten und unter dem Titel „A college fetich“ (ein Schulgötze)***) veröffentlicht. Sie machte in Amerika ein solches Aufsehen, dafs sie in Jahresfrist drei Auflagen erlebte und hat sicherlich nicht wenig zu der am Schlusse erwähnten wichtigen Änderung in den Aufnahmebedingungen für die Harvard-Universität in Cambridge beigetragen.

Die genannte Brüderschaft wurde 1776 gegründet. Sie besteht ausschliefslich aus Männern von hohem gesellschaftlichen Ansehen und hat Kapitel an vielen amerikanischen Universitäten, so auch an der Harvard-Universität in Cambridge bei Boston. Die jährlich hier stattfindenden

---

*) Mit Zustimmung des Verfassers abgedruckt aus d. Tägl. Rundschau, Unterhaltungs-Beilage Nr. 93 (1887).

**) Adams widmete sich zuerst der Rechtswissenschaft und machte dann den grofsen amerikanischen Krieg als Kavallerie-Offizier mit. Jetzt ist er Präsident einer der grofsen Eisenbahnen, die vom Mississippi nach Kalifornien führen.

***) A college fetich. An adress, delivered before the Harvard Chapter of the fraternity of the Phi Beta Kappa. By Charles Francis Adams jr. Boston: Lee and Shephard. New-York: Charles T. Dellingham.

Versammlungen des Kapitels pflegen eine auserlesene Gesellschaft zu vereinigen. Ja, man kann sagen, daſs fast alle groſsen Redner und Dichter Amerikas auf diesen Versammlungen wichtige Tagesfragen behandelt oder Erzeugnisse ihrer Muse vorgetragen haben.

Eine solche wichtige, für Amerika zu jener Zeit und für uns noch heute brennende Tagesfrage erörterte Charles Francis Adams jr. in der vorliegenden Rede. Adams beantwortet auf Grund mehr als 30jähriger in den verschiedensten Stellungen gemachten Erfahrungen die Frage: Hat sich der im wesentlichen auf die alten Sprachen beschränkte Schulunterricht an mir bewährt? Er bespricht dabei ausführlich die Opfer an Zeit und Mühe, welche die Erlernung des Griechischen erfordert hat, weist auf das hin, was er infolge dessen auf der Schule hat versäumen müssen, und stellt dann seine Forderungen für die Zukunft.

„Ich wurde", sagte der Redner nach einigen einleitenden Worten, „in der gewöhnlichen Weise für die Universität vorbereitet. In der Lateinschule lernte ich die lateinische und die griechische Grammatik auswendig und kam allmählich so weit, daſs ich die leichteren Klassiker mit Hilfe eines Wörterbuches verstehen und die grammatischen Regeln mehr oder minder sicher anwenden konnte. Glücklicher Weise fand ich Vergnügen am Lesen, so daſs ich mir dadurch einige Gewandtheit im Gebrauch der Muttersprache erwarb. Ich sage glücklicherweise, denn auf der Schule war für das Englische kein Raum. Eine neuere Sprache ernstlich zu betreiben, hielt man für überflüssig. Wir übersetzten Englisch in höchst zweifelhaftes Griechisch, drückten aber unsere Gedanken in noch schlechterem Englisch aus. Wie wenige von uns waren am Ende unserer Schulzeit imstande, eine Gedankenreihe lückenlos durchzudenken und sie klar und bestimmt auszudrücken. Und doch hätte dieses das Ergebnis unseres Schulunterrichts sein sollen.

Das Griechische soll eine schöne Sprache für den sein, der es gründlich versteht. Das mag sein; ich weiſs es nicht, weil ich es nie gründlich gelernt habe. Das kann ich aber sagen, daſs das Griechische für den, welcher es nur treibt, um zu den Studien zugelassen zu werden, sehr schwer ist. Das Griechische hat ja auch wie alle reichen Sprachen zahlreiche Ausnahmen. Darum ist es das Entzücken der Grammatiker, aber die Verzweiflung jedes anderen. Während des letzten Teils meiner Schulzeit nahm das Griechische die Hälfte aller Zeit weg, so daſs für die übrigen Fächer nur wenig Zeit übrig blieb. In meinem Gedächtnis dämmert das Griechische wie ein Alp auf, der mich lange bedrückt hat. Man lernte auch nur genau so viel, wie man muſste; und nach meinen Erkundigungen ist das heutzutage nicht anders.

Die Zeiten sind eben andere geworden. Die alten Sprachen lagen uns schon weit ferner als unseren Vätern, und der heutigen Welt liegen sie wieder weit ferner als uns in unserer Jugend. Der menschliche Geist beschäftigt sich jetzt mit ganz anderen Dingen und hat ganz andere Aufgaben, als ehedem. Insbesondere findet die Beschäftigung mit den Naturwissenschaften im Altertum keinerlei Anknüpfungspunkte. Die Welt wendet sich deshalb mehr und mehr vom Altertum ab und den lebenden Quellen zu, wo sie das findet, was sie sucht. Diesem natürlichen Gange der Dinge kann sich die studierende Jugend nicht entziehen, weil sie in der Luft der Gegenwart aufwächst. Ein groſser Teil derselben sieht infolge dessen die alten Sprachen lediglich als ein Mittel an, das den Zugang zur Universität eröffnet. Das sollte seine Wirkung auch auf die Vorbereitungsschule zur Universität ausüben, was indeſs bis jetzt nicht geschehen ist. Man findet überhaupt nach meiner Erfahrung auf keinem Gebiete ein so zähes Festhalten am Alten und Hergebrachten, als auf dem Gebiete der Schule.

Ich für meinen Teil habe das Griechische mit Eifer getrieben und z. B. die Ilias nicht ohne Genuſs von Anfang bis zu Ende gelesen. Aber

ich las Homer wie ein Fremder, der sich mit Mühe im Englischen zurechtfindet, Shakespeare und Milton liest. Welchen Einblick gewinnt ein solcher in die Leidenschaft, den Wohlklang und die Erhabenheit des Lear oder des verlorenen Paradieses? Welchen Einblick in Homer habe ich erhalten? Und da soll man mir doch nicht sagen, dafs es möglich ist, einem Haufen Knaben durch Grammatik, Wörterbuch und Übersetzung die Feinheiten einer toten Litteratur zugänglich zu machen!

Sobald ich zur Universität kam, hörte die Beschäftigung mit den alten Sprachen auf, und das Wenige, was ich gewufst hatte, war bald dem Gedächtnis entschwunden. Der Mehrzahl meiner Mitstudierenden erging es nicht besser. Ich habe jetzt sogar das griechische Alphabet vergessen und kenne nicht einmal alle Buchstaben desselben mehr. Das ist das Ergebnis der ungeheuren Arbeit während meiner Schulzeit!

Zuweilen habe ich wohl bedauert, die alten Sprachen nicht beibehalten zu haben. Und doch mufs ich offen gestehen, ich würde es trotzdem nicht thun, wenn ich wieder in der gleichen Lage wäre. Das Leben ist kurz, und ich gehöre der Gegenwart an, in der ich lebe. Das geringe Mafs von Zeit, das mir frei bleibt, benutze ich angenehmer und besser, wenn ich so viel wie möglich Schritt zu halten suche mit dem Gange der Kultur. Kein Mensch kann zwar dieselbe ganz in sich aufnehmen, wenn ich aber wählen soll — und wählen mufs ich — so will ich doch lieber täglich etwas von den Lebendigen lernen als mich mit den Toten beschäftigen Damit will ich übrigens über den Wert der alten Litteratur nichts gesagt haben. Mir und der überwiegenden Mehrzahl meiner Mitschüler ist sie ein versiegeltes Buch geblieben. Wir können weder bestätigen noch leugnen, dafs in den alten Schriftstellern, und nur in diesen, die vorzüglichsten Gedanken in der vollendetsten Form dargestellt sind.

Zur Rechtfertigung des Bestehenden und als Trost wird mir entgegengehalten, dafs ich die Geisteszucht unterschätze, welche durch die Erlernung der griechischen Grammatik und durch die Anwendung der Regeln derselben erworben wird. Das Gedächtnis habe eine Ausbildung erfahren, welche sich, auf andere Dinge angewandt, als sehr wertvoll erwiesen habe. Auch habe die ausgedehnteste Erfahrung gezeigt, dafs diese Ausbildung auf keine andere Weise gleich gut erreicht werden könne. Überdies habe selbst die geringe Beschäftigung mit den Meisterwerken der griechischen Litteratur einen wenn auch nicht greifbaren, darum aber doch sicherlich vorhandenen kostbaren Rückstand hinterlassen. Ich wäre mit einem Worte „ein gebildeter Mensch“, was ich ohne die frühere Beschäftigung mit dem Griechischen nicht sein würde. („Latentes Wissen“ s. Nohl. D. Red.).

Das ist leeres Gerede und die Thatsache, dafs diese Behauptungen tausend mal wiederholt worden sind und immer wieder aufs Neue werden ausgesprochen werden, ändert nichts daran. Zunächst erwidere ich, dafs das Auswendiglernen der griechischen Grammatik durchaus keine bessere Geisteszucht ist als das Auswendiglernen eines anderen gleich schwierigen und für einen Knaben gleich unverständlichen Buches. Dann ist aber auch gedankenloses Auswendiglernen ein zweifelhaftes Unterrichtsmittel. Wir mufsten lange Regeln und noch längere Verzeichnisse von Ausnahmen, die uns „eingepaukt“ worden waren, herunterleiern, als ob wir sie von einer im Geiste angeschauten Tafel abläsen. Viele von meinen Mitschülern können das noch heute; es ist aber auch das einzige, was sie vom Griechischen behalten haben.

Das Beobachten und die Übung der Sinne blieben nicht blofs unausgebildet. Sie wurden sogar systematisch unterdrückt, denn, wenn sie sich einmal hervorwagten, so wurden sie mit Gewalt zurückgedrängt. Mit der Ausbildung der Raumanschauung und mit dem Zeichnen, dem Mittel, Angeschautes darzustellen und wiederzugeben, ging es nicht besser.

Nun ist ja die Fähigkeit, auswendig Gelerntes wörtlich festzuhalten, nicht so ganz zu unterschätzen, aber ungleich wertvoller für das Leben

ist die Übung im Beobachten und in der richtigen Deutung des Beobachteten. Was durch den Unterricht in der Mathematik und in den Naturwissenschaften hätte erreicht werden sollen, suchte man vergeblich durch das Griechische zu erzielen. Daſs also das Auswendiglernen von Regeln und Wörtern eine besonders wertvolle Geisteszucht sei, muſs ich durchaus bestreiten.

Nicht besser steht es mit dem unfaſsbaren kostbaren Rückstande, der im späteren Denken und Thun der Schüler in ähnlicher Weise zur Erscheinung kommen soll wie der aufs Feld gestreute Dünger später in der Ernte. Damit indeſs der Dünger seine Wirkung thue, muſs er mit dem Boden verarbeitet werden, so daſs beide sich gegenseitig durchdringen. Es genügt aber durchaus nicht, daſs man den Dünger auf dem Felde auf- und abfährt, so daſs höchstens der Geruch des Düngers dem Boden sich mitteilt.

Viele von Ihnen haben das Studium der Naturwissenschaften zu ihrem Berufe erwählt, andere das der Sprachen, noch andere gehören dem Gewerbestande an. Welches aber auch Ihr Beruf sein mag, Sie werden mir zugeben, daſs keine Wissenschaft, der praktische Teil der Rechtswissenschaft vielleicht ausgenommen, in einer lebenden Sprache (Englisch) und in den beiden toten Sprachen gründlich studiert werden kann. Wer nicht wenigstens Deutsch und Französisch lesen, schreiben und sprechen kann, wird das stets als einen Mangel empfinden, weil ihm die Ergebnisse fremder Forscher unzugänglich sind.

In der Vorbereitungsschule werden nun die neueren fremden Sprachen gerade dann nicht gelehrt, wenn man sie sich am leichtesten aneignet. Die Schularbeiten nehmen die Zeit des Knaben fast vollständig in Anspruch, und es wäre unrecht, von einem gesunden Knaben zu verlangen, daſs er neben der Schule noch neuere Sprachen treiben soll. Geschieht das dennoch, so wird der Knabe bald nicht mehr gesund sein. Auch wird er auf diese Weise die neueren Sprachen sich nicht gründlich aneignen. Mir genügt nämlich durchaus nicht, daſs meine Kinder eine solche Kenntnis der neueren Sprachen von der Schule mitnehmen, wie man sie zu meiner Zeit im Lateinischen und Griechischen beim Abgange von der Schule hatte und auch wohl noch heute hat. Ich verlange, daſs jemand die die neueren Sprachen lesen, schreiben und sprechen kann, daſs er sie mit einem Worte beherrscht und als stets bereites Werkzeug zur Hand hat. Das erfordert aber viel Zeit und Kraft und kann nicht so nebenbei abgemacht werden."

Adams weist dann noch auf die gleichen Erfahrungen hin, welche er in seiner Familie gemacht hat, und bespricht den Bildungsgang von John Adams, dem zweiten Präsidenten der Vereinigten Staaten, und von John Quincy Adams, dem sechsten Präsidenten. Von seinem Vater, der von 1861—1868 amerikanischer Gesandter in London war, sagt der Redner, derselbe habe zwar das Griechische beibehalten, ohne jedoch jemals irgend eine nennenswerte Fertigkeit darin zu erlangen. „Wenn mein Vater mir bei meinen griechischen Schularbeiten half, so kam ich mir vor wie ein Blinder, den jemand führt, der nicht ordentlich sehen kann."

Die Erfahrungen an seinen drei Brüdern waren nicht anders. Von einem derselben sagt der Redner: „Als seine Söhne heranwuchsen und er sie bei ihren Arbeiten beobachtete, übersah er das Feld seiner eigenen Erfahrungen, und die Augen gingen ihm auf. Mit Geringschätzung blickte er auf die Bruchstücke an Kenntnissen in den alten Sprachen herab, die ihn in den Augen der Menge zu einem „gebildeten" Manne machten. Dennoch opferte er auf das strenge Geheiſs der Alma Mater auch seine Kinder dem Götzen."

Der Redner giebt dann das Ergebnis seiner Erfahrungen an sich selbst: „Der Unterricht, den ich auf der Schule genossen habe, ist für mich ein Hindernis gewesen, meinen Lebenslauf in seinem ganzen Umfange zu er-

füllen. Was ich hätte wissen sollen, hat mich die Schule nicht gelehrt; aber es ist zu spät, um das Versäumte nachzuholen und mir dasselbe vollständig zu eigen zu machen. So weit ich imstande bin, es zu beurteilen, ist die Zeit, welche ich auf das Griechische habe verwenden müssen, so gut wie verloren gewesen. Aber das Übel ist nun einmal da und läfst sich nicht mehr beseitigen. Auch ich bin ein Opfer des Götzendienstes, aber ich will kein schweigendes sein, sondern ich will meine Beschwerde hier an der Schwelle der Universität niederlegen.

Freilich werden mir manche Lehrer sagen: „Du weifst nicht, welches die Aufgabe der Schule ist und was die Schule ihren Zöglingen ins Leben mitzugeben hat.“ Darauf kann ich, der ich über zwanzig Jahre im Leben thätig gewesen bin, nur antworten, dafs diese Herren sich mit ihrer Ansicht über die Aufgabe der Schule in einem ernsten und verhängnisvollen Irrtum befinden. Das Leben besteht nicht aus Theorien, sondern aus Thatsachen, und zwar aus recht harten.“

Der Redner verwahrt sich nun auf das Entschiedenste dagegen, dafs es ihm lediglich um die Aneignung direkt verwertbarer Kenntnisse zu thun sei und dafs er dem nackten Nützlichkeitsgrundsatze huldige. Auch wünscht er durchaus nicht die Beseitigung des Griechischen aus der Reihe der Unterrichts- bezw. Prüfungsgegenstände. Er verallgemeinert seine Erfahrungen keineswegs, sondern dehnt sie nur auf diejenigen aus, welche keine Begabung und Neigung zur Erlernung der alten Sprachen haben, in anderen Fächern aber tüchtiges leisten. Diese werden sicherlich einen Beruf wählen, welcher die Beschäftigung mit dem Griechischen nicht verlangt. Sie werden auch auf der Schule nur soviel Griechisch lernen, als sie lernen müssen, und einige Jahre nach dem Abgange von der Schule alles vergessen haben, umsomehr als sie nunmehr das nachzuholen genötigt sind, was sie wegen des Griechischen auf der Schule haben versäumen oder vernachlässigen müssen. Über alles dieses wünscht Adams sich so bestimmt auszudrücken, dafs er nur absichtlich mifsverstanden werden kann.

„Beobachtung und Erfahrung haben mich eine allgemeine, auf breiter Grundlage ruhende Bildung schätzen und bewundern gelehrt, welche der eigentliche Endzweck aller Erziehung ist. Aber verschiedene Wege führen nach Rom, und ich bin der Meinung, das jene allgemeine Bildung sowohl durch die neueren Sprachen als durch die alten erworben werden kann. Ich habe durchaus nichts dagegen, dafs jemand nach wie vor sein Ziel auf dem altgewohnten Wege erreicht — dieser Weg mag ja für diejenigen, welche eine ausgesprochene Neigung und Begabung für die alten Sprachen haben, wirklich der beste sein — ich verlange nur, dafs der Zugang zur Universität auch durch die neueren Sprachen möglich ist.

Altbegründete Interessen sehen in dem Verlangen des Neuen nach blofser Anerkennung einen versteckten Angriff auf ihre Daseinsberechtigung. So legen auch die Verteidiger der ausschliefslichen Berechtigung der alten Sprachen das Verlangen nach Gleichstellung der neueren Sprachen mit den alten sofort als die Absicht aus, die alten Sprachen ganz aus der Schule zu verdrängen. Ich betone daher ganz besonders, dafs ich nur den Geist selbstsüchtiger Ausschliefslichkeit angreife. Der Weg zur Universität soll verbreitert werden und die Schule soll frische Begeisterung auch an den Quellen der gegenwärtigen Kultur schöpfen können. Die alten Sprachen sollen nicht durch die neueren ersetzt werden; ich habe sogar nichts dagegen einzuwenden, dafs jene auch fernerhin in gewissem Sinne bevorzugt werden. Mag man meinetwegen immerhin in den Prüfungen die mehr oder minder oberflächliche Kenntnis des Griechischen der gründlichen Kenntnis zweier neueren Sprachen gleich rechnen; nur soll dieser Vorzug nicht thatsächlich eine ausschliefsliche Herrschaft der

alten Sprachen bedeuten. Wer sich dann künftighin mit Lust und Liebe mit dem Griechischen beschäftigt, wird nicht mehr, wie es jetzt der Fall ist, in seinem Fortschreiten durch das Bleigewicht solcher gehindert, deren Neigungen anderen Fächern zugewandt sind.

Hier könnte und sollte ich vielleicht schliefsen; ich kann das aber nicht, ohne noch einen Gegenstand zur Sprache zu bringen. In meinen Forderungen für die Zukunft habe ich die alten Sprachen gegen die neueren immerhin noch etwas begünstigt. Die letzteren habe ich lediglich als ein unentbehrliches Werkzeug für den Mann der Wissenschaft, als das Mittel für den mündlichen und schriftlichen Ausdruck der Gedanken betrachtet. Die in den Litteraturen der neueren Sprachen aufgehäuften Schätze habe ich dabei aufser Acht gelassen; noch weniger habe ich ihre Meisterwerke mit denen Griechenlands und Roms verglichen. Ich möchte nun nicht, dafs man sich dadurch über meine wirkliche Meinung täusche. Mir scheint vielmehr bei den sogenannten Gebildeten sowohl in Amerika als in Europa bezüglich der Meisterwerke der griechischen und lateinischen Litteratur recht viel Grofsthuerei und Nachsprecherei unterzulaufen. Vieles von dem, was als ein wertvoller Teil der klassischen Litteratur gepriesen wird, würde, wenn es heute in deutscher, französischer oder in englischer Sprache erschiene, kaum vorübergehende Beachtung finden. Mancher unsterbliche Dichter verdankt nach meiner Meinung nur dem Umstande seine Unsterblichkeit, dafs er vor zweitausend Jahren gelebt hat; denn auch eine tote Sprache kann den gänzlichen Mangel an Gedanken und an dichterischem Schwunge nicht verdecken.

Ganz unwiderlegbar aber scheint mir die Behauptung, dafs von Tausend, welche die alten Sprachen treiben, kaum einer diejenige Vertrautheit mit denselben erlangt, um beurteilen zu können, ob ein Erzeugnis der Litteratur ein Meisterwerk ist oder nicht. Betrachten Sie doch nur Ihre eigene Sprache und Litteratur. Bei mir wenigstens hat es, wie ich offen gestehen will, dreifsigjähriger unaufhörlicher und angespannter Thätigkeit des Auges und des Ohrs, der Zunge und der Feder bedurft, bis ich mir diejenige Herrschaft über die englische Sprache erworben habe, welche mich befähigt, die feineren Schönheiten der englischen Litteratur richtig zu würdigen. Nach meiner Meinung können wir auch nur in unserer Muttersprache oder in einer uns gleich geläufigen fremden Sprache diejenige feinere Schattierung des Gedankens, die glückliche Wahl der Worte und diejenige künstlerische Form der Darstellung mit Sicherheit beurteilen, welche das Meisterwerk ausmachen. Viele von Ihnen, die nicht geläufig Französisch und Englisch sprechen, können doch französische und englische Schriftsteller ungleich besser lesen als irgend ein Lebender Griechisch oder, von einigen Professoren abgesehen, Lateinisch lesen kann. Und doch können Sie in den Meisterwerken der französischen und englischen Litteratur nicht dasselbe finden wie diejenigen, deren Muttersprache die französische und englische ist. Diejenige Vertrautheit mit den alten Sprachen also, welche zur richtigen Würdigung ihrer Litteraturen erforderlich ist, kann im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden. Wenn die alten Sprachen darum auch wirklich die Schönheiten enthalten, die sie aufweisen sollen, so müssen dieselben doch allen aufser einigen wenigen Fachleuten verborgen bleiben.

Sind denn aber jene ungewöhnlichen (transcendentale) Schönheiten in den Werken der Alten wirklich vorhanden? Ich habe meine starken Zweifel. Ein zuverlässiges Urteil kann ich nicht abgeben, weil ich eine nur durch Grammatik und Wörterbuch erworbene Kenntnis einer Sprache für eine viel zu ungenügende halte um jene Frage zu beantworten. Man kann aber in diesem Falle, wie es so oft sein mufs, von Bekanntem auf Unbekanntes schliefsen, und da mufs ich doch sagen: je mehr ich über die Frage nachdenke, umsomehr wird es mir unmöglich zu glauben, dafs

an innerem Gehalte die griechische Litteratur der deutschen, die lateinische der französischen gleichkommt. Aber sehen wir einmal von dem inneren Reichtume ab, gibt es in den Werken der Alten einzelne Schönheiten, die höher zu schätzen wären als solche, die wir finden bei Shakespeare, Milton, Bunyan, Clarendon, Addison, Swift, Goldsmith, Gray, Burke, Gibbon, Shelley, Burns, Macaulay, Carlyle, Hawthorne, Thackerey und Tennyson? Wenn es solche Schönheiten gibt, so haben unsere besten Kenner des Altertums mit bedauernswertem Mifserfolge sie ins Englische zu übersetzen versucht.

Was mich betrifft, so kann ich nicht umhin, zu glauben, dafs der Heiligenschein, mit dem man im Lauf der Zeit die Alten umgeben hat, bald verschwinden wird. Indessen ist das Vorurteil noch ziemlich stark. Wer in seiner Jugend Latein und Griechisch gelernt hat, ist ein gebildeter Mann; wer die alten Sprachen nicht gelernt hat, kann auf Bildung keinen Anspruch machen. Das Französische nicht zu verstehen, gilt als blofse Unannehmlichkeit. Ich habe jetzt die Arbeit und das Leben der Menschen in verschiedenen Ländern ein Dritteljahrhundert hindurch kennen gelernt, und da mufs ich doch sagen, mag ich die neueren Sprachen ansehen als ein Mittel, das mich befähigt an dem geistigen Leben des Volkes teilzunehmen, als einen Bestandteil der allgemeinen Bildung, als eine Quelle des Genusses oder als eine Zucht des Geistes, so möchte ich doch ungleich lieber mit der deutschen Sprache und Litteratur vertraut sein, als mit der griechischen. Auch würde ich keinen Augenblick zögern, für meinen Sohn in diesem Sinne zu wählen.

Was ich vom Deutschen im Vergleiche zum Griechischen gesagt habe, gilt auch vom Französischen im Vergleiche zum Lateinischen. Läfst man Autorität und Aberglauben beiseite, so ist es mir unfafsbar, dafs jemand, der genügende Kenntnis der französischen und der lateinischen Litteratur hat, in Bezug auf Reichtum und Schönheit beide auch nur vergleichen kann. Wer in unserer Zeit lieber imstande sein möchte, die Oden des Horaz zu lesen, als sich in der Sprache zu Hause fühlen, welche das Mittel der Verständigung für die Gebildeten aller Völker ist, der mufs nicht im vollen Besitze seiner Geisteskräfte sein.

Und doch kenne ich die Welt zu gut, um nicht zu glauben, dafs die Lebendigen auf die Dauer den Toten nicht werden geopfert werden. Auch der Dienst des klassischen Götzen (classical fetich) naht seinem Ende. Ich werde aber das Bewufstsein haben, nicht ganz umsonst geopfert worden zu sein, wenn das, was ich gesagt habe, dazu beiträgt, dafs Harvard seinen ungeheuren Einflufs nicht länger dazu gebrauchen wird, indirekt, wie es bei mir noch geschehen ist, seinen Zöglingen die Quellen des lebendigen Gedankens zu verstopfen."*)

---

*) Der Wunsch des Redners ist eher in Erfüllung gegangen, als er wahrscheinlich selbst geglaubt hat. Vom Jahre 1887 ab kann bei der Aufnahmeprüfung für die Harvard-Universität Latein oder Griechisch durch andere Fächer ersetzt werden. Dem Vernehmen nach ist diese wichtige Neuerung hauptsächlich das Werk von Charles W. Eliot, dem jetzigen Präsidenten von Harvard. Die mit diesem Jahre ins Leben getretenen Prüfungs-Vorschriften tragen in ausgezeichneter Weise der Eigenart des Einzelnen Rechnung, ohne dafs dadurch eine „Verflachung der Bildung" zu befürchten wäre.

Ansichten eines pädagog. Schriftstellers und Seminardirektors über die Mathematik und die Naturwissenschaften als Lehrgegenstände auf höheren Schulen.*)

In seiner Pädagogik für höhere Lehranstalten (II. T. Gera u. Berlin 1886. Verlag von Th. Hofmann) giebt der Seminardirektor Clemens Nohl in Neuwied a/Rh., u. A. auch einen Lehrplan für Gymnasium und Realgymnasium.**) Hierüber schreibt uns der Herr Einsender folgendes:

Herr Clemens Nohl, Direktor der höheren Mädchenschule nebst Lehrerinnenseminar zu Neuwied, schreibt in seiner Pädagogik für höhere Lehranstalten, Gera und Leipzig, Verlag von Theodor Hofmann, 1887, II. Teil, Seite 552: Es giebt auch ein teilweise latentes Wissen, kraft dessen ein Mensch zwar nicht jede Nebensache beim Namen nennen, auch sie nicht alle an den Fingern herzählen kann, aber alles, was er einmal gründlich gelernt hat, der Hauptsache nach kennt und versteht, über dasselbe an einer gebildeten Unterhaltung sich zu beteiligen, Vorträgen oder schriftstellerischen Ausführungen auf diesem Gebiete zu folgen imstande ist."

Kraft dieses „teilweise latenten Wissens" hat dann offenbar der Schuldirektor Nohl auch den nachstehenden Lehrplan für den naturwissenschaftlichen Unterricht an höheren Lehranstalten entworfen, welcher einzig in seiner Art ist und deshalb allgemeiner bekannt zu werden verdient.

S. 534. Die Naturwissenschaften. a) Naturbeschreibung. Sexta: „1 wöchentliche Stunde." Sommer. Die heimischen Obst- und Waldbäume und die wichtigsten heimischen Nutzpflanzen. Winter. Populäres aus dem Leben wichtiger und interessanter Säugetiere und Vögel. — Quinta: 1 wöchtl. St. S. Heimische Giftpflanzen und wichtige oder interessante auswärtige Pflanzen. W. Populäres aus dem Leben der Amphibien, Fische und der wirbellosen Tiere. — Quarta: 2 wöchtl. St. S. Das Linnésche System. Das Wesentlichste von den Formen der Wurzel, des Stengels, der Blätter u. s. w. Das Wesentlichste aus der Physiologie der Pflanzen. Repetition des Sexta- und Quintapensums. W. Die wichtigsten Mineralien, ihre Gewinnung, Verarbeitung und Verwendung. Repetition des Sexta- und Quintapensums. — Untertertia: 2, auf Gymnasien 1 wöchtl. St. S. Klasse 1 bis 7 nach dem Linnéschen System. W. Anatomie und Physiologie des Menschen. — Obertertia: 2, auf Gymn. 1 wöchtl. St. S. Klasse 8—17 nach Linné. W. Systematischer Unterricht in der Lehre von den Säugetieren und Vögeln. — Untersekunda: 2 resp. 1 wöchtl. St. S. Klasse 18—24 nach Linné. W. Systematischer Unterricht in der Lehre von den Amphibien, Fischen, und den wirbellosen Tieren. — Obersekunda: 1 wöchtl. St. S. Ergänzende Repetition der Physiologie der Pflanzen und der 7 ersten Klassen nach Linné. W. Ergänzende Repetition der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Lehre von den Säugetieren und Vögeln. — Prima: 1 wöchtl. St. S. Ergänzende Repetition der 8—24. Klasse nach Linné. W. Ergänzende

---

*) Eingesandt von einem Gymnasiallehrer. D. Red.

**) Eine Rezension dieses Buches findet man von Th. Gelbe (Stollberg i/S.) im Central-Org. f. d. J. d. R.-W. XV, 19. S. 187 u. f. Dieselbe ist ziemlich anerkennend. Bezüglich unserer Fächer heifst es dort (S. 189): „Die Naturwissenschaften werden in 7 Abschnitten (523—543) recht gut, wenn auch zu knapp behandelt. Die Stoffordnung findet auch hier meinen Beifall nicht ganz. Der 8. Abschnitt Rechnen und Mathematik (S. 544—557) ist gut, doch kommt die Mathematik etwas stiefmütterlich weg." .... „Der 10. Abschnitt handelt vom Zeichnen (567—570) zwar sehr knapp, aber verständig. Die besondere Hervorhebung des linearen Zeichnens findet meinen ungeteilten Beifall." — Wir machen die Leser aufmerksam auf die von uns in d. Z. oft gerügte Einteilung „Rechnen und Mathematik" (Seitenstück: die Satzlehre und Grammatik). Diese Rezension scheint uns doch angesichts des hier Mitgeteilten recht bedenklich! D. Red.

Repetition der Amphibien, Fische und wirbellosen Tiere und der Mineralogie. — Oberprima des Gymnasiums: 1 wöchtl. St. Gröfsere repetitorische Zusammenfassungen aus der gesammten Naturbeschreibung.

b) Naturlehre. α) Physik. Sexta: 1 wöchtl. St. Populäres von den festen, flüssigen und luftförmigen Körpern. Quinta: 1 wöchtl. St. Populäres vom Schall, Licht, Wärme, Magnetismus und Elektricität. — Quarta: 2 wöchtl. St. Von den allgemeinen Eigenschaften der Körper. Von den festen Körpern. — Untertertia: 2 wöchtl. St. Von den flüssigen und luftförmigen Körpern. Vom Schall. — Obertertia: 2 wöchtl. St. Vom Licht und von der Wärme. — Untersekunda: 2 wöchtl. St. Vom Magnetismus, von der Elektricität und von der Elektrodynamik. — Obersekunda: 2 wöchtl. St. Ergänzende Repetition der Lehre von den allgemeinen Eigenschaften der Körper, von festen, flüssigen und luftförmigen Körpern und vom Schall. — Prima: 3 wöchtl. St. Ergänzende Repetition vom Licht, von der Wärme, vom Magnetismus, von der Elektricität und von der Elektrodynamik.

β) Chemie. Obertertia: 1 St. Das Nützlichste und Interessanteste aus der anorganischen Chemie. — Untersekunda: 1 St. Etwas eingehender die organische Chemie. — Obersekunda: 2 St. Die unorganische Chemie systematisch. — Prima: 2 St. Die organische Chemie systematisch.

S. 548. „Wir denken nicht daran, der Mathematik als Lehrgegenstand zu nahe zu treten; aber die ihr auf höheren Unterrichtsanstalten gegebene Ausdehnung müssen wir beschränken, die Legende von ihrer allgemeinen geistschulenden Kraft müssen wir zerstören.“

S. 552. „Wir antworten auf die Frage, wer Mathematik lernen soll: In erster Linie, wer der Kenntnis derselben für seinen künftigen Beruf bedarf; in zweiter Linie die übrigen Schüler, so lange sie sich mit Erfolg an diesem Unterricht zu beteiligen vermögen, von Obersekunda ab aber nur die, welche demselben mit Leichtigkeit folgen können. (! D. Red.)

Nach dem von uns für die verschiedenen Unterrichtsanstalten aufgestellten Lehrplänen (I Teil S. 14. 86. 89. 112) wird von Quarta ab überall in 2, in der Ober-Bürgerschule (Ober-Realschule) für die künftigen Techniker auf den beiden obersten Klassen in 3 wöchtl. St. Mathematikunterricht erteilt.“

S. 554. „Wir haben uns schon im I. Teil S. 95 für Herabminderung der Lehrforderungen in der Mathematik ausgesprochen; wir haben dort auch unserer Überzeugung Ausdruck gegeben, dafs es für die künftigen Techniker wie Nichttechniker förderlich wäre, wenn die letzteren wen gstens von einem Teil des mathematischen Unterrichts entbunden würden. Geschieht dies — und der gesunde Menschenverstand und die Not werden hier schon ihres Amtes warten —, dann kann die geringere Anzahl der Lehrstunden, welche wir der Mathematik anweisen, den künftigen Technikern dieselben Dienste leisten, wie die gröfseren der officiellen Lehrpläne.“

„Wir verlangen mathematischen Unterricht von Quarta bis Untersekunda inkl., allerdings mit der oben angedeuteten Einschränkung, für sämmtliche Schüler, und zwar, wie unsere Lehrpläne zeigen, in je 2 wöchtl. St. Wir unterscheiden hier in der Art zwei konzentrische Kreise, dafs in Quarta, 2 St., eine Auswahl wichtiger Sätze aus der ganzen Planimetrie, in Untertertia, 2 St., Gleichungen des ersten Grades und Quadratwurzeln, in Obertertia, 2 St., die Ergänzung der Planimetrie, planimetrische Aufgaben, und die für die Raumrechnung unerlässlichen Sätze der Stereometrie, in Untersekunda, 2 St., endlich die Gleichungen des zweiten Grades und die Kubikwurzeln durchgenommen, in den beiden letzteren Klassen auch die entsprechenden Pensa der beiden ersteren repetiert werden.“

Was in Obersekunda und Prima neu durchgenommen werden soll

giebt Herr Nohl nicht an, das versteht sich nach seiner Meinung wahrscheinlich von selbst.

S. 557. „Schriftliche häusliche Arbeiten können weder im Rechnen noch in der Mathematik entbehrt werden: doch gilt es Mafs zu halten, und der Lehrer mufs sich bisweilen erkundigen, wie lange die Schüler an einzelnen Aufgaben thätig sind; sonst wird er sich leicht und oft verthun."

S. 556. „Mögen die hier verlangten Einrichtungen auch eine sehr gründliche Prüfung der verschiedenen mathematischen Köpfe notwendig machen; mag falscher Ehrgeiz schwachbeanlagter oder die Trägheit wohl beanlagter Schüler, auch die Eitelkeit oder das Mifstrauen der Eltern die Scheidung zuweilen erschweren und selbst die Richtigkeit derselben hier und da fraglich erscheinen lassen, so sind diese Übelstände doch kaum der Beachtung wert neben den Vorteilen, die sich hier zweifellos ergeben. Man mache nur den Versuch; die ersteren werden mit der Zeit so gut wie verschwinden, die letzteren immer heller und segensreicher zu Tage treten."

NB. Wir empfehlen dem Hrn. Verfasser die Lektüre der ausgezeichneten jüngsten Schrift von Schellbach, „die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien". (Berlin bei Reimer 1887), welche selbst unter den Philologen auf der jüngsten Einheitsschulversammlung in Halle (Ost. 1887) Aufsehen erregt hat. Vgl. unsere Nachschrift S. 264 ds. Hft. D. Red.

Ein Brief des Astronomen Bessel über das höhere Schulwesen.*)

Abdruck aus d. Leipz. Tagebl. Nr. 288 (1886).

Schon lange habe ich gewünscht, Ew. Excellenz einen Gedanken vorzulegen, dessen Ausführung mir von jeher sehr wünschenswert erschienen ist, und welche auch, wenn ich nicht irre, jetzt allgemeiner als früher, für möglich gehalten wird; einen Gedanken, der weder von mir ausgegangen ist, noch um dessen ersten Versuch es sich handelt; den auch Ew. Excellenz eben so genau kennt, als er vorgetragen werden kann. Dieses letztere ist der Grund, weshalb ich nie gewagt habe, Ew. Excellenz damit zu unterhalten. Allein eine zufällig vorkommende Veranlassung trifft mit Ihrem Landaufenthalte zusammen, der wohl eher ein halbes Stündchen, welches zu tieferem Nachdenken nicht geeignet ist, hervorbringen und deshalb zum Durchlesen eines wenn auch nichts neues enthaltenden Briefes verwandt werden mag. Dieses bitte ich Ew. Excellenz zu meiner Entschuldigung gelten zu lassen, wenn mein überflüssiges Schreiben noch dazu zur ungelegenen Zeit kommen sollte.

Es handelt sich um die Ansicht des Schulunterrichtes, „dafs er durch Bildung des Geistes das innere Glück vermehren soll." Dafs auch Ew. Excellenz von dieser Seite wirken, darüber bleibt mir kein Zweifel, denn ich glaube nicht zu irren, wenn ich auch denjenigen Mafsregeln, welche unmittelbar das äufsere Wohl berühren, als auf einen höheren unzweideutigeren Zweck gerichtet ansehe.

Diese Bildung des Geistes kann durch jedes ernstliche wissenschaftliche Studium erlangt werden. Die Philologen, soweit sie es wirklich sind,

---

*) Aus den Papieren des Ministers und Burggrafen von Marienburg, Theodor von Schön. Berlin 1876. Franz Dunker. IV. 468. — Wir bringen den vorstehenden Brief auf Wunsch eines sächsischen Schulmannes zum Abdruck, der uns folgendes schreibt: „Gestatten Sie mir, dafs ich Ihnen hiermit „einen Brief Bessels über das höhere Schulwesen" übersende und um Abdruck desselben in Ihrem geschätzten Blatte höflichst bitte. Ich glaube, dafs derselbe nicht ohne Interesse gelesen werden dürfte, einmal weil er von Bessel, der das Epitheton des „gröfsten seines Jahrhunderts" nur mit Gaufs theilt, herrührt, und weil er zweitens auch wirklich sehr viele gute Gedanken enthält, die in dem gegenwärtigen Streite über das höhere Schulwesen nur klärend wirken können." Die Redaktion des Leipz. Tagebl.

besitzen sie; allein der Grund der Behauptung, dafs sie nur auf dem von ihnen betretenen Wege, d. i. durch das Studium der griechischen und lateinischen Sprache, gefunden werden könne, ist nicht erwiesen und kann bezweifelt werden. Sie behaupten mit der Überzeugung der Wahrheit, und die Schulmänner mit ihnen, dafs wir unsere Bildung den Alten verdanken; allein so wahr dies für die Philologen ist, so unwahr ist es für andere, denn die Griechen könnten in den Dingen, welche sie lernten und jetzt lehren, insofern dieselben einer Fortbildung fähig sind, hundert mal mehr von uns lernen als wir von ihnen. Ich meine im grofsen Reiche der Wahrheit — der Mathematik, und im ebenso grofsen Reiche der Beobachtung — der Natur.

Wollen die Verteidiger der jetzt üblichen Art des Schulunterrichts sich ihrem Vorbilde ganz anschliefsen, so müssen sie nicht die Sprache, sondern die Sachen lehren, womit die Griechen sich beschäftigten, sie werden dann selbst sich nicht an die von den Griechen erreichte Grenze binden wollen. Dieses würde sie aber gerade zu dem führen, was sie nicht wollen. Also die Bildung der Griechen soll erlangt werden, aber auf einem andern Wege, durch griechische und lateinische Sprache. Dieses ist ein Nachhall aus der Zeit, wo wir in den Wissenschaften noch nicht wieder so weit gekommen waren als die Griechen; bei verändertem Verhältnisse mufste gezeigt werden, dafs eine Änderung demnach nachteilig ist.

Die Stimme der Zeit will mehr als griechisch und lateinisch, und es ist vorauszusehen, dafs diese Forderung sich mit dem Laufe der Zeit verstärken wird. Die Schulmänner sind ihr nachzugehen gezwungen worden: sie haben dem Griechischen und Lateinischen etwas Mathematik zugestellt. Ob es ihnen Ernst damit war, oder ob es nur geschah, um dem Drange so weit nachzugeben, dafs ein Schein erzeugt, die lateinische und griechische Schule aber gerettet wurde, kann man beurteilen, wenn man die bessere Rolle der Sprachen auf den Schulen mit der wirklich traurigen der Wissenschaften vergleicht. — Es läfst sich in der That beides nicht vereinigen: unsere lateinischen Schulen können ebenso wenig wissenschaftlich werden, als durch diese etwas anderes erlangt werden kann, als ein Wechsel der Rollen. Einseitigkeit mufs immer bleiben, aber sie ist verschiedener Art. So viele gute und schlechte Schriften das Altertum uns auch hinterlassen haben mag, so vielfältig auch das sein mag, was man daraus hervorsuchen kann — so sind Natur und Mathematik doch unendlich viel reicher; so dafs die Benennung Einseitigkeit für beide einen verschiedenen Sinn erhält.

Vielleicht im Gefühl eines zu grofsen Mifsverständnisses zwischen beiden haben die Schulmänner gesagt, dafs sie den Sprachunterricht als Bildungsmittel für den Verstand angesehen wissen wollen. Dieses ist er wirklich; allein dadurch wird jedem anderen Unterrichtsgegenstande gleiches Recht eingeräumt wird. Wenn daher ein Vorzug der Sprachen stattfinden soll, so kann dieses nur dadurch geschehen, dafs die jetzigen Schulmänner, indem sie die Sprachen besser kennen als anderes, mehr daraus zu ziehen wissen.

Doch zeigt die Erfahrung, dafs ein Entlassener der Schulen nur in sehr seltenen Fällen so weit gebracht werden kann, dafs er den Äschylus so gern zur Hand nehme, wie den Shakespeare oder Walter Scott. Hieraus folgt, dafs die Schwierigkeit der Sprache nicht besiegt wird: das, was in der Sprache gesagt ist, bleibt verschlossen, weil der Leser immer zu der Sprache zurückgewiesen wird. Dieses fortwährende Zurückweisen ermüdet alle und hemmt ihre Geistesthätigkeit und Bildung mit Ausnahme derer, welchen die Sprache selbst Zweck wird. Allen anderen wären mehr Früchte derselben Anstrengung zu wünschen, Früchte, deren Genufs zu weiteren Anstrengungen reizt und

den Zweck des Unterrichts fortwährend vollständiger erscheinen läfst. Wird dem Lernenden die Natur eröffnet und ihm die Mathematik zur Führerin mitgegeben, so ist nicht abzusehen, wo er unfreundlich zurückgewiesen werde könnte.

Die Griechen haben so gelernt, sie haben nicht etwa das Indische so gelehrt wie wir das Griechische. Die Franzosen sind in neuer Zeit denselben Weg gegangen. Auch bei uns soll was im Werke sein.

Allein es stehen grofse Schwierigkeiten im Wege, welche die Einführung von wissenschaftlichen Schulen neben den Sprachschulen vielleicht noch lange verhindern werden. Drei Schwierigkeiten scheinen die hauptsächlichsten zu sein, ich werde sie mit dem, was ich zu ihrer Beseitigung zu sagen weifs, anführen.

1) Wir haben keine Lehrer wie Plato, wie Lagrange. Diese Schwierigkeit ist die gröfste; sie kann nicht allgemein überstiegen werden, zumal nicht am Anfange, wo tüchtige Einsichten in die Mathematik und Physik noch das Eigentum Einzelner sind. Da man demungeachtet einmal anfangen mufs, so kann es nur da geschehen, wo einige Lehrer von Fähigkeit zusammentreffen oder zusammengezogen werden können. In Königsberg sind gegenwärtig drei jüngere Leute, welche mir ganz und selbst ausgezeichnet tüchtig erscheinen. Dieser glückliche Umstand ist die Hauptsache meines Schreibens.

2) Die Einrichtung und Stellung einer solchen Schule. Sie mufs die Wissenschaften zur Hauptsache machen, das Lateinische aber in dieselbe untergeordnete Stelle treten lassen, welche auf unseren jetzigen Schulen jenem eingeräumt wird; ein Buch in dieser Sprache mufs gelesen werden können, weil viel gutes lateinisch geschrieben ist und ferner geschrieben werden mufs, damit es in allen Ländern Europas gelesen werden könne. Sie mufs mit unseren jetzigen Schulen wenigstens gleich stehen, eben so gut zur Universität entlassen, in vielen Fällen den Besuch derselben unnötig machen. Sie mufs nur Schüler von reiferem Alter, vielleicht von 12 Jahren aufnehmen, diese in der Regel bis zum 20. Jahre behalten und während dieser Zeit die Kontrole über die Beschäftigungen ausüben, welche die Universität entbehrt.

3) Das Vorurteil des Publikums gegen eine Neuerung dieser Art. Dagegen ist Geduld das einzige Mittel. In den ersten 10 Jahren wird die Schule das Vorurteil nicht besiegen, zumal da es von den jetzigen Schulmännern mit Überzeugung genährt werden wird.

Wenn diese Schwierigkeiten allgemein gehoben werden könnten, so möchte der Erfolg grofs sein, der Anfang einer neuen Periode für das Glück des Volkes. Später würde alles leichter werden, zumal da man dann einen Teil unserer jetzigen Schulen würde aufheben können. Allein die Schwierigkeiten scheinen mir so grofs, dafs ich nur einen frommen Wunsch ausgesprochen zu haben glaube.

Dem sei indessen wie ihm wolle; wenn richtig ist, was ich auszuführen gesucht habe, so habe ich dadurch die Rechtfertigung gegen Ew. Excellenz, sowie auch die Hoffnung, dafs über kurz oder lang die Wissenschaft des Himmels und der Erde in das Leben des Volkes treten wird, und dafs dereinst Fehler gegen den Euklid, oder falsche Ansichten der Natur, ebenso bezeichnende Andeutungen mangelnder Bildung sein werden als jetzt ein falscher Casus.

Noch einmal bitte ich Ew. Excellenz um Entschuldigung meiner Ergiefsung ohne sichtbare Veranlassung, welche jedoch in Verbindung steht mit der hohen Verehrung, womit ich verharre

Königsberg, den 25. September 1828.

Ew. Excellenz
gehorsamster Diener
F. W. Bessel.

Fragekasten.

44. H. i. Y. „Existiert ein kurzer Abrifs der Geschichte der Mathematik, der das für die Schule Notwendige und Wissenswerte, aber nur das, enthält?

45. B. K. in S. Wo findet sich ein Beweis für die in Sturm: *Cours d'analyse,* Lektion 7 gegebene Formel:

$$(d^i u \varphi^m)^h - m\,(\varphi\, d^i u \varphi^{m-1})^h + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,(\varphi^2 d^i u \varphi^{m-2})^h - \cdots$$
$$\mp m\,(\varphi^{m-1} d^i u \varphi)^h \pm (\varphi^m d^i u)^h = 0,$$

wo u und φ Funktionen von beliebig viel Variablen sind und $ch < m$ sein soll. Die Arbeit von *Prouhet: Mémoire sur quelques formules générales d'analyse* (*Liouville* XXI, 321), auf welche in Sturm hingewiesen wird, ist mir nicht zugänglich.

46. X. i. Y. Im ersten Bande der Vorträge und Reden von H. v. Helmholtz (Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1884) findet man auf S. 45 den Satz:

„Berechnet man die Dichtigkeit der Masse unseres Planetensystems nach der gemachten Annahme (Laplace, Kant) für die Zeit, wo es ein Nebelball war, der bis an die Bahnen der äufserten Planeten reichte, so findet sich, dafs viele Millionen Kubikmeilen erst ein Gran wägbarer Materie enthielten."

Eine angenäherte Berechnung nach den Daten aus: Sim. Newcomb, populäre Astronomie (deutsch von Rud. Engelmann, Leipzig, Wilh. Engelmann 1881) ergiebt aber für 1 Gramm nur 194 863 Kubikmeter. Sollte diese Rechnung ihrerseits nicht auf einem Versehen beruhen, so müfsten die im erwähnten Vortrage enthaltenen Zahlen für den Kraftvorrat unseres Planetensystems korrigiert werden. Wer giebt hierüber Auskunft?

Antwortkasten.

Beantwortung einiger Fragen in Heft 2 dieses Jahrgangs

von Prof. Dr. Stammer in Düsseldorf.

30. (Geschichtliches über Rektifikation etc. des Kreises.) Kurze Notizen giebt Baltzer in seiner Planimetrie (Elemente der Mathem. II.) § 13.

36. (Schaffers Apparat zur Luftprüfung). Desaga in Heidelberg versendet die Anzeige mit der Gebrauchsanweisung. Auf Papier, welches mit Phenolphtalein getränkt ist, läfst man aus dem beigegebenen Fläschchen einen Tropfen Kalklösung fallen, der natürlich einen roten Fleck erzeugt. Die Farbe verschwindet um so rascher, je mehr Kohlensäure in der Luft enthalten ist. Da die Zeit und die Konzentration des Kalkwassers empirisch ermittelt worden sind, so kann man sich den Apparat nicht selbst zusammenstellen. Proben, die ich mit demselben angestellt habe, ohne jedoch den Kohlensäuregehalt auf andere Weise festzustellen, lassen ihn ganz praktisch erscheinen. Der Preis ist 3 Mark.

39. (Archimed. Prinzip betr.) Ähnlich bei einem Vogel, der in einer lufthaltenden Glocke flattert. — Wenn das durch den Fisch verdrängte Wasser im Gefäfse bleibt, nimmt das Gewicht um das Gewicht des Fisches zu. Vgl. Wüllners Physik 1. Aufl. § 70 Ende, S. 198.

40a. (Stahlfedern nicht angreifende Tinte). Da ich seit mehr als 30 Jahren nur selbst dargestellte Tinte gebrauche, so glaube ich von (z. T. aus Versuchen gewonnener) Erfahrung sprechen zu dürfen. Die früher gebräuchliche Galläpfel-Eisentinte war auch sauer, da sie Eisenvitriol neben Gerbsäure, also auch Schwefelsäure enthielt; bei der Alizarintinte wurde sogar, um die Ausscheidung des gerbsauren Eisens zu verhindern,

noch besonders Schwefelsäure zugesetzt. Ich habe an der nach Karmarschs Vorschrift bereiteten Tinte die schädliche Einwirkung auf die Stahlfedern wohl bemerkt. Ich hatte daher versucht, die H_2SO_4 durch Essigsäure zu ersetzen, doch habe ich dadurch nur einmal brauchbare Tinte erhalten. Die Versuche scheiterten an der Schwerlöslichkeit des frisch dargestellten Eisenkarbonats in Essigsäure. Später machte ich nach einer gefundenen Vorschrift die Tinte aus Blauholz und Chromkalialaun. Gegenüber dem Tadel, den Viedt gegen dieselbe ausspricht, habe ich sie ganz vorzüglich gefunden. Sie ist ganz neutral, und das Geschriebene bleibt nach Jahren noch schwarz. Sie hat nur den Übelstand, dafs sie leicht gerinnt (gelatinirt), ohne dafs die Ursache bekannt wäre; auch ist sie sehr umständlich darzustellen, da man das Blauholz mit Wasser kochen und den Auszug filtriren mufs, was nur mit Hilfe der Luftpumpe (Wasserstrahl oder ähnlich) möglich ist. Die Vorschriften, welche Viedt in einer sonst ausgezeichneten Abhandlung in Dingler 217 (Wagners Jahresbericht 1874) giebt, habe ich zum Teil durchprobiert, aber teils sind sie zu umständlich, teils nicht zu empfehlen. Die Tinte aus Blauholzextrakt mit K_2CrO_4 habe ich wiederholt mit dem besten Extrakt versucht: sie schreibt sehr schön blauschwarz, erscheint aber nach einiger Zeit auf dem Papiere grau und wird nicht wieder schwarz. Die damit geschriebenen Büchertitel im Verzeichnis unserer Schulbibliothek zeichnen sich noch heute in häfslicher Weise aus Als ich mich deswegen an Viedt wandte, war er tot. Jetzt bereite ich die Tinte nach einer durch alle technischen Zeitschriften gegangenen, auch in Wagners Jahresbericht enthaltenen Vorschrift aus Blauholzextrakt, Kalkwasser, Salzsäure, Karbolsäure und chromsaurem Kali. Sie hat allerdings den Nachteil, sauer zu sein, schreibt aber gut. Versuche, die Menge der zugesetzten Säure zu verringern, lieferten Tinte, wie die oben bezeichnete; sie schreibt dann grau. Ich bin daher zur Überzeugung gekommen, dafs (aufser der früher angegebenen mit Chromalaun) die Blauholztinte sauer sein mufs. Ich helfe mir jetzt so, dafs ich sie in saurem Zustande in grofsen Flaschen aufhebe, vorm Einfüllen in kleinere Flaschen zum unmittelbaren Gebrauch aber mit Kalkwasser teilweise abstumpfe, soweit dafs sie noch deutlich rot erscheint — ja nicht blau. (Bei Zusatz von Kalkwasser hat man darauf zu achten, dafs die Tinte entweder gleich anfangs wenig Wasser enthalte oder später eingedampft werden mufs, da sie sonst durch das Kalkwasser zu sehr verdünnt, und daher blafs wird.) — Seitdem finde ich nicht, dafs die Stahlfedern sich in auffallender Weise abnutzen; allerdings putze ich sie oberflächlich ab, allein auch unter Umständen, wo ich die Feder mit der Tinte liegen lasse, habe ich kein Rosten bemerkt. Dagegen tritt das Rosten sehr bald ein, wenn man zur Abstumpfung der Säure Ammoniak (Salmiakgeist) verwendet, worauf ich dringend aufmerksam mache, offenbar infolge des gebildeten H_4NCl. In der Schule (Bibliothek) stecke ich die Feder einfach in ein Bürstchen. Versuche, das Bürstchen mit kohlensaurem Kali zu tränken, haben sich nicht bewährt. In Bonn wird Tinte bereitet, die sehr gelobt wird; die Zusammensetzung habe ich nicht ermitteln können; sie enthält Eisen und ist mit Anilinblau oder Indigblau gefärbt und wird als Pulver verkauft. Anilintinte ist ganz neutral und schimmelt nicht, ist aber nicht ganz schwarz, verblafst in der Sonne und läfst sich zum Teil abwischen. — Ich bin zu genaueren Angaben gern bereit.

40b. (Vertreibung des Petroleumgeruchs von den Händen). Der Geruch verschwindet sehr rasch nach dem Abtrocknen, zumal in der Wärme. Alkohol dürfte besser sein als Essig, dann abtrocknen ohne Wasser zu gebrauchen.

Berichtigungen.

In der Anmerkung auf S. 178, Heft 3 des laufenden Jahrgangs dieser Zeitschrift sagt die Redaktion, dafs die Bretschneidersche Tafel der Pythagoreischen Dreiecke in meine Trigonometrie, doch mit Bretschneiders Druckfehlern aufgenommen sei.

Das einzige zur Begründung dieser Aussage angeführte Beispiel enthielt in der ersten, 1868 erschienenen Auflage einen Fehler, der jedoch bereits in der zweiten verbessert wurde. Insbesondere enthält auch keine derjenigen Auflagen, in welchen nach der Angabe: „Anh. 2, S. 29“ der Redaktion ein Fehler gesucht werden könnte, an der angegebenen Stelle eine unrichtige Ziffer. Für die jüngste (5.) Auflage pafst auch das Citat der Seite nicht, ebenso wie auf die erste Auflage, welche jenen Fehler enthielt.

Hamm, 2. Mai 1887. Reidt.

Bemerkung zu vorstehender Berichtigung.

Wir erhielten die Mitteilung über die Fehler in Reidts Trigonometrie von einem Mitarbeiter, von dessen Glaubwürdigkeit wir überzeugt waren. Wir liefsen es aber dabei nicht bewenden, sondern gingen deshalb sogar zweimal auf die hiesige Universitätsbibliothek, um die betreffenden Zahlen mit Bretschneiders Tabelle zu vergleichen. Wir fanden jedesmal die Übereinstimmung und mufsten nun glauben, auch Bretschneider habe noch einen Fehler. Hinterher hat sich nun herausgestellt, dafs unser Gewährsmann sich geirrt hat und dafs sich seine Angabe nur auf die 1. Auflage von Reidts Trigonometrie bezieht (47′ statt 57′).

Dieses Vorkommnis veranlasst uns, an alle Mitarbeiter die **dringende Bitte zu richten, bei Mitteilungen angeblicher Fehler recht vorsichtig und höchst gewissenhaft zu sein**, auch immer die **Auflage des betreffenden Buches zu nennen**, damit wir nicht Interpellationen ausgesetzt sind, welche eigentlich den Einsendern gelten. (Solche Fehler allemal selbst zu prüfen, dazu haben wir nicht Zeit, zumal da hier nicht weniger als sechs Angaben zu prüfen waren). Die Redaktion.

Heft 3, S. 217, Z. 18 v. u. lies „beizubehalten“ statt „beizuhalten“.

Bekanntmachung.

Von den Geschäftsführern der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, welche dahier vom 18. bis 24. September d. J. tagen wird, aufgefordert, haben Unterzeichnete es übernommen, für die

Sektion für Mathematik und Astronomie*)

die vorbereitenden Schritte zu thun. Um den Sitzungen unserer Sektion zahlreichen Besuch und gediegenen Inhalt zuzuführen, beehren wir uns, zur Teilnahme freundlichst einzuladen. Beabsichtigte Vorträge oder Demonstrationen bitten wir frühzeitig bei uns anzumelden. Die Geschäftsführer gedenken Mitte Juli allgemeine Einladungen zu versenden, und wäre es wünschenswert, schon in diesen Einladungen das Programm der Sektionssitzungen wenigstens teilweise veröffentlichen zu können.

Wiesbaden, Mai 1887.

Dr. Kaiser,
Direktor der städtischen Realschule,
Oranienstrafse 5,
Einführender.

August Usener,
ordentl. Lehrer an der städtischen Realschule,
Mainzerstrafse 42,
Schriftführer.

---

*) Soll hierin auch die „Sektion für mathem. u. naturw. Unterricht“ eingeschlossen sein? D. Red.

Bei der Redaktion eingelaufen.

(April 1887.)

Sickenberger, die Determinanten in genetischer Behandlung zur Einführung für Anfänger. 2. Abdruck. München 1887, Ackermann.

Wittstein, vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 2. Aufl. Hannover 1887, Hahn.

Seeger, die Elemente der Geometrie für den Schulunterricht bearbeitet. 3. Aufl. Wismar 1887, Hinstorff.

Dietsch, Leitfaden der darstellenden Geometrie. Erlangen 1886, Deichert. (Neu.)

Hoffmann, Anleitung zur Lösung planimetr. Aufgaben etc. 2. verb. Aufl. Leipzig 1886, Fues.

Geistbeck, Leitfaden der mathem.-physikalischen Geographie f. Mittelschulen u. Lehrerbildungsanstalten. 8. verb. Aufl. Freiburg i/B. 1887, Herder.

Jansen, methodischer Leitfaden der Physik u. Chemie für höhere Töchterschulen, Lehrerinnenseminarien und Fortbildungsanstalten. Ebenda. 1887. (Neu).

Verdet-Exner, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts. 2. Bd. 3. Abt. (Schlufs d. Werkes.)

Periodische Schriften: Schwartze, naturw.-technische Umschau. III. Jahrg. Hft. 1—12. Jena 1887, Mauke. — C.-O. XV, 14. — Deutsche bot. Monatsschrift V, 2. — Nouv. Ann. de Math. 1887. (März-April).

Programme: Hagen, Gewerbeschule Ost. 1886/87. — Reichenbach (Schlesien) Ost. 1887. Handl, z. Theorie des Regenbogens an einer ruhigen Wasseroberfläche. — Lauenburg, R.-Progymn. Ost. 1887. Butz, Wert, Ziel u Methode des Zeichenunterr. — Rawitsch-Posen, Liersemann, Maxima u. Minima analyt.-geom. beleuchtet. — 2 Vorträge von Rosenberger-Frankfurt a/M.: Zum Gedächtnisse Ottos v. Guericke und „Übergang von den metaphys. Anfangsgründen der Naturw. zur Physik (nachgel. Werk Kants).

(Mai 1887.)

Förster, Sammlung von Vorträgen und Abhandlungen, 2. Folge. Berlin, Reimer 1887.

Schellbach, Über die Zukunft der Mathematik an unsern Gymnasien ib.

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik III. T. Ebene Trigonometrie. Liegnitz, Krumbhaar 1887.

Dr. E. Kleinpauls, Anweisung zum praktischen Rechnen, methodisches Handbuch, herausgegeben in 5. Aufl. von Dr. F. Mertens. 3 Hefte, Bremen 1886, Heinsius.

Kerschbaum, Beweis, dafs es eine Quadratur des Kreises giebt, (u. dafs die bisher zur Berechnung des Kreises benutzte Ludolfsche Zahl etwas zu klein ist). Coburg 1887, Riemann.

Wildermann, Naturlehre (im Anschlufs an das Lesebuch von Bumüller u. Schuster). Freiburg in B. 1887, Herder.

Wilk, Grundbegriffe d. Meteorologie für höhere Schulen zusammengestellt. Iserlohn-Leipzig 1887, Bädecker.

Krafs-Landois, der Mensch u. das Thierreich. 8. Aufl. Ebenda 1887.

Wildermann, Jahrbuch d. Naturwissenschaften. 2. Jahrg. Ebenda.

Wünsche, Excursionsflora für das Königreich Sachsen. 5. Aufl. Leipzig 1887, B. G. Teubner.

Gerstendörfer (Verf. von: „In's Erzgebirge“), Eine Fahrt auf d. Donau. Wien 1885, Pichlers W.

Kruse, botanisches Taschenbuch etc. Berlin 1887, Paetel.

Kirchhoff, Länderkunde etc. Lief. 26—30. Leipzig-Prag 1887, Tempsky.
Trebs, Flora von Fürstenwalde. Ebenda 1887, Geelhaar.
Zeitschriften. C.-O. XV, 15—16 u. 17—20. — Zeitschr. f. d. R.-W. XII, 4. — Deutsche bot. Monatsschr. V, 3. — Nouv. Ann. d. M. Maiheft. — Annals of Mathematics III, 2, Univ. of Virginia (Aprilheft.) — Schlömilchs Ztschr. XXXII, 3. — Ztschr. f. Schulgeographie VIII, 7. — Ztschr. für phys. Unterr. III, 10—12.
Programme: Frankfurt a./M. st. Gymn. (Schütz, die gegenwärtige Bedeutung des mathem.-phys. Unterrichts an Gymnasien). — Meiningen, R.-G. (Kircher, Ein Beitrag zur Bewegung unveränderlicher ebener Systeme, dargest. nach den Prinzipien der Grafsm. Ausd.-L.). — Bremen, R. a. D. Buchenau, Schulnachrichten (s. die nachstehende NB.). — Bielitz: Miorini, Taktionsproblem u. Feuerb. Kreis. — Progr. Braunschw. Gymn. Wernicke, Die Grundlagen der Euklid. Geom. d. M. — Progr. Gymn. Hildburghausen (Abh. von Prof. Hunger, Mitteilung über eine handschriftliche Cofs und damit verb. Aufgabensammlung).

NB. Wir bitten, Programme, die nur Schulnachrichten enthalten, uns nicht zu übersenden, da wir keine Abteilung für allgemeine, d. h. ganz Deutschland umfassende Schulstatistik haben. Solche Schulnachrichten vermehren nur unser ohnehin angeschwollenes Lager (für uns) unbrauchbarer Bücher. Eine Ausnahme dürften nur solche Schulnachrichten machen, welche irgend etwas Neues oder Empfehlenswerthes für Schuleinrichtungen oder Schuldisziplin bringen, wie wir denn eine Reihe dem genannten Bremer Programm entnommenen Disziplinarvorschriften im nächsten Hefte mitteilen werden, die für viele Schulen, besonders auch Privatschulen sehr zu empfehlen sind und auf die wir die Herren Schuldirektoren und Schulinspektoren hinweisen.

D. Red.

Briefkasten.

A) Allgemeiner: Wir haben leider zu spät erfahren, dafs Prof. Junghans in Stettin, der Verf. der von uns in Heft 3, S. 208 angezeigten Aufgabensammlung bereits im Dezember v. J. verstorben ist. Dafs uns keiner der Herren Fachgenossen in Stettin dies eher mitgeteilt hat, damit wir dem Verstorbenen einen Nekrolog widmen konnten, müssen wir im Interesse der Kollegialität sehr bedauern. Wir erneuern daher unser in ds. Zeitschr. schon einmal gestelltes Gesuch an die Herren Fachgenossen, uns von dem Ableben bewährter Schulmänner an ihrem Orte pietätvoll Mitteilung zu machen, damit wir für einen Nekrolog sorgen können.

B) Besonderer: Z. in L. Wenn Sie Ihren Art. auf die „wichtigsten“ paar §§. reduzieren wollten, wäre es mir im Interesse desselben lieb. Auch scheint es mir, als verletze Ihr Gang das wichtige Gesetz „vom Besondern zum Allgemeinen“. — K. in M. Bezügl. der Pr.-Sch. bin ich einverstanden. Also — nun rasch daran! — R. in H. Berichtigung erhalten. Das Übrige brieflich. Ist wohl nun klar. — L. in Gr. Weitere Kapitel zur mathem. Botanik. Rez. ebenfalls erhalten. — Z. in L. Die Lehre von den Komplexionen. — Sch. in P. Das Schulblatt d. Pr. Br. konnten wir leider nicht erlangen, um über das angebliche Plagiat uns zu unterrichten. Ein solches Blatt führt ja nur ein „provinziales“ Dasein. Und über diesen Gegenstand noch viel Schreibereien zu machen, dazu haben wir wahrlich keine Zeit! — V. in M. Rezension erhalten. — St. in D. Aufgaben bitten wir dringend definitiv zu redigieren, und nicht immer wieder umzuarbeiten. Das stört den Betrieb der A.-Redakteure ungemein. — X. in Y. Christliche Physik! Auch gut! Ein Seitenstück zu N.s Pädagogik. Wir wollen sie aushängen!

Über die Körper, deren Schnittflächen parallel zu einer Ebene quadratische Funktionen ihres Abstandes sind.

Ein Beitrag zu einem natürlichen System der stereometrischen Körper.

Mit einer Tafel (Fig. 1—9).

Von Prof. Weinmeister in Tharand.

Inhaltsangabe.

Zu den Kapiteln des heutigen geometrischen Unterrichts, in denen derselbe am meisten von der altgriechischen Darstellungsweise des Euklid und Archimed entfernt ist und sich immer mehr entfernen wird, gehört das, welches noch vor gar nicht langer Zeit den eigentlichen Kern der Stereometrie bildete, von der Ausmessung der Körper. Von besonderer Bedeutung für die Entwickelung der elementaren Mathematik in dieser Richtung ist die Einführung der Newtonschen Inhaltsformel oder der Simpsonschen Regel in den Unterricht. Soll der Schüler einen Begriff vom hohen Wert derselben erhalten, so darf der Lehrer nicht beim Prisma und bei der Pyramide stehen bleiben, sondern er mufs einen Körper von weit gröfserer Allgemeinheit behandeln; so ist es gekommen, dafs der Koppesche

Obelisk und das Wittsteinsche Prismatoid auf unseren höheren Lehranstalten Eingang fanden und nunmehr unentbehrlich geworden sind. Aber es giebt noch ein zweites Moment, welches die heutige Stereometrie der alten gegenüber kennzeichnet. Es ist dies das auf den meisten Schulen eingebürgerte Cavalierische Prinzip. Beide arbeiten vortrefflich Hand in Hand, denn mittelst des Cavalierischen Prinzipes überträgt sich die Newtonsche Formel auf krummflächige Körper, zunächst auf die Kugelschicht. Hat so der Schüler erkannt, dafs der Gültigkeitsbereich dieser Formel ein weit gröfserer sei, als er anfangs vermutete, so mufs sich ihm der Gedanke von der Einseitigkeit des von ihm gelernten Steiner-Bretschneiderschen Beweises und der Wunsch nach einer umfassenderen Begründung aufdrängen. Dieser allgemeinere Beweis wird mit Hülfe der Integralrechnung geführt, und es liefert derselbe zugleich die bekannte Grenze, innerhalb welcher die Formel richtig ist. Er ist der denkbar einfachste und auch in der geschichtlichen Entwickelung der erste, wie man schon aus dem Namen Newton schliefsen kann.

Indem wir uns im Folgenden auf denselben Standpunkt stellen, nehmen wir an, dafs sich der Körper von einer bestimmten Ebene aus erstreckt, die wir, dem Koordinaten-Anfangspunkt der analytischen Geometrie entsprechend, die Anfangsebene nennen wollen. Unter x verstehen wir den Abstand einer beliebigen zu dieser Ebene parallelen ebenen Schnittfigur f. Wir setzen ferner voraus, dafs der Inhalt derselben an das Gesetz $f = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ gebunden ist. Von dem so bestimmten Körper sollen zunächst Formeln entwickelt werden, ohne dafs auf seine Form irgend welche Rücksicht genommen wird, und erst später soll der mannigfaltigen Gestaltung, in welcher dieser allgemeine Körper in besonderen Fällen erscheinen kann, Rechnung getragen werden. Von der elementaren Entwickelung des Integrals $\int x^n dx$ (wo $n = 1; 2; 3$) sehen wir hier ab, da dieselbe in vielen stereometrischen Lehrbüchern gegeben wird; mit Hülfe des Cavalierischen Prinzips kann das Integral zudem umgangen werden, wenn man den Inhalt und das statische Moment des Prismas und der Pyramide als bekannt voraussetzt.

Im Abschnitt A wird zunächst aus der obigen algebraischen Voraussetzung ohne jede Rücksicht auf die Gestalt die Formel (4)

abgeleitet und verwertet, welche den Inhalt durch drei beliebige Schnittflächen ausdrückt; dem folgt, wiederum auf Grund jener Formel eine Diskussion der möglichen Gestalten (Abschnitt B); und da zeigt es sich, dafs alle hierher gehörigen Körper in sechs Klassen zerfallen, die sich den verschiedenen Flächen zweiter Ordnung auf das ungezwungenste anschliefsen; welcher dieser Klassen ein Körper zugehört, läfst sich aus den Grundflächen und dem Mittelschnitt erkennen (C). Nun werden die den einzelnen Klassen entsprechenden Formeln durchgeführt und auf Körperschichten angewendet, deren Mäntel entweder (D) von Flächen zweiter Ordnung, oder (E) von Ebenen, oder (F) von Regelflächen gebildet werden. Dies liefert mancherlei geschmeidige Formeln, z. B. für den ellipsoidischen und hyperboloidischen Kegel die Formel $\frac{2}{3}\pi' r^2 h$, genau wie für den Kugelkegel, wobei nur π', r und h eigenartig aufzufassen sind. Dafs auch die ebenflächigen Körper — die Prismatoide, Spheniske und wie sie alle genannt sind — sich wie von selbst in jene sechs Klassen einfügen, macht ihre Übersicht wesentlich leichter. Im Abschnitt F dürfte der Satz (46) interessieren, der sich bei der Betrachtung der windschiefen Flächen ergab und einen Steinerschen Satz beträchtlich erweitert. Endlich wird im Schlufsabschnitt die schöne Martussche Inhaltsbestimmung kegelschnittkantiger Körper in die voraufgegangene Betrachtung hinein gezogen.

A. Darstellung des Inhaltes und des statischen Momentes durch drei beliebige Schnittfiguren.

Ist S der körperliche Inhalt einer Schicht, deren ebene Grenzflächen von der Anfangsebene die Abstände x und x' haben, so ergiebt sich aus der Gleichung

$$f = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \tag{1}$$

dafs

$$S = \alpha(x - x') + \frac{1}{2}\beta(x^2 - x'^2) + \frac{1}{3}\gamma(x^3 - x'^3).$$

Für den Fall, dafs der Mittelschnitt zur Anfangsebene gewählt wird, ist $x' = -x$ und demnach

$$S = 2x\left(\alpha + \frac{1}{3}\gamma x^2\right). \tag{2}$$

Da die geometrische Bedeutung der Gröfsen α, β, γ zunächst nicht ersichtlich ist, führe man statt derselben die Schnittflächen f_1, f_2, f_3 mit den Abständen x_1, x_2, x_3 ein.

Aus Gleichung (2) im Verein mit den Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 \\ f_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 \\ f_3 = \alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2 \end{cases}$$

erhält man dann:

$$\begin{vmatrix} S & 2x & 0 & \frac{2}{3}x^3 \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \\ f_3 & 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(4) \qquad S = 2x\left[f_1 \frac{x_2 x_3 + \frac{1}{3}x^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{x_1 x_3 + \frac{1}{3}x^2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f_3 \frac{x_1 x_2 + \frac{1}{3}x^2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right],$$

wo x die halbe Höhe der Schicht bedeutet.

Eine kürzere Herleitung der Formel ist folgende:

Man setze $S = 2x\,(f_1\varrho_1 + f_2\varrho_2 + f_3\varrho_3)$; die zu bestimmenden Gröfsen ϱ sind so beschaffen, dafs man aus einer die übrigen durch Zeigervertauschung findet. Sind nun x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$, so wird $S = 2x f_3 \varrho_3$

$$= 2x\,(\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2)\,\varrho_3.$$

Wird dieser Wert dem in (2) gegenübergestellt, so ergiebt sich

$$\varrho_3 = \frac{\alpha + \frac{1}{3}\gamma x^2}{\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{3}x^2}{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}x_3 + x_3^2} = \frac{x_1 x_2 + \frac{1}{3}x^2}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2)\,x_3 + x_3^2}$$

Bemerkenswerte Fälle.

I. $f_3 = m$ sei der Mittelschnitt, während f_1 und f_2 in gleichem Abstand x von demselben liegen.

Dann ist $x_3 = 0$, $x_2 = -x_1$. Setzt man aufserdem $x = \frac{1}{2}h$ und $x : x_1 = \lambda$, so dafs also λ das Abstandsverhältnis der Grundflächen und der Schnittflächen vom Mittelschnitt angiebt, so ist:

$$(5) \qquad S = \frac{1}{6}h\left[\lambda^2(f_1 + f_2 - 2m) + 6m\right].$$

Für $\lambda = 1$ werden f_1 und f_2 zu den Grundflächen k und g, und man erhält die Newtonsche Formel $S = \frac{1}{6}h\left[g + k + 4m\right]$. Teilen die drei Schnittebenen die Höhe in vier gleiche Teile, so ist $\lambda = 2$ und $S = \frac{2}{3}h\left[f_1 + f_2 - \frac{1}{2}m\right]$.

II. $f_1 = k$ und $f_2 = g$ seien die Grundflächen, $f_3 = f$ teile die Höhe im Verhältnis λ.

Dann ist $x_1 = -\frac{1}{2}h$, $x_2 = \frac{1}{2}h$, $x_3 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ und

(6)*) $S = \frac{1}{6}h\left[\left(2 - \frac{1}{\lambda}\right)k + (2 - \lambda)g + \left(2 + \lambda + \frac{1}{\lambda}\right)f\right]$.

Führt man statt h und λ die Teile der Höhe h_1 und h_2 ein, so kann man die Formel zu einer verallgemeinerten Simpsonschen Regel erweitern, welche Anwendung finden kann, wenn die Höhe des näherungsweise auszumessenden Körpers in Teile verschiedener Gröfse geteilt worden ist.

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ (oder 2) ergiebt sich die bekannte Formel $S = \frac{1}{4}h(g + 3f)$. Da im letzteren Fall nur zwei Flächen vorkommen, so giebt dies Veranlassung zur

III. Frage: Unter welcher Bedingung genügen f_1 und f_2 zur Inhaltsbestimmung?

Antwort: Wenn

$$x_1 x_2 + \frac{1}{3}x^2 = 0.$$

Denn alsdann verschwindet der Koeffizient von f_3. Da für x_3 ein beliebiger Wert gewählt werden kann, so setze man $x_3 = 0$. Ferner müssen f_1 und f_2 auf verschiedenen Seiten des Mittelschnittes liegen. Berücksichtigt man dies, so kann man x_2 das entgegengesetzte Vorzeichen geben und erhält:

(7) $$x_1 x_2 = \frac{1}{12}h^2. \qquad S = h \cdot \frac{x_1 f_2 + x_2 f_1}{x_1 + x_2}.$$

Bezeichnet man die Schnittflächen f_1 und f_2 für den besonderen Fall, dafs sie gleichweit vom Mittelschnitt abstehen, mit φ_1 und φ_2, so ist

(8) $$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot h \qquad S = \frac{1}{2}h(\varphi_1 + \varphi_2).$$

---

*) Sinramsche Regel (wenn auch nicht der Form nach). S. z. B. Gusserow, Stereometrie. Berlin 1885. V. § 21.

Von den allgemeinen Schnittflächen f_1 und f_2 kann man die eine beliebig wählen, die andere ist dann durch die erste Gleichung von (7) bestimmt. Zwischen beiden liegt stets der Mittelschnitt und eine der Flächen φ.

Man erhält die einfache Formel $S = h\varphi$, wenn $\varphi_1 = \varphi_2$. Da die Abstände beider vom Mittelschnitt, abgesehen vom Vorzeichen, gleich sind, so mufs in (1) $\beta = 0$ sein. Dann sind aber auch die Grundflächen des Körpers einander gleich, so dafs man den Satz erhält:

(9) Sind die Grundflächen der Schicht einander gleich, so giebt eine jede der beiden Flächen, welche im Abstand $\frac{\sqrt{3}}{6}h$ dem Mittelschnitt parallel sind, multipliziert mit der Höhe den körperlichen Inhalt an.

Endlich sei noch der Fall untersucht, in welchem eine Fläche zur Inhaltsbestimmung des allgemeinen Körpers ausreicht. Dabei soll davon abgesehen werden, dafs die eine Schnittfläche gleich Null ist, und zwar deshalb, weil das zu einer solchen Fläche gehörige x nicht immer reell ist, und sonach die Allgemeinheit beeinträchtigt werden würde. So gehört z. B. die Formel für den Inhalt der Pyramide nicht hierher. Zur Erreichung des genannten Zweckes setze man $f_1 = f_2$, wodurch $S = h \cdot f$ wird. x_1 und x_2 müssen dann die beiden Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{12}h^2$$

und

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2$$

oder

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Sonach sind x_1 und x_2 die stets reellen verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + \frac{\beta}{\gamma}x = \frac{1}{12}h^2.$$

IV. Der Fall I, $\lambda = \sqrt{2}$, in welchem $S = \frac{1}{3}h(f_1 + f_2 + m)$, legt die Aufgabe nahe, zu untersuchen, unter welcher Bedingung die Koeffizienten der f_1, f_2, f_3 in (4) einander gleich werden. Man erhält dann die Gleichung

$$\left(x_2x_3 + \frac{1}{3}x^2\right)(x_2 - x_3) = \left(x_3x_1 + \frac{1}{3}x^2\right)(x_3 - x_1)$$
$$= \left(x_1x_2 + \frac{1}{3}x^2\right)(x_1 - x_2).$$

Setzt man das $x_1$fache der linken Seite, vermehrt um das $x_2$fache der mittleren dem $(x_1 + x_2)$fachen der rechten Seite gleich, so giebt es $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Beseitigt man mittelst dieser Gleichung x_3, so erhält man $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{1}{2}x^2$. Die Koeffizienten werden dann $= \frac{1}{3}$.

(10) $$S = h \cdot \frac{f_1 + f_2 + f_3}{3},$$

wenn $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{1}{2}x^2$.

Man kann statt einer jeden beider Bedingungsgleichungen auch noch eine andere setzen, z. B.

$$x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 = \frac{1}{2}x^2, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{1}{2}x^2,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 \text{ u. s. w.}$$

Für das statische Moment $\mathfrak{M}$ der Körperschicht, deren Grundflächen von der Anfangsebene um x und x' abstehen, in Beziehung auf die Anfangsebene gilt die Gleichung:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\alpha(x^2 - x'^2) + \frac{1}{3}\beta(x^3 - x'^3) + \frac{1}{4}\gamma(x^4 - x'^4).$$

Verlegt man die Anfangsebene in den Mittelschnitt, so ist $x' = -x$, wodurch

(11) $$\mathfrak{M} = \frac{2}{3}\beta x^3.$$

Zur Beseitigung von β multipliziere man die Gleichungen (3) mit $x_2^2 - x_3^2$, $x_3^2 - x_1^2$, $x_1^2 - x_2^2$ und addiere. Hierdurch erhält man:

(12) $$\mathfrak{M} = \frac{2}{3}x^3 \cdot \left[f_1 \cdot \frac{x_2 + x_3}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{x_3 + x_1}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)} + f_3 \frac{x_1 + x_2}{(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}\right].$$

Soll f_3 herausfallen, so setze man $x_2 = -x_1$, $x_3 = 0$. Wenn aufserdem $x = \frac{1}{2}h$ gesetzt wird, ist

(13) $\left\{\begin{array}{l}\text{das statische Moment des Körpers in Beziehung auf den Mittelschnitt, ausgedrückt durch die beiden um } x_1 \text{ von demselben abstehenden Schnittflächen } f_1 \text{ und } f_2 \\ \mathfrak{M} = \frac{h^3}{24 x_1}(f_1 - f_2).\end{array}\right.$

Für $x_1 = \frac{1}{2}h$ gehen $f_1 = g$ und $f_2 = k$ in die Grundflächen über, und es ist

$$(14) \qquad \mathfrak{M} = \frac{1}{12}h^2(g - k).$$

Für $g = k$ liegt der Schwerpunkt im Mittelschnitt.

Soll sowohl das statische Moment, als auch der körperliche Inhalt nur durch zwei Schnittflächen dargestellt werden, so geht dies nur mittelst der Flächen φ_1 und φ_2. Dann ist nach (8) die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelschnitt

$$x_s = \frac{\mathfrak{M}}{S} = x_1 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} \text{ oder } \frac{x_1 - x_s}{x_1 + x_s} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Hiernach liegt der Schwerpunkt des Flächenpaares φ_1, φ_2 im selben Abstand vom Mittelschnitt, wie der Körperschwerpunkt.

B. Unterscheidung der Körper nach ihren Nullflächen und nach ihren gröfsten und kleinsten Schnitten.

Ehe die Körper nach ihren einzelnen Arten unterschieden werden, sei zuvor auf die besondere Bedeutung der Zahl γ in $f = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ aufmerksam gemacht. Dieselbe bleibt nämlich ungeändert, wenn man eine neue Anfangsebene wählt und zu dem Ende z. B. $x = x' + \xi$ setzt. Hiernach hängt die Bestimmung der Körperart in erster Linie von γ ab. Weiter sei bemerkt, dafs α die Schnittfläche des Körpers mit der Anfangsebene ist und stets positiv genommen werden soll. Was endlich die Bezeichnung der einzelnen Körperarten anbelangt, so ist dieselbe mit Rücksicht auf die Flächen zweiter Ordnung bestimmt worden. (S. Abschnitt D.) Ebenso entsprechen die Figuren den Abschnitten D und E, sind jedoch allgemeiner aufzufassen.

I. Cylinderartige Körper. ($\mathfrak{K}_c$).

$$\gamma = 0 \quad \beta = 0 \quad f = \alpha.$$

(15) {Sämtliche Schnittfiguren sind einander gleich. Der Inhalt ist dem Produkt aus Grundfläche und Höhe gleich. Der Schwerpunkt liegt im Mittelschnitt.

II. Paraboloidartige Körper. ($\mathfrak{K}_p$).

$$\gamma = 0 \qquad \beta > 0 \qquad f = \alpha + \beta x = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} + x\right).$$

$\mathfrak{K}_p$ hat eine Nullfläche, für welche $x = -\frac{\alpha}{\beta}$. Die auf der einen Seite derselben liegenden Schnittfiguren sind positiv, die auf der anderen negativ. Abgesehen vom Vorzeichen sind sie gleich, wenn sie von der Nullfläche gleichweit abstehen. Wird die Nullfläche zur Anfangsebene gewählt, so ist $f = \beta x$. (Fig. 1.) Sind dann $k = \beta x'$ und $g = \beta x$ die Grundflächen, und ist $m = \beta \cdot \frac{x + x'}{2}$ der Mittelschnitt, so ist

(16) $$\begin{cases} m = \frac{1}{2}(g + k), \quad S_p = \frac{1}{2}\beta(x^2 - x'^2) = \frac{1}{2}\beta h(x + x') \\ \qquad = hm = h \cdot \frac{g + k}{2}. \end{cases}$$

Die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelschnitt $= \frac{1}{6} h \cdot \frac{g - k}{g + k}$.

Denkt man sich $\mathfrak{K}_p$ auf der einen Seite von der Nullfläche begrenzt, so gilt:

(17) {Die Schnittfiguren verhalten sich, wie ihre Abstände von der Nullfläche. Der Inhalt ist dem halben Produkt aus Grundfläche und Höhe gleich. Die Entfernung des Schwerpunktes von der Grundfläche $= \frac{1}{3} h$.

III. Ellipsoidartige Körper. ($\mathfrak{K}_e$). Fig. 2.

Bei den Körpern $\mathfrak{K}_e$ sei γ negativ genommen. Indes setzen wir lieber:

$$\gamma > 0. \quad f = \alpha + \beta x - \gamma x^2 = \frac{4\alpha\gamma + \beta^2}{4\gamma} - \gamma\left(x - \frac{\beta}{2\gamma}\right)^2$$
$$= \gamma(x_1 - x)(x - x_2),$$

wenn

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}}{2\gamma}.$$

$\mathfrak{K}_e$ hat stets zwei verschiedene Nullflächen; innerhalb beider ist er positiv, aufserhalb negativ. Die gröfste Schnittfläche hat von der Anfangsebene den Abstand $\frac{\beta}{2\gamma} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, also von jeder der beiden Nullflächen den Abstand

$$r = \pm \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}}{2\gamma}.$$

Für diese Werte seien neue Bezeichnungen eingeführt, nämlich

(18) *M* ist die gröfste Schnittfläche, *r* ihr Abstand von einer Nullfläche, *K* der Körper zwischen beiden Nullflächen. Dann ist

$$M = \gamma r^2. \qquad K = \frac{4}{3} Mr = \frac{4}{3} \gamma r^3.$$

Man findet *K* am einfachsten mittelst der Newtonschen Formel. Aufserdem sei bemerkt, dafs die Bedeutung von $\gamma = \frac{M}{r^2}$ die obige Bemerkung über die Unabhängigkeit dieser Zahl von der Anfangsebene bestätigt.

Wählt man die eine Nullfläche zur Anfangsebene, so ist $f = \gamma x (2r - x)$, also, wenn A_e den zwischen ihr und einer unter *h* parallelen Schnittfläche *g* gelegenen Abschnitt bedeutet,

$$(19) \quad \begin{cases} A_e = \gamma r h^2 - \frac{1}{3} \gamma h^3 \\ \quad = \frac{1}{3} \gamma h^2 (3r - h) = \frac{1}{3} g h \frac{3r - h}{2r - h} > \frac{1}{2} g h. \end{cases}$$

Sein statisches Moment für die Nullfläche $= \frac{2}{3} \gamma r h^3 - \frac{1}{4} \gamma h^4$, also

(20) die Entfernung seines Schwerpunktes von *g*

$$= \frac{1}{4} h \frac{4r - h}{3r - h} \begin{matrix} > \frac{1}{3} h. \\ < \frac{1}{2} h. \end{matrix}$$

Dieselbe wird $= \frac{3}{8} r$ für $h = r$.

Fügt man zu A_e einen Kegel (oder allgemeiner einen $\mathfrak{K}_k$ s. u.), der dieselbe Grundfläche hat, und dessen Spitze in einem Punkt von *M* liegt, so erhält man einen zusammengesetzten Körper Z_e. Man findet seinen Inhalt durch Addition von $\frac{1}{3} (r - h) \gamma h (2r - h)$; also ist

$$(21) \qquad Z_e = \frac{2}{3} \gamma r^2 h = \frac{2}{3} Mh.$$

Es ist bemerkenswert, dafs Z_e nur von M und h abhängt, so dafs zwei irgendwie gestalteten Körpern $\mathfrak{K}_e$ entnommene Z_e gleichen Inhalt haben, wenn ihre Höhen im umgekehrten Verhältnis der gröfsten Schnitte stehen.

(22) Die Entfernung des Schwerpunktes von M beträgt $\frac{3}{8}(2r-h)$.

Verlegt man die Anfangsebene nach M, so ist $f = \gamma(r^2 - x^2)$; sind nun wieder k, g, m Grundflächen und Mittelschnitt, mit den Abständen x_1, x_2, x_m von M, so ist

$$x_1 + x_2 = 2x_m \qquad k = \gamma(r^2 - x_1^2)$$
$$x_1 - x_2 = h \qquad g = \gamma(r^2 - x_2^2)$$
$$m = \gamma(r^2 - x_m^2)$$

also $2m = g + k + \frac{1}{2}\gamma h^2$, und daher

$$S_e = \frac{1}{6}h(g + k + 4m) = \frac{1}{2}h\left(g + k + \frac{1}{3}\gamma h^2\right). \tag{23}$$

Sonach ist die Schicht der Summe zweier Cylinder mit denselben Grundflächen und halber Höhe gleich, vermehrt um einen Körper $K' = \frac{1}{6}\gamma h^3$. Da $K' : K = h^3 : (2r)^3$, so kann man K' durch einen K ähnlichen und ähnlich gelegenen Körper darstellen, dessen Nullflächen in den Grundflächen der Schicht liegen.

Das statische Moment für m ist nach (14)

$$\mathfrak{M}_e = \frac{1}{12}\gamma h^2(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{12}\gamma h^3 x_m, \tag{24}$$

also so grofs, wie das des Körpers K' für M. Bezieht man das statische Moment der Schicht auf M, so erhält man $\frac{1}{2}hx_m(g+k)$.

Aufserhalb der Nullflächen erstreckt sich $\mathfrak{K}_e$ negativ in derselben Weise, wie $\mathfrak{K}_{hk}$ (S. u. V.) positiv.

IV., Kegelartiger Körper ($\mathfrak{K}_k$).

$\beta^2 = 4\alpha\gamma$. $\mathfrak{K}_k$ besitzt eine Nullfläche (eigentlich zwei zusammenfallende) und erstreckt sich von derselben nach beiden Seiten positiv. Wird die Anfangsebene in die Nullfläche verlegt, so ist $f = \gamma x^2$. Hieraus ergiebt sich leicht:

(25) Die Schnittflächen verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Nullfläche. Der Inhalt ist dem Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe gleich. Die Entfernung des Schwerpunktes von der Grundfläche $= \frac{1}{4} h$.

(Allgemein: Verhalten sich die Schnittflächen eines Körpers, wie die n^{ten} Potenzen ihrer Abstände von der Anfangsebene, so ist sein Inhalt

$= \frac{1}{n+1} gh$ und der Schwerpunktsabstand $= \frac{1}{n+2} h$.)

$$(26)\quad \begin{cases} S_k = \frac{1}{3}\gamma(x^3 - x'^3) = \frac{1}{3}\gamma h(x^2 + xx' + x'^2) = \frac{1}{3}h(g + \sqrt{gk} + k)\,. \\ \text{In Beziehung auf } m \text{ ist } \mathfrak{M}_k = \frac{1}{12}\gamma h^2(x^2 - x'^2) = \frac{1}{6}\gamma h^3 x_m\,. \end{cases}$$

V., Körper nach Art des zweischaligen Hyperboloides. ($\mathfrak{K}_{hh}$). Fig. 3.

$\beta^2 > 4\alpha\gamma > 0.\quad f = \alpha + \beta x + \gamma x^2 = \gamma\left(x + \frac{\beta}{2\gamma}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\gamma}.$

$\mathfrak{K}_{hh}$ hat stets zwei verschiedene Nullflächen, deren Abstand $= 2r$ sein mag; das zwischen denselben liegende Körperstück ist negativ und entspricht sonst ganz $\mathfrak{K}_e$. Aufserhalb der beiden Nullflächen erstreckt sich der Körper positiv bis in das Unendliche. Wir beschränken uns auf den einen der beiden positiven Teile. Die Anfangsebene liege zunächst in der einen Nullfläche, und es seien die x positiv genommen nach der positiven Körperseite zu. Da alsdann f für $x = 0$ und $x = -2r$ verschwinden mufs, und γ unveränderlich ist, so ist $f = \gamma x(x + 2r)$. Ganz wie oben ergiebt sich:

$$(27)\quad \begin{cases} A_{hh} = \frac{1}{3}\gamma h^2(3r + h) = \frac{1}{3}gh\,\frac{3r+h}{2r+h} \begin{matrix} < \frac{1}{2}gh\,. \\ > \frac{1}{3}gh\,. \end{matrix} \\ \text{Abstand des Schwerpunktes von } g \\ \qquad = \frac{1}{4}h \cdot \frac{4r+h}{3r+h} \begin{matrix} < \frac{1}{3}h\,. \\ > \frac{1}{4}h\,. \end{matrix} \end{cases}$$

Um Z_{hh} zu erhalten, errichte man über g einen Körper $\mathfrak{K}_k$, dessen Nullfläche mitten zwischen den Nullflächen von $\mathfrak{K}_{hh}$ liegt. Sein Inhalt $= \frac{1}{3}\gamma h\,(h + 2r)\,(h + r) > A_{hh}$. Ferner ist, wie man sich leicht durch eine kleine Zwischenrechnung überzeugt, eine jede seiner Schnittfiguren $(x < h)$ gröfser, als die entsprechende von $\mathfrak{K}_{hh}$. Man wird daher $\mathfrak{K}_k$ so wählen können, dafs es A_{hh} vollständig in sich einschliefst. Durch Wegnehmen des Letzteren bleibt Z_{hh} übrig.

(28) $\begin{cases} Z_{hh} = \frac{2}{3}\gamma r^2 h = \frac{2}{3} Mh, \text{ wenn } M = \gamma r^2. \\ \text{Sein Schwerpunkt hat von der Nullfläche des } \mathfrak{K}_k \\ \qquad \text{den Abstand } \frac{3}{8}(2r + h). \end{cases}$

Verlegt man die Anfangsebene in die zuletzt genannte Fläche, so ist $f = \gamma\,(x^2 - r^2)$. Der Entwickelung der Gleichung (23) entspricht dann $2m = g + k - \frac{1}{2}\gamma h^2$. Hiernach ist

(29) $\begin{cases} S_{hh} = \frac{1}{6}h(g + k + 4m) = hm + K' = \frac{1}{2}h(g + k) - 2K'. \\ \mathfrak{M}_{hh} = \frac{1}{6}\gamma h^3 x_m. \\ \text{Hier ist } K' = \frac{1}{12}\gamma h^3, \text{ und } K = \frac{2}{3}\gamma r^3 = \frac{2}{3} Mr, \text{ sodafs} \\ K' : K = h^3 : (2r)^3. \end{cases}$

Es erübrigt noch, die geometrische Bedeutung von M, K und K' festzustellen. Zunächst ergiebt sich zwar ganz einfach M als der Schnitt im Abstand $r \cdot \sqrt{2}$ von der Nullfläche. Wir wollen jedoch hiervon absehen, ebenso wie von dem zwischen den Nullflächen gelegenen Körper mit negativen Schnittfiguren, der wie bei $\mathfrak{K}_e$ das Verlangte sofort leistet. Vielmehr führen wir einen Ergänzungskörper E von der Art $\mathfrak{K}_k$ ein, dessen Nullfläche mitten zwischen den Nullflächen der $\mathfrak{K}_{hh}$ und denselben parallel gedacht werden soll. Für seine Flächen gelte das Gesetz $f' = \gamma x^2$. Derselbe schneidet die Nullflächen des $\mathfrak{K}_{hh}$ in M, und es ist das zwischen ihnen gelegene Körperstück $= K$. K' befindet sich wieder zwischen den Grundflächen der Schicht und ist ähnlich und ähnlich gelegen K. Da für beliebiges x die Fläche $f' > f$, so kann E so bestimmt werden, dafs es $\mathfrak{K}_{hh}$ ganz

in sich faſst. Dann ist der in der Schnittebene liegende Ring $= M$. Errichtet man nun über einem dieser Ringe einen Körper $\mathfrak{K}_c$, so ist eine zwischen zwei beliebigen Schnittebenen gelegene Schicht desselben so groſs, wie die zwischen denselben Ebenen gelegene Schicht des Restkörpers $E - \mathfrak{K}_{hh}$.

VI. Körper nach Art des einschaligen Hyperboloides. ($\mathfrak{K}_h$). Fig. 4.

$$\beta^2 < 4\alpha\gamma. \qquad f = \alpha + \beta x + \gamma x^2 = \gamma \left(x + \frac{\beta}{2\gamma}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma}.$$

$\mathfrak{K}_h$ hat keine Nullfläche, aber einen kleinsten Schnitt $M = \gamma r^2$, von welchem aus $\mathfrak{K}_h$ sich nach beiden Seiten positiv erstreckt. Liegt die Anfangsebene in demselben, so ist $f = \gamma(x^2 + r^2)$, woraus sich ergiebt:

(30) Fällt die eine Grundfläche der Schicht mit M zusammen, so ist ihr Inhalt

$$= \frac{1}{3}\gamma h(h^2 + 3r^2) = \frac{1}{3} gh \frac{3r^2 + h^2}{r^2 + h^2} \begin{matrix} < gh. \\ > \frac{1}{3} gh. \end{matrix}$$

Die Entfernung des Schwerpunktes von M beträgt

$$\frac{3}{4} h \frac{h^2 + 2r^2}{h^2 + 3r^2} \begin{matrix} < \frac{3}{4} h. \\ > \frac{1}{2} h. \end{matrix}$$

(31) Für S_h gelten dieselben Formeln (29), wie für S_{hh}.

Um zu einer geometrischen Bedeutung von r und K zu gelangen, bilde man wieder einen Ergänzungskörper E mit $f' = \gamma x^2$. Schneidet man diesen zweimal in Flächen von der Gröſse M, so ist der Abstand der letzteren beiden von seiner Nullfläche $= r$, und es ist der zwischen ihnen gelegene Körperteil von E so groſs, wie K. Von K' gilt dasselbe, wie oben. Da für beliebige x die Fläche $f' < f$, so kann man E in der Weise bilden, daſs es völlig in $\mathfrak{K}_h$ liegt. Man hat dann wieder die Flächenringe von der Gröſse M und einen Restkörper $\mathfrak{K}_h - E$, in welchem eine jede Schicht so groſs ist, wie eine gleich hohe eines über M errichteten Körpers $\mathfrak{K}_c$.

Schlieſslich sei noch auf eine Schichtformel aufmerksam

gemacht, welche aufser g und k noch M enthält. Sie ist eine Verallgemeinerung von (26) und geht für $M = 0$ in diese über.

$$(32)\qquad S_h = \frac{1}{3}h\left[g + k + M \pm \sqrt{(g - M)(k - M)}\right].$$

Man hat das obere oder untere Vorzeichen zu setzen, je nachdem g und k auf derselben oder auf verschiedener Seite von M liegen. Im letzteren Fall wird $M = m$ für $k = g$. Die Formel gilt auch für S_e, und wenn man das Vorzeichen von M ändert und der Wurzel nur plus giebt, auch für S_{hh}.

C. Verfahren, wie man an den Grundflächen und dem Mittelschnitt einer Schicht die Art des Körpers erkennt, welchem dieselbe entnommen ist.

Da k, m, g ($\geqq k$) und h zur Bestimmung der Gröfsen α, β, γ im Flächengesetz $f = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ausreichen, so bilde man zunächst dasselbe aus den genannten Gröfsen. Man erhält, wenn die Anfangsebene durch k gelegt wird:

$$(33)\quad f = k + (4m - g - 3k)\cdot\frac{x}{h} + (2g + 2k - 4m)\cdot\frac{x^2}{h^2}.$$

Sonach gehört der Körper zu den $\mathfrak{K}_p$, wenn $\gamma = 0$, d. h. wenn $m = \frac{g+k}{2}$, und zu den $\mathfrak{K}_c$, wenn aufserdem noch $\beta = 0$, d. h. wenn $g + 3k = 4m = 2g + 2k$, so dafs alsdann $g = k = m$ sein mufs. Für $\mathfrak{K}_e$ ist $\gamma < 0$, also $m > \frac{g+k}{2}$, während für die übrigen Körper $m < \frac{g+k}{2}$. Um diese von einander zu scheiden, liegt es am nächsten $4\alpha\gamma - \beta^2$ zu bilden; indes lassen sich die sonst unvermeidlichen weitläufigen Rechnungen auf folgendem Wege umgehen.

Es ist $\frac{g}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}h + h^2 = \frac{k}{g} + 2h\sqrt{\frac{k}{\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha\gamma}} + h^2$, da $\alpha = k$.

Kann man nun aus $\sqrt{\frac{g}{\gamma}}$, $\sqrt{\frac{k}{\gamma}}$ und h als Seiten ein Dreieck bilden (Fig. 5), so ist der Kosinus des von den beiden letzten Seiten eingeschlossenen Winkels $= -\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha\gamma}}$. Dies geht sonach nur dann, wenn $\beta^2 < 4\alpha\gamma$, d. h. der Körper ein $\mathfrak{K}_h$ ist; und es

fällt das Dreieck zur Strecke zusammen oder es wird unmöglich, wenn $\beta^2 = 4\alpha\gamma$ oder $> 4\alpha\gamma$ ist, d. h. ein Körper $\mathfrak{K}_k$ oder $\mathfrak{K}_{hh}$ vorliegt.

Zieht man in jenem Dreieck die Schwerlinie, welche h halbiert, so ist deren Quadrat

$$= \frac{k}{\gamma} + h\sqrt{\frac{k}{g}}\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha\gamma}} + \frac{h^2}{4} = \frac{\alpha + \frac{1}{2}\beta h + \frac{1}{4}\gamma h^2}{\gamma} = \frac{m}{\gamma}.$$

Sonach ist das Dreieck, welches $\sqrt{k}$ und $\sqrt{g}$ zu Seiten und $\sqrt{m}$ zur Schwerlinie hat, dem vorigen ähnlich, und es läfst sich in bekannter Weise finden, indem man ein Hülfsdreieck mit den Seiten $\sqrt{k}$, $\sqrt{g}$, $2\sqrt{m}$ hinzunimmt. Die oben unterschiedenen drei Fälle treten auch hier ein.

Auf diese Weise ergeben sich folgende Bedingungen:

(34)

$m > \frac{g+k}{2}$		$\mathfrak{K}_e$	$\gamma < 0$
$m = \frac{g+k}{2}$	$g = k \; (= m)$	$\mathfrak{K}_c$	$\gamma = \beta = 0$
	$g \gtrless k$	$\mathfrak{K}_p$	$\gamma = 0, \beta \gtrless 0$
$m < \frac{g+k}{2}$	$\sqrt{m} > \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}}{2}$	$\mathfrak{K}_{hh}$*)	$\beta^2 > 4\alpha\gamma > 0$
	$\sqrt{m} = \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}}{2}$	$\mathfrak{K}_k$*)	$\beta^2 = 4\alpha\gamma$
	$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}}{2} > \sqrt{m} > \frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}}{2}$	$\mathfrak{K}_h$	$\beta^2 < 4\alpha\gamma$
	$\sqrt{m} = \frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}}{2}$	$\mathfrak{K}_k$**)	$\beta^2 = 4\alpha\gamma$
	$\sqrt{m} < \frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}}{2}$	$\mathfrak{K}_{hh}$**)	$\beta^2 > 4\alpha\gamma > 0$

Sonach hängt die Art des Körpers lediglich von den Verhältnissen $k : m : g$ ab. Es empfiehlt sich g und k festzulegen

*) Die Nullflächen liegen aufserhalb der Schicht.

**) Die Nullflächen liegen innerhalb der Schicht.

und zu sehen, wie durch stetige Änderung von m die verschiedenen Arten entstehen können. Aus (34) ergeben sich noch die folgenden besonderen Fälle:

(35) $k = 0$

$m > \frac{g}{2}$	$\mathfrak{K}_e$
$m = \frac{g}{2}$	$\mathfrak{K}_p$
$\frac{g}{2} > m > \frac{g}{4}$	$\mathfrak{K}_{hh}$
$m = \frac{g}{4}$	$\mathfrak{K}_k$
$m < \frac{g}{4}$	$\mathfrak{K}_{hh}$

(36) $k = g$

$m > g$	$\mathfrak{K}_e$
$m = g$	$\mathfrak{K}_c$
$0\, m > < g$	$\mathfrak{K}_h$
$m = 0$	$\mathfrak{K}_k$
$m < 0$	$\mathfrak{K}_{hh}$

Die allgemeine Aufgabe, aus drei Schnittfiguren und deren gegenseitigen Abständen jede beliebige andere Schnittfigur bei gegebenem Abstand zu bestimmen, läfst sich für den Fall eines $\mathfrak{K}_h$ bequem durch Zeichnung lösen. Man wähle zur Anfangsebene die Fläche M, so dafs $f = \gamma(x^2 + r^2)$. Errichtet man dann auf OP_0 (Fig. 6) in P_0 ein Lot und trägt auf demselben $P_0P_1 = x_1$, $P_0P_2 = x_2, \cdots$ ab, so ist $OP_1 = \sqrt{\frac{f_1}{\gamma}}, \cdots$ Sind nun drei Schnittfiguren mit den Abständen P_1P_2 und P_2P_3 gegeben, so kann man aus diesen und den Verhältnissen $OP_1 : OP_2 : OP_3$ das Dreieck OP_1P_3 finden. Aus letzterem läfst sich dann der Abstand der kleinsten Schnittfigur und deren Gröfse, sowie die Gröfse einer beliebigen Schnittfigur, deren Abstand gegeben, bestimmen. Ferner findet man f_2 aus f_1, f_3 und den Abständen von beiden $P_2P_1 = x$ und $P_2P_3 = y$, wenn aufserdem noch $\sphericalangle P_1OP_3 = \Omega$ gegeben ist. Verlängert man nämlich OP_2 bis es P_3R ($\| OP_1$) in R trifft, so ist P_2R $= OP_2 \cdot \frac{y}{x}$ und $P_3R = OP_1 \cdot \frac{y}{x}$, und demnach $\left(OP_2 + OP_2 \cdot \frac{y}{x}\right)^2$ $= OP_3^2 + \left(OP_1 \cdot \frac{y}{x}\right)^2 + 2\, OP_1 \cdot OP_3 \cdot \frac{y}{x} \cos \Omega$ oder

$$(37) \qquad f_2(x+y)^2 = f_3 x^2 + f_1 y^2 + 2\sqrt{f_1 f_3} \cdot xy \cos \Omega.$$

Und für den Winkel $P_2OP_3 = \omega$ gilt.

$$(38) \qquad x : y = OP_1 \cdot \sin(\Omega - \omega) : OP_3 \cdot \sin\omega$$
$$= \sqrt{f_1} \cdot \sin(\Omega - \omega) : \sqrt{f_3} \sin\omega.$$

Wählt man statt der Gröfsen $OP_1, OP_2 \ldots$ die Halbmesser derjenigen Kreise, welche so grofs wie die Schnittflächen sind, und die Strecken $P_1P_2, P_2P_3 \ldots$ im Verhältnis ihrer Abstände, so ist die Figur der oberen ähnlich. Man kann nun um die Punkte P die Kreise selbst zeichnen, wodurch ein Kreisbüschel entsteht. Letzteres einzuführen empfiehlt sich einmal deshalb, weil die Figur dadurch anschaulicher wird, indem sie die Gröfsen der Schnittflächen selbst giebt, dann aber auch deshalb, weil sich auf diese Art die noch übrigen Fälle mit einschliefsen lassen. So erhält man z. B. folgenden

Lehrsatz: Legt man durch einen $\mathfrak{K}_k$, $\mathfrak{K}_h$ oder $\mathfrak{K}_{hh}$ eine Gerade, welche gegen die Anfangsebene unter dem Winkel arctan $\sqrt{\frac{x}{y}}$ geneigt ist, und beschreibt um jeden Punkt derselben in der zugehörigen Schnittebene einen Kreis von der Gröfse der betreffenden Schnittfigur, so bilden die Parallelprojektionen dieser Kreise auf die Anfangsebene ein Kreisbüschel; und zwar fallen die Schnittpunkte des Büschels bei einem $\mathfrak{K}_k$ in einen zusammen, bei einem $\mathfrak{K}_h$ sind sie reell verschieden und bei einem $\mathfrak{K}_{hh}$ imaginär. Im Fall eines $\mathfrak{K}_e$ erhält man auf dieselbe Art Kreise, deren Umfänge von ein und demselben Kreis halbiert werden, während ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Dieselben hüllen eine Ellipse ein.

D. Anwendung auf die Schichten der Flächen zweiter Ordnung mit elliptischen Grundflächen.

Soll ein Teil des Raumes von einer Fläche zweiter Ordnung und einer oder zwei parallelen Ebenen vollständig begrenzt werden, so ist dies nur dann möglich, wenn die Durchdringungskurven Ellipsen sind. Daher sind in diesem Fall der parabolische und hyperbolische Cylinder, sowie das hyperbolische Paraboloid auszuschliefsen. Schneidet man indes die beiden Cylinder durch eine den Seitenkanten parallele Ebene, so sieht man ohne weiteres, dafs der vom Cylinder und der Ebene be-

grenzte Raum unter die $\mathfrak{K}_c$ zu rechnen ist. Hinsichtlich des hyperbolischen Paraboloides sei auf den Abschnitt F verwiesen.

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns zum

(39) Lehrsatz: Schneidet die Anfangsebene eine Fläche zweiter Ordnung in einer Ellipse, so ist der durch die Fläche bestimmte Raum ein $\mathfrak{K}_n$.

$$(n = c,\ p,\ e,\ k,\ hh,\ h.)$$

Beweis: Wir setzen als bekannt voraus, dafs die der Anfangsebene parallel liegenden Ebenen ebenfalls in Ellipsen schneiden, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Diese Gerade wählen wir zur z Achse, (Fig. 7) und die in der Anfangsebene liegenden Ellipsenachsen zur x- und y-Achse, sodafs das System einfach rechtwinkelig ist. Die z Achse sei gegen die xy Ebene unter ω geneigt.

Unter diesen Umständen mufs die Gleichung der Fläche in folgender Form darstellbar sein:

$$(40) \qquad \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 = \alpha + \beta z + \gamma z^2.$$

Das Vorhandensein eines der Glieder xy, x, y würde nämlich mit der Bestimmung der x- und y-Achse, und das der Glieder xz, yz mit der Bestimmung der z-Achse im Widerspruch stehen. Sonach ist:

$$f = \pi m n \left[\alpha + \frac{\beta}{\sin\omega}(z \sin\omega) + \frac{\gamma}{\sin^2\omega} \cdot (z \sin\omega)^2\right].$$

Da $z \sin\omega$ den früher mit x bezeichneten Abstand von der Anfangsebene angiebt, so ist der Beweis erbracht.

Zusatz: Schnittfiguren negativer Gröfse sind bei den Flächen zweiter Ordnung ausgeschlossen.

Soll nämlich $f < 0$ sein, so mufs auch $\alpha + \beta z + \gamma z^2 < 0$ sein, und die Ellipse somit imaginäre Halbachsen haben.

Um die Flächen zweiter Ordnung in die verschiedenen Arten der $\mathfrak{K}_n$ einzuordnen, stelle man die Anzahl der der Anfangsebene parallelen Nullflächen oder Berührebenen fest, bestimme hierauf die Lage des Körpers gegen dieselben und berücksichtige den Zusatz. Die Flächen verteilen sich dann so, dafs die Bezeichnungen der einzelnen Körperarten gerechtfertigt sind.

Hinsichtlich der einzelnen Bestimmungsstücke sei noch folgendes bemerkt.

Das Ellipsoid. (Fig. 2.) Als Anfangsebene kann eine beliebige Schnittebene gewählt werden. r ist der Abstand des Mittelpunktes von der ihr parallelen Berührebene, M die Fläche der parallelen Ellipse, welche den Mittelpunkt mit dem Ellipsoid gemeinsam hat, K der Inhalt des ganzen Ellipsoides und Z_e ein ellipsoidischer Kegel. $\gamma = \frac{M}{r^2}$ ist bei der Kugel stets $= \pi$. Beim allgemeinen Ellipsoid giebt es unendlich viele Berührebenen, für welche $\gamma = \pi$. Dieselben berühren zugleich eine dem Ellipsoid gleiche und konzentrische Kugel. Aus $K = \frac{4}{3} Mr$ kann man den Satz ableiten: In jedem Ellipsoid ist das Produkt zweier auf einander senkrecht stehenden Halbmesser in ihren Abstand von der parallelen Berührebene dem Produkt der Halbachsen gleich.

Das zweischalige Hyperboloid. (Fig. 3.) r ist der Abstand des Mittelpunktes von einer der beiden Berührebenen, welche der Anfangsebene parallel sind. E ist der Asymptotenkegel, und M die Fläche der Ellipse, in welcher er die Berührebenen schneidet. K ist der Teil des asymptotischen Doppelkegels, welcher zwischen beiden Berührebenen liegt. Z_h ist ein hyperboloidischer Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt liegt, und dessen Grundfläche eine nach seiner Innenseite gewandte hyperboloidische Haube mit elliptischem Rande ist.

Das einschalige Hyperboloid. (Fig. 4.) M ist die der Anfangsebene parallele Ellipse, welche mit dem Hyperboloid den Mittelpunkt gemeinsam hat. E ist der Asymptotenkegel, und r der Abstand des Mittelpunktes von einer der beiden der Anfangsebene parallelen Ebenen, welche E in einer Ellipse von der Gröfse M schneiden. K ist der von diesen beiden Ebenen abgeschnittene Teil des asymptotischen Doppelkegels.

Für beide Hyperboloide ist $\gamma = \frac{M}{r^2}$ und bei besonderen Lagen der Anfangsebene $= \pi$.

Hierdurch sind die Formeln für den körperlichen Inhalt und das statische Moment von Teilen des Kugelkörpers, wie sie in den elementaren Lehrbüchern der Stereometrie durchgenommen zu werden pflegen, auf die Flächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt über-

tragen, und es zeigt sich die merkwürdige Thatsache, dafs sie an Einfachheit nichts einbüfsen, und dafs vielmehr nur auf die geometrische Bedeutung der auftretenden Buchstaben, einschliefslich des hier durch γ ersetzten π, zu achten ist.

Sind C und D die Mittelpunkte der Grenzellipsen einer Schicht (Fig. 7*), und $CAED$ und $CBFD$ zwei beliebige durch CD gelegte Ebenen, so bestimmen dieselben einen Ausschnitt der Schicht $CAEDFB$. Jeder Parallelschnitt dieses Ausschnittes steht zum entsprechenden der Schicht in einem bestimmten Verhältnis, und es ist daher der Ausschnitt ein Körper derselben Art, wie die Schicht. Sein Inhalt verhält sich zur Schicht, wie der Ellipsenausschnitt CAB zur Ellipse um C, d. i. wie $\arcsin \frac{\Delta'}{\Delta}$ zu 2π, wenn das Dreieck CAB mit Δ' bezeichnet wird und das von zwei zugeordneten Halbmessern derselben Ellipse gebildete Dreieck mit Δ. Da ferner die Dreiecke CAB und DEF ähnlich und ähnlich gelegen sind, so ist $AB \parallel EF$, und es kann sonach eine Gerade mit Beibehaltung ihrer Richtung den Bogen AE und BF entlang gleiten. Dieselbe beschreibt einen Cylinder zweiter Ordnung, welcher mit $CAED$ und $CBFD$ einen Cylinderausschnitt bestimmt. In gleicher Weise wie oben schliefst man, dafs auch dieser ein Körper derselben Art ist, und dafs sich sein Inhalt zu dem der Schicht verhält, wie das Dreieck CAB zur Ellipse um C, d. i. $= \Delta' : 2\pi\Delta$.

Folglich gilt:

Cylinderausschnitt: Schichtausschnitt: Schicht

$$= \frac{\Delta'}{\Delta} : \arcsin \frac{\Delta'}{\Delta} : 2\pi.$$

Wählt man statt der allgemeinen Schicht ein vollständiges Ellipsoid, so wird der Schichtausschnitt zu einem sogenannten körperlichen Zweieck, welches von zwei beliebigen Halbellipsen begrenzt wird, die mit dem Ellipsoid den Mittelpunkt gemeinsam haben. In der dem gemeinsamen Durchmesser zugeordneten Schnittellipse liegen Δ' und Δ. Somit ist das

Ellipsoidische körperliche Zweieck $= \frac{2}{3}\, abc \cdot \arcsin \frac{\Delta'}{\Delta}\cdot$

Der zugehörige Cylinderausschnitt $= \frac{2}{3}\, abc \cdot \frac{\Delta'}{\Delta}\cdot$ Noch

einfachere Ausdrücke erhält man mittelst der Simpsonschen Regel. Aus letzterer geht namentlich hervor, dafs der Cylinderausschnitt noch einmal so grofs ist, wie die vom Durchmesser und der Sehne des Mittelschnittes bestimmte dreiseitige Pyramide, so dafs man also für denselben einen von π freien Wert erhält.*) Hierbei sei noch bemerkt, dafs wenn zwei in verschiedenen Ebenen gelegene beliebige Halbellipsen den Durchmesser gemeinsam haben, durch dieselben stets ein Ellipsoid und ein elliptischer Cylinder gelegt werden kann.

Aus den aufgestellten Formeln ergeben sich folgende

Sätze über Flächen zweiter Ordnung, welche sich in einem parallelen Ellipsenpaar durchdringen.

1) Durch ein Ellipsoid und ein Paraboloid entsteht ein Ring (Fig. 8) mit ellipsoidischer Aufsen- und paraboloidischer Innenwandung, welcher so grofs ist, wie das Ellipsoid, welches dem gegebenen ähnlich ist und ähnlich liegt und die beiden Ellipsenebenen berührt. Sind die Ellipsen gleich, so tritt für das Paraboloid ein elliptischer Cylinder ein.

2) Durch ein Paraboloid und ein einschaliges Hyperboloid oder die eine Schale eines zweischaligen Hyperboloides entsteht ein Ring von paraboloidischer Aufsen- und hyperboloidischer Innenwandung, welcher halb so grofs ist, wie der gleichhohe Asymptotenkegel, dessen Grundfläche der Schnittebene parallel liegt. Schneidet das Paraboloid beide Schalen, so kann der von diesen drei Flächenstücken eingeschlossene Raum mit einem Stumpf des Asymptotenkegels verglichen werden. Wird nämlich letzterer auf derselben Seite seiner Spitze von zwei, den Ellipsen parallelen Ebenen so geschnitten, dafs die eine Schnittebene das Hyperboloid berührt, während die andere von der Kegelspitze halb so weit absteht, als die Ellipsenebenen von einander, so ist der erhaltene Kegelstumpf der vierte Teil jenes Raumes.

*) Dieser Satz ist für den besonderen Fall, dafs die eine Ellipse ein Kreis ist, und dafs die Cylinderkanten auf dessen Ebene senkrecht stehen, in der Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Höfler (s. d. laufenden Jahrg. ds. Z. Hft. 1. S. 7) enthalten. Der Satz für den aus dem Kugelquadranten entwickelten Cylinderausschnitt findet sich u. a. in der Sammlung von Abiturientenaufgaben von Martus (Nr. 561 der 1. Aufl. v. J. 1865) vor.

3) Wird ein Ellipsoid von einem $\left\{\begin{array}{l}\text{anderen}\\ \text{einschaligen}\end{array}\right.$ Hyperboloid (Fig. 9) durchbohrt, so ist der beiden gemeinsame Raum

$$= \frac{1}{6}\left[(d^3 - h^3)\,\gamma \pm h^3\gamma'\right].$$

Hierbei ist h der Abstand der Schnittebenen und γ' die mit Rücksicht auf letztere bestimmte Konstante der durchbohrenden Fläche; d und γ gehören dem durchbohrten Ellipsoid an, und zwar ist d der gegenseitige Abstand der Berührebenen, welche den Schnittebenen parallel sind.

(Schluſs folgt.)

Kleinere Mitteilungen.

Winkelgrad und Bogengrad.

Ein Beitrag zur Klärung eines dunklen Punktes der Elementargeometrie.

Vom Herausgeber.

In fast allen, auch in den neueren Lehrbüchern über ebene Geometrie wuchert gleich einem Unkraut fort und fort die Unklarheit über die obgenannten Begriffe. Eine Folge davon ist, dafs in manchen dieser Bücher gegen den Satz losgezogen wird: „der Winkel wird durch den zugehörigen (Kreis-) Bogen gemessen" (oder: „der Kreisbogen ist ein Mafs für den Winkel"), ohne dafs man sich die Mühe giebt, diesen Fehler bis zu seiner Quelle zu verfolgen und dadurch die Unklarheit hinwegzuräumen. Ich habe in meiner „Vorschule der Geometrie" S. 44 diesen Punkt klar auseinandergesetzt. Da dies aber zu wenig bekannt geworden zu sein scheint, so will ich hier diesen Gegenstand nochmals und zwar ausführlicher besprechen.

Man unterscheidet nicht (oder nicht streng genug) die **Winkel**einheit von der **Bogen**einheit. Am klarsten ist dem Anfänger natürlich die Bogeneinheit, weil ihm aus der Anschauung, oder auch aus seiner Selbsthätigkeit d. h. aus der selbstgefertigten Zeichnung, das Kreisbogenstück $\widehat{AB} = \frac{1}{360}$ eines (gröfseren oder kleineren) Kreisumfangs geläufig ist. Nicht so der Winkelgrad d. h. die Winkeleinheit oder der spitze Winkel $A\hat{O}B$ als Begrenzungselement eines Kreisausschnitts, zu welchem jener Bogengrad gehört und von denen 360 nebeneinandergelegt den ganzen Raum um den Winkelscheitel oder um den Kreismittelpunkt ausfüllen. Dieser Winkelgrad als Winkeleinheit aufgefafst ist deshalb dem Schüler nicht geläufig, weil er ihm im Unterricht nicht fest eingeprägt wird. Dies wäre aber um so notwendiger, als diese Winkelform bei ihrer Kleinheit weit schwieriger in der Vorstellung haftet, als die Form eines Bogens. Die Schwierigkeit liegt in dem psychologischen Akte, bei welchem das geistige Auge während der Vorstellung des Winkelgebildes $A\hat{O}B$ eine gebrochene Strecke $A \cdots\cdot \hat{O} \cdots\cdot B$ durchlaufen mufs, deren Richtungsänderung an der Brechungsstelle (O) hier sogar sehr bedeutend ist, nämlich $A\check{O}B = 359^0$.

Der Ausdruck „der Winkel wird durch den Bogen gemessen“ wurde daher in der Sprache der Elementargeometrie zu einem — freilich anfechtbaren — Behelf, weil man den dunklen oder fehlenden anschaulichen Begriff der Winkeleinheit d. i. des Winkelgrades (Winkels = 1^0) durch den dem Schüler anschaulich klaren Begriff des Bogengrades — ersetzen wollte. Nun ist ja freilich ein Winkel ein ganz anderes Gebilde als ein Bogengrad: jener ein geradliniges aus der (plötzlichen aber) einmaligen Änderung der Richtung entstandenes, dieses ein krummliniges, aus der stetigen Richtungsänderung eines Radius und seiner zugehörigen Tangente entstandenes. So verschiedene Gebilde lassen sich doch nicht durch einander messen! Man kann Gebilde doch nur durch gleichartige messen, also: Winkel durch Winkel, Bogen durch Bogen, Gerade durch Gerade, Fläche durch Fläche u. s. w. Insofern haben diejenigen Recht, welche den Ausdruck „der Winkel wird durch den Bogen gemessen“ verurteilen.

Man könnte eher sagen: dem Winkel entspricht der zugehörige Bogen, der Winkeleinheit die Bogeneinheit d. i. dem Winkelgrad der Bogengrad. Nur hat leider der (auch sonst in der Mathematik oft angewandte) Ausdruck „entsprechen“*) wegen seiner Weite etwas Unklares; er gleicht einem Sacke, in den man recht viel hineinpacken kann. Klarer wäre vielleicht: zum Winkel gehört der Bogen etc.

Gerade so, wie es fehlerhaft ist eine Gröfse durch eine ihr ungleichartige zu messen (Winkel durch Grade), ebenso fehlerhaft ist es, solche ungleichartige Gröfsen in Verhältnis zu setzen (denn ein Verhältnis setzt immer eine Division, ein Messen voraus!). Dieses offenbaren Fehlers macht man sich aber schuldig, wenn man z. B. bei der Entwickelung der Formel für den Kreisbogen oder für die Fläche eines Kreissektors schreibt, wie es in den Lehrbüchern geschieht:

$$F_{sekt.} : r^2\pi = \alpha : 360^0 = b : 2\,r\pi \text{**)}$$

Hierin ist doch offenbar unter α der zu F gehörige Gradwinkel zu verstehen, unter 360^0 aber der Umfang, sonst müfste es heifsen α^0; denn das Zeichen ^{0} ist ja das Zeichen für den Bogengrad; es wird aber leider für beide Formen für den Bogen- und für den Winkelgrad gebraucht und hieraus müssen Unzuträglichkeiten entstehen.***)

*) Gerade so, wie der Begriff „Verhältnis“.

**) Diese Formel ist entnommen dem Lehrbuche eines sehr angesehenen Mathematiklehrers.

***) Welche Verwirrung über den Begriff „Grad“ und das ihn ausdrückende Zeichen in den Lehrbüchern herrscht, ersieht man aus folgender Zusammenstellung:

Baltzer, Elemente d. Geom., 3. Aufl. 1870. S. 11 sagt: „Um das Verhältnis des Winkels zur Ebene anzugeben, teilt man die Ebene in 360 gleiche Winkel, welche Grade (360°, μοῖραι) heifsen etc.“ Hier also ist der Winkel ein Stück der Ebene. Bei diesem Autor ist bekanntlich Winkel mit Winkelebene (W—raum) identisch, während wir der Ansicht

Es würde sich daher empfehlen, für jeden dieser Begriffe einen besonderen Ausdruck und ebenso ein besonderes Zeichen zu wählen.

Zur Beseitigung der im Vorausgehenden gerügten Unklarheit im Gebrauche des Wortes „Grad" schlage ich daher Folgendes vor:

---

sind, dafs der Winkel nur das formgebende (bildende) Element (Figur) an einem Ebenenstück ist, eine Ansicht, die wir zu wiederholten Malen in dieser Zeitschr. ausgesprochen haben und die noch von niemandem widerlegt worden ist. Vgl. XVI, 342.

Wittstein, Lehrbuch d. Elementarmathematik. Hannover, 1872. Geom. S. 17 sagt (§ 31): „Jede Kreisperipherie wird in 360 gleiche Teile geteilt und ein solcher Teil ein Grad genannt." Hier also ist der „Grad" ein Bogenstück.

Reidt, Elemente d. Math. Berlin, 1885. Planim. 8. Aufl. S. 10 § 9 sagt: „der 90. Teil eines rechten Winkels heifst ein Grad etc." Hier also ist unter „Grad" der Winkelgrad gemeint.

Kruse, Geometrie der Ebene, Berlin, 1875, erklärt „Grad" gar nicht, hat daher auch unter der „Erklärung der Zeichen" das Winkel- und Gradzeichen nicht; dies ist sehr erklärlich daraus, weil die Krusesche Geometrie ganz das Gepräge einer neuern Geometrie der Lage hat und wie jede solche Geometrie, alles was nur nach Messen riecht, entschieden abweist.

Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik (14. Aufl. 1886), ein Buch, welches — wenigstens in Preufsen — für einen Musterleitfaden gehalten wird, sagt S. 3: „Daher kann man den Kreisbogen benutzen, um den zugehörigen Winkel zu messen. Man teilt zu diesem Zwecke die ganze Peripherie in 360 gleiche Teile, Grade (°) genannt, jeden Grad u. s. w. . . . .; und man versteht beispielsweise unter einem Winkel von 7° einen solchen, dessen zugehöriger Bogen 7 Grad, d. h. den 360sten Teil der Peripherie 7mal enthält." Also auch hier dasselbe Wort und Zeichen für zwei verschiedene Gestalten und Begriffe!

Auch in dem neuen Lehrbuche der Geometrie von Henrizi-Treutlein fanden wir „Grad" nicht erklärt.

Dagegen ist die Sache richtig aufgefafst und dargestellt in dem Lehrbuche der Elementarmathematik von Becker II. Tl. 1. Bd. Dort heifst es S. 17: „Man teilt eine feste Kreislinie in 360 gleiche Teile, welche Grade heifsen. . . . . . Ein Winkel, der durch $^1/_{360}$ Umdrehung gemessen wird, heifst ein Winkelgrad. Nimmt man nun den Winkelgrad als Einheit für das Mafs eines Winkels, so findet man, wie viele Grade (Winkelgrade) er mifst, wenn man statt dieser die Bogengrade zählt, die bei der angegebenen Lage des eingeteilten Kreises in seine Fläche fallen." Dieser Autor unterscheidet also richtig Winkelgrad und Grad, d. i. Bogengrad.

Auch Schlömilch in seiner „Geometrie des Mafses" unterscheidet diese Begriffe und zwar noch genauer als Becker. Er sagt (5. Aufl. S. 14) „dabei denkt man sich . . . den rechten Winkel in 90 gleiche Teile geteilt und nennt einen solchen Teil einen Winkelgrad" und S. 99: „denkt man sich (nämlich) den Kreisumfang in 360 gleiche Teile zerlegt, so entsteht ein Bogen, welcher ein Bogengrad heifst." Er hat aber ebenfalls (wie alle) dasselbe Zeichen für beide Arten der Grade nämlich °.

Dagegen fehlt hierin auch das für Anfänger so vorzügliche, weil nicht in starrer dogmatischer Form verfafste, Lehrbuch der Geom. von Snell (2. Aufl. 1858). Auch heifst es dort (Bd. II., S. 46): „Man sagt daher kurz, das Mafs eines Centriwinkels ist der Bogen, auf welchem er mit seinen Schenkeln steht."

1) Man brauche das Wort „Grad“ nur für Bogengrad also für die Bogeneinheit und bezeichne diesen Einheitsbogen mit $\overset{\frown}{^{0}}$ also z. B. $45\overset{\frown}{^{0}}$ heifst 45 Bogengrade.

2) Man wähle für die Winkeleinheit, also für den 360. Teil des Vollwinkels, d. i. den zur Gradeinheit zugehörigen spitzen Winkel ein anderes Wort, nötigenfalls ersinne man ein solches. Da jeder Winkel eine Öffnung hat (ein noch offenes Gebilde ist), so schlagen wir vor, dasselbe mit der Anfangssilbe von „offen“ zu bezeichnen, also mit „Off,“*) sonach zu sagen „das Off“; dieses Wort empfiehlt sich, gleichwie „Grad“ durch seine Kürze. Das Off als Winkeleinheit entspricht also dem Grad als Bogeneinheit.

3) Das „Off“ werde bezeichnet durch $\hat{^{0}}$ im Gegensatz zum $\overset{\frown}{^{0}}$, z. B. $45\hat{^{0}}$ heifst ein Winkel von 45 Winkelgraden.

Dem Bogen- und Winkelgrad entspricht als Flächeneinheit der Kreisfläche der Sektorgrad, d. i. die von den Halbmessern OA, OB und dem Bogen $\widehat{AB}$ eingeschlossene Sektorfläche. Denn gerade so, wie der Bogen im Bogengrad ($\overset{\frown}{^{0}}$), der Winkel im Winkelgrad (dem „Off“ $= \hat{^{0}}$) seine Einheit hat, ebenso hat sie die Kreisfläche im Sektorgrad.**) Man könnte nun auch, indem man immer das Grundwort zum Bestimmungswort macht, umgekehrt sagen: Gradbogen,***) Gradwinkel, Gradsektor; dies thut z.B. Kambly (Elem. Math. Plan. 46. Aufl. §. 96), indem er unterscheidet zwischen Gradbogen und Gradwinkel, gleichwohl für beide Formen dasselbe Zeichen (^{0}) setzt. Allein es scheint uns richtiger, in diesen Ausdrücken das allen drei Gestalten Gleiche, nämlich die Formeinheit durch das Grundwort hervortreten zu lassen, also zu sagen:

Bogengrad, Winkelgrad (= Off), Sektorgrad.

Ich ersuche alle Verfasser von neuen geometrischen Lehrbüchern oder von neuen Auflagen solcher Bücher diese Begriffe — auch wenn sie das neue Wort „Off“ nicht acceptieren — recht anschaulich festzustellen und auseinanderzuhalten.

---

*) Ähnlich wie in der Elektrizitätslehre die Ausdrücke „Ohm“ und „Volt.“

**) Abzukürzen durch S^0. Man könnte aber hierzu auch das Zeichen ∢ wählen, das jetzt für „Winkel“ gebräuchlich ist, da dasselbe in seiner Form die Verbindung eines Winkels mit dem zugehörigen Bogen ausdrückt und also recht gut die Fläche, die von diesen Gebilden umschlossen wird, bezeichnen kann. Nur müfste es dementsprechend genauer und nicht so nachlässig, wie gewöhnlich, geschrieben werden (∢).

***) Unter „Gradbogen“ versteht man gewöhnlich allgemein: irgend einen Bogen, der in Grade eingeteilt ist.

Zum Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Prof. Dr. Lieber-Stettin und C. Müsebeck-Waren.

A. Auflösungen.

636. (S. die Aufgabe in Heft 4, S. 276.)

2. Beweis. Die trimetrischen Koordinaten von α seien x, y, z; dann ist $x : y : z = \frac{\lambda}{a} : \frac{\lambda^2}{b} : \frac{1}{c}\cdot$ Der Gleichung der Ellipse BCE mit dem Centrum A'': $a^2x^2 - bcyz = 0$ genügen die Koordinaten von α, mithin ist α ein Punkt derselben. — Ist $\lambda = 0$, so fällt C', also auch β mit A zusammen, ebenso A' und γ mit B, B' und α mit C. Ist $\lambda = \infty$, so fallen B' und γ mit A, C' und α mit B, A' und β mit C zusammen. Für den Eall $\lambda = 1$ bestimme man den Abstand der Punkte α, β, γ von den Seiten von ABC; diese sind, wenn man $\lambda^2 + \lambda + 1 = n$ setzt: $x_\alpha = \frac{\lambda h_a}{n}$; $y_\alpha = \frac{\lambda^2 h_b}{n}$; $z_\alpha = \frac{h_c}{n}$; $x_\beta = \frac{h_a}{n}$; $y_\beta = \frac{\lambda h_b}{n}$; $z_\beta = \frac{\lambda^2 h_c}{n}$; $x_\gamma = \frac{\lambda^2 h_a}{n}$; $y_\gamma = \frac{h_b}{n}$; $z_\gamma = \frac{\lambda h_c}{n}\cdot$ Da nun Dreieck $\alpha\beta\gamma = \triangle - (B\alpha C + C\beta A + A\gamma B) = \triangle - \frac{1}{2}(ax_\alpha + by_\beta + cz_\gamma) = \frac{(\lambda - 1)^2 \triangle}{\lambda^2 + \lambda + 1}$ ist, so folgt $\alpha\beta\gamma = 0$ für $\lambda = 1$ d. h. t_a, t_b, t_c sind die Mittellinien von ABC und E ist das Nulldreieck der Schar $\alpha\beta\gamma$. Dreieck $\alpha\beta\gamma$ erreicht sein Maximum $4\triangle$, wenn $\lambda = -1$ ist d. h. A', B', C' liegen im Unendlichen und $\beta\gamma \parallel BC$.

Emmerich. Stegemann.

Anmerkung. $\triangle B\alpha C = C\beta A = A\gamma B = \frac{\lambda \triangle}{\lambda^2 + \lambda + 1}\cdot$

637. (Gestellt von Sporer XVII_8, 597.) Die Determinante verschwindet stets: a) wenn die Glieder von drei Horizontalreihen arithmetische Reihen erster Ordnung bilden; b) in folgendem Falle:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}$$

Beweis. Da die Anzahl der Elemente einer Reihe willkürlich ist, so sei

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & a+3x & a+4x \\ b & b+y & b+2y & b+3y & b+4y \\ c & c+z & c+2z & c+3z & c+4z \\ d & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

Hieraus erhält man, wenn man $d_1 - d = f_1$, $d_2 - d_1 = f_2$, $\cdots e_1 - e = g_1$, u. s. w. setzt.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & x & x \\ b & y & y & y & y \\ c & z & z & z & z \\ d & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ e & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & 0 & 0 & 0 \\ b & y & 0 & 0 & 0 \\ c & z & 0 & 0 & 0 \\ d & f_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ e & g_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 2\alpha+3 & 2\alpha+5 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 2\beta+3 & 2\beta+5 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 2\gamma+3 & 2\gamma+5 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 2\delta+3 & 2\delta+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 2 & 2 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 2 & 2 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 2 & 2 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

BEYENS (Cadiz). EMMERICH (Mülheim a. d. R.). END (Würzburg). FUHRMANN (Königsberg i. Pr.). HODUM (Stafsfurt). KOBER (Schollwitz). LENGAUER (München). MEINEL (Fürth). v. MIORINI (Bielitz). SAUTER (Ulm). SCHLEGEL (Hagen). SPORER (Weingarten). STEGEMANN (Prenzlau). STOLL (Bensheim). UNBEKANNT.*)

Anmerkung. Es ist allgemein

$$\begin{vmatrix} {\alpha_1}^2 & (\alpha_1 + \delta_1)^2 & (\alpha_1 + 2\delta_1)^2 \\ {\alpha_2}^2 & (\alpha_2 + \delta_2)^2 & (\alpha_2 + 2\delta_2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

Diese Relation gilt nicht nur für die zweite, sondern für jede Potenz der Glieder arithmetischer Progressionen. Für die n^{te} Potenz ihrer Glieder verschwindet die so gebildete Determinante, da die n^{te} Potenz eines Binoms $n + 1$ Glieder hat, vom $(n + 2)^{\text{ten}}$ Grade an.

KOBER. LENGAUER.

638. (Gestellt von Emmerich XVII$_8$, 597.) Für $a + b + c = 2s$ ist identisch $a(s - a)^2 + b(s - b)^2 + c(s - c)^2 = a(s - b)(s - c) + b(s - c)(s - a) + c(s - a)(s - b)$.

1. **Beweis.** Die Identität läfst sich in folgende Determinantenform bringen:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ s-c & s-a & s-b \\ s-b & s-c & s-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ s-b & s-c & s-a \end{vmatrix} = 0$$

EMMERICH. MEINEL. v. MIORINI. UNBEKANNT.**)

2. **Beweis.** Aus $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$ folgt $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. Setzt man diese Werte in die

---

*) Wir ersuchen die Herren Einsender, immer ihre Namen zu nennen, auch dieselben deutlich zu schreiben. Red. d. Z.

**) S. oben.

gegebene Gleichung ein, so erhält man $(y+z)x^2+(z+x)y^2+(x+y)z^2 \equiv (y+z)yz+(z+x)zx+(x+y)xy$.

HODUM. KOBER. LENGAUER. SCHMIDT (Spremberg) STOLL.

3. Beweis. Entwickelt man die Glieder der Gleichung und ordnet nach s, so erhält man $s^2(a+b+c)-2s(a^2+b^2+c^2)+a^3+b^3+c^3=s^2(a+b+c)-2s(ab+ac+bc)+3abc$; mithin $a^3+b^3+c^3-3abc \equiv 2s(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

BERMANN (Liegnitz). BEYENS. DREES (Oldenburg). END. FUHRMANN. HELM (Liegnitz). LUKÁCSI (Szatmás). SAUTER. STEGEMANN.

639. (Gestellt von Schlömilch XVII_8, 597.) Bezeichnet α einen beliebigen Kreisbogen, so konvergieren die Summen $\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n^2}+\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{n^2}\cdots+\operatorname{tg}\frac{n\alpha}{n^2}$ bei unendlich wachsendem n gegen den gemeinschaftlichen Grenzwert $\frac{1}{2}\alpha$.

Beweis. Für jeden Wert von α ist: $\sin\alpha+\sin 2\alpha\cdots+\sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\,\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (vgl. u. a. Gallenkamp, Sammlung trig. Aufg. 2. Aufl. S. 64); woraus unmittelbar, wenn $\frac{\alpha}{n^2}$ an die Stelle von α gesetzt wird, der die Sinussumme betreffende Satz folgt. Ferner konvergiert $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n^2}-\sin\frac{\alpha}{n^2}\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{n^2}-\sin\frac{2\alpha}{n^2}\right)+\cdots+\left(\operatorname{tg}\frac{n\alpha}{n^2}-\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right)$ bei unendlich wachsendem n gegen Null; denn bei hinreichend grofsem n ist in dieser letzteren Summe für jeden konstanten positiven Wert des α das letzte Glied das gröfste; also ist dann die Summe kleiner als $n\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}-\sin\frac{\alpha}{n}\right)=n\sin\frac{\alpha}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{n}}-1\right)$, welche Zahl gegen Null konvergiert. — Für negative Werte des α sind für ein hinreichend grofses n sämtliche Glieder negativ und das letzte Glied hat den gröfsten absoluten Wert.

BEYENS. EMMERICH. END. GALLENKAMP (Berlin). HODUM. LENGAUER. MEINEL. SCHMIDT. SIMON (Berlin). STEGEMANN. STOLL. UNBEKANNT.*)

Bermann setzt für die einzelnen sin und tg die entsprechenden Reihen ein, aus denen sich unmittelbar ergiebt, dafs sie für $n=\infty$ gegen $\frac{\alpha}{2}$ konvergieren.

640. (Gestellt von v. Jettmar XVII_8, 597.) a) Die Grundfläche g eines Prismatoids von der Höhe h ist ein Parallelogramm von gegebenem Inhalt; die Projektion der Deckfläche auf die Grundfläche bildet jenes Parallelogramm, welches durch die Verbindung der Halbierungspunkte der Seiten entsteht. b) Die Grundfläche eines Sphenisk (eines Prismatoids, dessen eine Grundfläche zu einer

---

*) S. oben.

Kante zusammengeschrumpft ist) ist ein Parallelogramm von gegebenem Inhalt; die Projektion der zur Grundfläche parallelen Kante auf die Grundfläche bildet eine Diagonale derselben. In welchen Abständen von der Grundfläche liegen in beiden Fällen die Schwerpunkte der Körper?

Auflösung. a) Die Grundfläche sei $ABCD$. E' sei der Mittelpunkt von AB, F' der von BC, G' der von CD, H' der von AD; entsprechend sei die Deckfläche $EFGH$; erweitert man dieselbe nun zu $A'B'C'D'$ so, dafs sie gleich $ABCD$ wird und zwar liege A' senkrecht über A u. s. w. Dann ist das Prismatoid gleich dem Prisma $ABCDA'B'C'D'$ weniger $4\,Pyr\ A - A'EH = gh - \frac{1}{3}h \cdot 4\,A'EH = gh - \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}g = \frac{5}{6}gh$. Der Schwerpunkt des Prismas hat von der Grundfläche die Entfernung $\frac{h}{2}$, also ist das Moment des Prismas $gh \cdot \frac{h}{2}$; der Schwerpunkt einer Pyramide hat von der Grundfläche die Entfernung $\frac{3}{4}h$, also ist das Moment der vier Pyramiden $\frac{1}{6}gh \cdot \frac{3}{4}h$; der Schwerpunkt des Prismatoids habe von der Grundfläche die Entfernung x, also ist sein Moment $\frac{5}{6}ghx$. Wir erhalten daher die Momentengleichung $gh \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{6}gh \cdot \frac{3}{4}h = \frac{5}{6}ghx$, also $x = \frac{9}{20}h$.

b) Die Grundfläche sei $ABCD$, die ihr parallele Kante $A'C'$; eine Ebene durch $A'C'$ parallel zu $ABCD$ gelegt, werde von den Senkrechten auf $ABCD$ in B und D resp. in B' und D' getroffen. Dann ist $Sphn\ ABCDA'C' = Prisma\ ABCDA'B'C'D' - 2\,Pyr\ B - A'B'C' = gh - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}gh = \frac{2}{3}gh$. Hat nun der Schwerpunkt des Sphenisk von der Grundfläche die Entfernung x, so erhalten wir die Momentengleichung $\frac{2}{3}gh \cdot x = gh \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{3}gh \cdot \frac{3}{4}h$; mithin $x = \frac{3}{8}h$.

Bermann. Beyens. Drees. Emmerich. Hodum. v. Jettmar (Wien). Lengauer. Meikel. Schmidt. Stegemann. Stoll.

641. (Gestellt von Kober XVII_8, 597.) Für welche Punkte der Ebene ist in Bezug auf ein vollständiges Vierseit die zugehörige Strahleninvolution a) eine gleichseitig-hyperbolische, b) eine rechtwinklig-elliptische?

Auflösung. a) Für die Höhenfufspunkte des Diagonaldreiseits. Siehe Schroeter: Über eine besondere Kurve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Kurve dritter Ordnung. Math. Annalen Band 5, Seite 50 u. f.

b) Für die zwei Schnittpunkte der über den Abständen der Gegenecken als Durchmesser beschriebenen drei Kreise. Siehe Steiner-Schroeter. Theorie der Kegelschnitte § 18.

Beyel (Zürich). Emmerich. Kober. Lengauer. Meinel. Stoll.

642. (Gestellt von Weber XVII$_8$, 597.) Ist m der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$, m' der des Ankreises an BC, so schneidet der über mm' als Durchmesser beschriebene Kreis auf den Seiten a, b, c die Strecken a, b, c ab und zwar jede zweimal.

Der Kreis, dessen Mittelpunkt G sei, geht durch B und C, schneidet also auf der Seite BC die Abschnitte $BC = CB = a$ ab; ferner schneide er AB in C' und AC in B'.

1. Beweis. Der Kreis liegt symmetrisch zur Halbierungslinie des Winkels α; mithin sind die Abschnitte AB' und AC der einen Sekante gleich den entsprechenden AB und AC' der anderen.

Emmerich. Fuhrmann. Hodum. Lengauer. Schmidt. Unbekannt.

2. Beweis. $\triangle AB'G \cong ABG$; also $AB' = AB$; ebenso $AC' = AC$.

Helm. Lengauer. Meinel. Sauter. Stegemann.

3. Beweis. $\triangle ABm' \sim AmC$ $\left(\sphericalangle Bm'A = mCA = \frac{\gamma}{2}\right)$, also $AB \cdot AC = Am \cdot Am'$; da aber auch $AB \cdot AC' = Am \cdot Am'$, so ist $AC' = AC$.

Weber (Frankfurt a. M.). Weidenmüller (Marburg i. H.).

4. Beweis. $c \cdot AC' = Am \cdot Am'$; nun ist $Am = \frac{s-a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ $= \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}}$ und $Am' = \sqrt{\frac{sbc}{s-a}}$; mithin $AC' = b$.

Bermann. Beyens. Lengauer. Stoll.

643. (Gestellt von Schlömilch XVII$_8$, 598.) Auf der X-Achse sind die Strecken $CA = a$ und $CA_1 = a_1$, auf der Y-Achse die Strecken $CB = b$, $CB_1 = b_1$ abgeschnitten, wobei $a < a_1$ und $b > b_1$ sein möge; nimmt man a und b, ebenso a_1 und b_1 als Halbachsen von Ellipsen, so schneiden sich die Quadranten AB und A_1B_1 in einem Punkte M und es entstehen die Halbmondflächen AMA_1 und BMB_1. Unter welchen Umständen sind diese gleich und wie findet man einen Kreissektor, welcher dieselbe Fläche besitzt?

1. Auflösung. Da $BMB_1 = AMA_1$ sein soll, so mufs auch $ABC = A_1B_1C$ sein, mithin $ab = a_1b_1$. — Man fälle nun von M auf CA_1 die Senkrechte MN, welche von den Kreisen um C mit CA_1 und CA in P und Q getroffen wird. Dann ist $MAA_1 = MNA_1 - MNA = \frac{b_1}{a_1} PNA_1 - \frac{b}{a} QNA = \frac{b_1}{a_1}$ (Sekt $PCA_1 - \triangle PCN$) $- \frac{b}{a}$ (Sekt $QCA - \triangle QCN$). Aus den Gleichungen der Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ ergiebt sich $CN = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + b_1^2}}$ und $MN = \frac{bb_1}{\sqrt{b^2 + b_1^2}}$; demnach ist $PN = \frac{a_1 b}{\sqrt{b^2 + b_1^2}}$ und $QN = \frac{ab_1}{\sqrt{b^2 + b_1^2}}$,

und folglich $\frac{b_1}{a_1} \triangle PCN = \frac{b}{a} \triangle QCN$. Setzt man noch $\sphericalangle PCN = \alpha_1$, $\sphericalangle QCN = \alpha$, so wird $MAA_1 = \frac{b_1}{a_1} \frac{\alpha_1}{360} a_1^2 \pi - \frac{b}{a} \frac{\alpha}{360} a^2 \pi = \frac{\alpha_1 - \alpha}{360} ab\pi$. Also ist MAA_1 gleich einem Sektor, dessen Radius $\sqrt{ab}$ und dessen Centriwinkel $\arcsin \frac{b^2 - b_1^2}{b^2 + b_1^2}$ ist.

Bermann. Drees. Emmerich. Fuhrmann. Hodum. Lengauer. Meinel. v. Miorini. Schmidt. Stoll.

2. Auflösung. Man konstruiere noch die beiden Ellipsen mit den Halbachsen a, b_1 und a_1, b; sodann projiziere man die ganze Figur auf eine Ebene, welche die Ebene der Figur in BC unter $\sphericalangle \alpha$ schneidet, der durch $\cos\alpha = \frac{b_1}{a} = \frac{b}{a_1}$ bestimmt ist. Die Projektionen $A'B'$ und $A_1'B_1'$ der beiden Ellipsen AB und A_1B_1 sind jetzt zwei kongruente Ellipsen, deren einer Schnittpunkt M' ist; die Ellipsen AB_1 und A_1B sind in der Projektion zu Kreisen geworden. Die Flächen der ursprünglichen Figur stehen zu ihren Projektionen im Verhältnis $1 : \cos\alpha$. Zieht man nun in der Projektion durch M' eine Parallele zu $C'A'$, welche den Kreis $A'B_1'$ in P und den Kreis $A_1'B'$ in Q schneidet, so verhält sich Sekt $A_1'C'M' : B_1'C'M' = A'C'P : B_1'C'P = \frac{\pi}{4} + \varphi : \frac{\pi}{4} - \varphi$, wo φ der Bogen zum Winkel $M'C'P$ ist. Da Sekt $A_1'C'M' + B_1'C'M' = \frac{\pi}{4} a_1 b_1 \cos\alpha = \frac{\pi}{4} bb_1$ ist, so ergiebt sich

$$A_1'C'M' = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) bb_1;\quad B_1C'M' = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) bb_1;$$

$$A'A_1'M' = B'B_1'M' = A_1'C'M' - B_1'C'M' = \varphi bb_1;$$

folglich $AA_1M = BB_1M = \frac{\varphi bb_1}{\cos\alpha} = \varphi ab = \varphi a_1 b_1$. Dies ist die Fläche eines Kreissektors, dessen Centriwinkel $PC'Q = 2\varphi$ und dessen Radius $\sqrt{ab}$ ist.

Stegemann.

644. (Gestellt von v. Fischer-Benzon XVII$_8$, 598.) Ein Punkt P ist mit drei Eckpunkten eines Quadrats $ABCD$ verbunden; man soll das Quadrat der Gröfse nach konstruieren, wenn PA, PB, PC gegeben sind.

1. Anal. B kann auf einem bekannten Kreise um P beliebig angenommen werden. Zeichnet man $\triangle CBQ$ kongruent und gleichwendig $\triangle ABP$, so ist $BQ \perp$ und $= BP$, daher Q bestimmt. Da ferner $QC = PA$ bekannt ist, so ist der Kreis mit PA um Q ein zweiter Ort für C.

v. Fischer-Benzon (Kiel). Fuhrmann. Hodum. Lengauer. v. Lühmann (Königsberg i. N.). Nisetro (Zara). Schlegel. Wachter (Schaarbeek bei Brüssel).

2. Anal. Das beliebig grofse Quadrat $A'B'C'D'$ befinde sich mit dem Quadrat $ABCD$ in Bezug auf den Punkt P in Ähnlich-

keitslage. Dann ist ein Ort für P der Apollonische Kreis, welcher $A'B'$ im Verhältnis $PA' : PB'$ teilt, der zweite der, welcher $B'C'$ im Verhältnis $PB' : PC'$ teilt.

BEYENS. EMMERICH. MEINEL. SAUTER. SCHMIDT. STAMMER (Düsseldorf). THIEME (Posen). WEIDENMÜLLER.

3. Anal. Die Seite des Quadrats sei x, seine Diagonale d, $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $\sphericalangle(AB, PB) = \varphi$, $\sphericalangle(PB, CB) = 270^0 - \varphi$ oder $90^0 - \varphi$, je nachdem P aufserhalb oder innerhalb des Quadrats liegt; dann ist $a^2 = x^2 + b^2 - 2xb\cos\varphi$ und $c^2 = x^2 + b^2 - 2xb\sin\varphi$, also $(x^2 + b^2 - a^2)^2 + (x^2 + b^2 - c^2)^2 = 4x^2b^2$; mithin

$$2x^2 = d^2 = a^2 + c^2 \pm \sqrt{-a^4 - 4b^4 - c^4 + 4b^2c^2 + 2c^2a^2 + 4a^2b^2}.$$

Der Radikand ist gleich dem 16fachen Quadrat eines Dreiecks, das die Seiten a, $2b$, c hat, woraus sich zugleich als Determination $a + c > 2b$ u. s. w. ergiebt. Konstruiert man dieses Dreieck und bezeichnet $\sphericalangle(a, c)$ mit ϑ, so ist $d^2 = a^2 + c^2 \pm 2ac\cos(90^0 - \vartheta)$; mithin ist d Seite eines Dreiecks, welcher der Winkel $90^0 - \vartheta$ oder $90^0 + \vartheta$ gegenüber liegt und dessen beide andere Seiten a und c sind.

HELM. v. MIORINI. STEGEMANN. STOLL.

645. (Gestellt von Emmerich XVII$_8$, 598.) Gegeben sind zwei sich in S schneidende Gerade L und L', welche den Winkel 2α bilden; man soll einen Kreis M zeichnen, der von ihnen gleiche gegebene Stücke $2a$ abschneidet, während die von S aus gezogenen Tangenten den Winkel 2β bilden.

1. Anal. Trägt man an SM in S zu beiden Seiten β an, so sind die erhaltenen Schenkel Tangenten für Kreis M. Zeichnet man nun einen beliebigen Kreis C, welcher diese Geraden ebenfalls berührt, so befindet sich derselbe mit M in Ähnlichkeitslage. Entsprechende Stücke verhalten sich also wie $SC : SM$; ist die Sehne, welche durch C von L abgeschnitten wird, gleich $2s$, so ist $s : a = SC : SM$, wodurch SM und also M bestimmt ist.

BEYENS. END. FUHRMANN. HODUM. LENGAUER. MEINEL. v. MIORINI. SAUTER. SCHMIDT. STAMMER. STEGEMANN. STOLL. VOLLHERING (Bautzen). WEIDENMÜLLER.

2. Anal. SM werde mit x bezeichnet, der Radius des Kreises M mit y und das Stück von L, welches zwischen S und dem Kreise M liegt, mit z, so ist $y = x\sin\beta$ (1); $z + a = x\cos\alpha$ (2); $z(z + 2a) = x^2 - y^2$ (3). Quadriert man (1) und (2) und subtrahiert (3) von der Summe, so erhält man $a^2 = x^2(\cos\alpha^2 - \cos\beta^2)$, mithin

$$x = \sqrt{\frac{a}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot \frac{a}{\sin(\beta - \alpha)}},$$ welcher Ausdruck leicht konstruiert werden kann.

BERMANN. EMMERICH. HELM. NISETEO.

646. (Gestellt von Sporer XVII$_8$, 598.) Einen Kreis zu konstruieren, welcher mit einer Parabel zwei gegebene Punkte A und B gemein hat und dieselbe aufserdem noch in einem dritten Punkte C berührt.

Anal. Wenn ein Kreis einen Kegelschnitt in vier Punkten schneidet und man die vier Punkte paarweise durch Gerade verbindet, so sind die Halbierungslinien der Winkel dieser Geraden den Achsen parallel. Fallen nun zwei von den Punkten zusammen, so ergiebt sich folgender Satz: Wenn ein Kreis einen Kegelschnitt berührt und noch in zwei Punkten schneidet, so ist die Halbierungslinie des Winkels, welchen die gemeinschaftliche Tangente und die gemeinschaftliche Sehne bilden, einer Achse parallel, also hier der Achse der Parabel. Da hier die Achse der Parabel gegeben ist, so findet man durch die Richtung der Sehne auch die der Tangente und damit den Berührungspunkt.

Zur Konstruktion kann man auch die AB parallele Tangente mit dem Berührungspunkt C' konstruieren; dann ist der Spiegelpunkt von C' in Bezug auf die Achse der Punkt C. Oder man konstruiert zu D, dem Mittelpunkt von AB den Spiegelpunkt E; dann trifft die durch E zur Achse gezogene Parallele die Parabel in C.

M. Baur (Stuttgart). Beyel. Beyens. Emmerich. Fuhrmann. Hodum. Lengauer. Meinel. v. Miorini. Nisetbo. Sauter. Schmidt. Sporer. Stammer. Stegemann. Stoll. Wachter.

647. Satz über den Brocardschen Kreis. (Gestellt von Fuhrmann XVII_8, 598.)

$$\cot\vartheta = \begin{vmatrix} \sin\alpha^3 & \sin\beta^3 & \sin\gamma^3 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \sin\alpha^3 & \sin\beta^3 & \sin\gamma^3 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Beweis. Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der dritten Horizontalreihe, so ist, da

$$\sin\alpha^3 = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha-\vartheta):\sin\vartheta$$

ist, im Zähler $\sin\beta^3\cos\gamma - \sin\gamma^3\cos\beta$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\vartheta}[\sin(\beta-\vartheta)\cos\gamma - \sin(\gamma-\vartheta)\cos\beta]$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\cot\vartheta,$$

also der Zähler gleich

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma[\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)]\cot\vartheta.$$

Im Nenner ist $\sin\beta^3\sin\gamma - \sin\gamma^3\sin\beta = \sin\beta\sin\gamma(\sin\beta^2-\sin\gamma^2)$ $= \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)$, also der Nenner gleich

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma[\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)].$$

Der Quotient beider Determinanten ist mithin $\cot\vartheta$.

Emmerich. Fuhrmann. Stoll.

2. Beweis. Es ist $\sin\alpha\cot\vartheta = \sin\alpha(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$ $= \cos\alpha + \frac{\sin\alpha^3}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$; wird daher $\cot\vartheta$ mit dem Nenner multipliziert, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha^3 & \sin\beta^3 & \sin\gamma^3 \\ \cos\alpha + \dfrac{\sin\alpha^3}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} & \cos\beta + \dfrac{\sin\beta^3}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} & \cos\gamma + \dfrac{\sin\gamma^3}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha^3 & \sin\beta^3 & \sin\gamma^3 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

wenn man die erste Horizontalreihe mit $\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$ multipliziert und von der zweiten subtrahiert. Meinel. Stegemann.

3. Beweis. Man setze $\sin\alpha = \frac{2\,\Delta}{bc}$, $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ u. s. w., so erhält man

$$\begin{vmatrix} \dfrac{8\,\Delta^3}{b^3c^3} & \dfrac{8\,\Delta^3}{c^3a^3} & \dfrac{8\,\Delta^3}{a^3b^3} \\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} & \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} & \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \dfrac{8\,\Delta^3}{b^3c^3} & \dfrac{8\,\Delta^3}{c^3a^3} & \dfrac{8\,\Delta^3}{a^3b^3} \\ \dfrac{2\,\Delta}{bc} & \dfrac{2\,\Delta}{ca} & \dfrac{2\,\Delta}{ab} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4\,\Delta^3}{a^4b^4c^4} \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a(b^2+c^2-a^2) & b(c^2+a^2-b^2) & c(a^2+b^2-c^2) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} :$$

$$\frac{16\,\Delta^3}{a^4b^4c^4} \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\,\Delta} = \cot\vartheta.$$

Beyens.

B. Neue Aufgaben.

691. Zu beweisen, dafs

a) $$\sum_1^{n-1} k \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n-1} = \frac{2n-1}{2} \sum_1^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n-1}};$$

b) $$\sum_1^{n} (2k-1) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{4n}\pi = 2n \sum_1^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n}} + n \text{ ist.}$$

Simon (Berlin).

692. Folgende Gleichungen aufzulösen: a) $(x+a)^4 + 4(x-b)^4 = c[(a+b)^2 + (x-b)^2]$ und b) $\left(y^2 + \sqrt{y^4-1}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^4-1}\right) = a;\ x^4 + y^4 = b.$ Szimányi (Trenchin).

693. x, y, z zu berechnen aus

a) $$x^m(x+y+z)^n = a(yz)^r \qquad y^m(x+y+z)^n = b(zx)^r \qquad z^m(x+y+z)^n = c(xy)^r$$

b) $$(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{ayz}{x} \qquad (z^2+x^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{bzx}{y} \qquad (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{cxy}{z}$$

Szimányi (Trenchin).

694. Wenn in einem Jahre, dessen Sonnenzirkel 19, dessen goldene Zahl 6 und dessen Römerzinszahl 14 ist, die Frühlings-Nachtgleiche am 20. März 5 Uhr nachmittags nach dem Kalender neuen Stils eingetreten ist und die Länge des tropischen Jahres 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 46,08 Sekunden beträgt; wann mufs sie in demjenigen Jahre eingetreten sein, dessen obengenannte chronologische Merkmale sämtlich 1 sind? FLEISCHHAUER (Gotha).

695. a) Wann liegt die Centrale eines Dreiecks (d. h. die Verbindungslinie der Mittelpunkte des Um- und des Inkreises) parallel zu einer gegebenen Dreiecksseite? b) In welchem Falle liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf der Peripherie des Inkreises? c) Können beide Lagen gleichzeitig stattfinden? SCHLÖMILCH.

696. Ein Kreisviereck zu konstruieren aus dem Radius des Umkreises, den Winkeln, welche die Gegenseitenpaare bilden und dem Verhältnis der Längen eines dieser Paare. FUHRMANN (Königsberg i. Pr.).

697. Die Mittelpunkte aller Rechtecke, deren Seiten durch vier feste Punkte gehen, liegen auf einem Kreise. SPORER (Weingarten).

698. (Aufgabe über den Brocardschen Kreis). Zu jedem Dreieck ABC gehört ein Brocardsches Dreieck $A_1B_1C_1$, welches mit Zuhülfenahme des Grebeschen Punktes des Dreiecks ABC leicht zu konstruieren ist. Man sucht die Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Konstruktion des Dreiecks ABC, wenn $\triangle A_1B_1C_1$ gegeben ist. EMMERICH (Mülheim a. d. Ruhr).

699. Ist ABC ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt, so giebt es unendlich viele Dreiecke abc, welche dem Dreieck ABC umgeschrieben sind und deren Ecken A_1, B_1, C_1 auf dem Kegelschnitt liegen. Jedes dieser Dreiecke ist zum Dreieck ABC perspektivisch und je ein Punkt des Kegelschnittes ist Projektionscentrum. BEYEL (Zürich).

700. a) Eine Gerade bewegt sich in vorgeschriebener Richtung so, dafs zwei gegebene Massen in Beziehung auf sie stets gleiches Trägheitsmoment haben. Welche Fläche wird von ihr erzeugt? b) In einer Ebene liegen zwei homogene Kreisflächen. Eine Gerade bewegt sich in dieser Ebene so, dafs die Kreise in Beziehung auf sie stets gleiches Trägheitsmoment haben. Welche Kurve hüllt sie ein? WEINMEISTER (Tharand).

701. Ein Strahl homogenen Lichtes soll unter Anwendung kongruenter Glasprismen $\left(\text{Brechungsexponent} = \frac{3}{2}\right)$ veranlafst werden, ein reguläres nEck zu durchlaufen. a) Zu beweisen, dafs dieses Arrangement nur möglich ist, wenn $n > 8$; b) für $n = 8$ den brechenden Winkel der Prismen zu berechnen. — Es wird vorausgesetzt, dafs der Lichtstrahl in jedem Prisma das Minimum der Ablenkung erfährt. EMMERICH (Mülheim a. d. Ruhr).

C. Aufgaben aus nicht-deutschen Fachzeitschriften.

Stereometrische Lehrsätze und Aufgaben.

(Die mit † versehenen Auflösungen sind von den Herren Aufgaben-Redakteuren hinzugefügt.)

326. Zieht man von einem Punkt B an den Kreis O die Tangenten BA und BC, fällt $AD \perp OC$ und läfst die Figur um OC rotieren, so ist das Volumen, welches durch das gemischtlinige Dreieck ABC erzeugt wird, gleich dem durch BCD erzeugten.

Beweis. Vol. $ABC =$ Vol. $ABCD$ — Vol. ACD — Sgm. AC $= \frac{1}{3}\pi CD(AD^2 + AD \cdot BC + BC^2) - \frac{1}{3}\pi CD \cdot AD^2 - \frac{1}{6}\pi AC^2 \cdot CD$ $= \frac{1}{3}\pi CD \cdot BC^2 + \frac{1}{6}\pi CD\,(2\,AD \cdot BC - AC^2)$. Schneiden sich OB und AC in E, so ist $\triangle BEC \sim CDA$, also CE oder $\frac{1}{2}AB : BC = AD : AC$, mithin $AC^2 = 2\,AD \cdot BC$. Daher Vol. $ABC = \frac{1}{3}\pi CD \cdot BC^2$.

Journ. élém.

327. O und O' seien zwei Kreise mit den Radien r und r_1, welche sich in C von aufsen berühren; von ihrem äufseren Ähnlichkeitspunkt S seien an O und O' die gemeinschaftlichen äufseren Tangenten $SA'A$ und $SF'F$ gezogen; die gemeinschaftliche Tangente in C trifft AA' in B; das über AA' liegende Segment des Kreises $AA'F'F$ heifse AHA'. Rotiert nun die Figur um SO, so ist das Volumen, welches zwischen den Kugeln und dem Kegel liegt, halb so grofs wie das durch Segment AHA' erzeugte Volumen; also Vol. $ACA' = \frac{1}{2}$ Vol. AHA'.

Beweis. Von A und A' seien auf SO die Senkrechten AD und $A'D'$ gefällt. Dann ist nach Nr. 326: Vol. $ABC = \frac{1}{3}\pi BC^2 \cdot CD$ und Vol. $A'BC = \frac{1}{3}\pi BC^2 \cdot CD'$; also Vol. $ACA' = \frac{1}{3}\pi BC^2 \cdot DD'$. Ferner Vol. $AHA' = \frac{1}{6}\pi AA'^2 \,.\, DD'$; da $AA' = 2\,BC$, so ist Vol. $AHA' = \frac{2}{3}\pi BC^2 \cdot DD'$; mithin Vol. $ACA' = \frac{1}{2}$ Vol. AHA'.

Journ. élém.

328. Berechnung von Vol. ACA' aus r und r_1 (Figur wie in Nr. 327).

Auflösung. $BC^2 = \frac{1}{4}AA'^2 = \frac{1}{4}\left((r + r_1)^2 - (r - r_1)^2\right) = rr_1$. Ferner $CD = r - OD$; fällt man $O'G \perp OA$, so ist $\triangle ODA \sim OGO'$,

also $OD : r = r - r_1 : r + r_1$ und $OD = \frac{r(r - r_1)}{r + r_1}$, also $CD = \frac{2rr_1}{r + r_1}$ und $DD' = \frac{4rr_1}{r + r_1}$. Daher Vol. $ACA' = \frac{4}{3}\pi \frac{r^2 r_1^2}{r + r_1}$.

Journ. élém.

329. Berechnung von Vol. $OAA'O'$ (Fig. wie in Nr. 327).

Auflösung. Vol. $OAA'O'$ = Vol. AOC + Vol. $A'O'C$ + Vol. $ACA' = \frac{2}{3}\pi CD(r^2 + r_1^2) + \frac{4}{3}\pi \frac{r^2 r_1^2}{r + r_1} = \frac{4}{3}\pi \frac{rr_1}{r + r_1}(r^2 + rr_1 + r_1^2)$.

Journ. élém.

330. Zieht man von einem Punkt A aufserhalb eines Kreises O (Radius r) den Durchmesser $ACOC'$ und die Tangente AB, fällt man ferner noch $BD \perp AO$ und läfst die Figur um AO rotieren, so ist das durch das gemischtlinige Dreieck ABC erzeugte Volumen gleich $\frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot OD$; und das durch das gemischtlinige Dreieck ABC' erzeugte Volumen gleich $\frac{1}{3}\pi AC'^2 \cdot OD$.

Beweis. † Wird AO mit x bezeichnet, so ist

$$\text{Vol.} ABC = \text{Vol.} ABD - \text{Vol.} BDC = \frac{1}{3}\pi(r^2 - OD^2)(x - OD)$$
$$- \frac{1}{3}\pi(r - OD)^2(2r + OD) = \frac{1}{3}\pi(r - OD)(rx - r^2)$$
$$= \frac{1}{3}\pi r\left(r - \frac{r^2}{x}\right)AC = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{x}AC^2 = \frac{1}{3}\pi OD \cdot AC^2.$$

Ähnlich ist der Beweis für Vol. ABC'.

Journ. élém.

331. Die Höhe h eines abgestumpften geraden Kegels sei mittlere Proportionale zwischen den Durchmessern $2r$ und 2ϱ seiner Grundflächen. 1) Zu beweisen, dafs sich in den Kegel eine Kugel beschreiben läfst. 2) r und ϱ zu berechnen aus h und der Gesamtoberfläche πa^2 des abgestumpften Kegels.

1) Beweis. Die Seite des abgestumpften Kegels sei s; dann ist $h^2 = 4r\varrho$; ferner $s^2 = (r - \varrho)^2 + h^2 = (r + \varrho)^2$, also $s = r + \varrho$.

2) Auflösung. $\pi s(r + \varrho) + \pi(r^2 + \varrho^2) = \pi a^2$ oder $(r + \varrho)^2 + r^2 + \varrho^2 = a^2$; mithin $2(r + \varrho)^2 = a^2 + 2r\varrho = a^2 + \frac{h^2}{2}$, also $r + \varrho = \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2}$ und $r\varrho = \frac{h^2}{4}$; daher sind r und ϱ die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2}x + \frac{h^2}{4} = 0$. Damit die Wurzeln reell sind, mufs $\frac{2a^2 + h^2}{4} - h^2 \geqq 0$ sein, also $a^2 \geqq \frac{3h^2}{2}$. Ist $a^2 = \frac{3h^2}{2}$, so ist die Gesamtoberfläche ein Minimum; der Kegel

wird Cylinder. — Das Volumen des Kegels ist $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + r\varrho + \varrho^2)$ $= \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{6} h \cdot \pi a^2$. Nouv. Ann.

332. Ein durch eine Grundkante BC eines regulären Tetraeders $OABC$ gelegter ebener Schnitt schneidet zunächst der Grundfläche ein neues Tetraeder ab, dessen Volumen ein Drittel des ganzen beträgt. Wie grofs ist der Winkel, welchen der Schnitt mit der Grundfläche bildet?

Auflösung. Die Kante des Tetraeders sei 1; die durch BC gelegte Ebene schneide OA in E; ferner sei $AD \perp BC$, und die von O und E auf ABC gefällten Senkrechten seien OG und EF; dann ist $OG = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $EF = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $FD = \frac{7}{18}\sqrt{3}$; mithin tg EDA $= \frac{2\sqrt{2}}{7}$; also $\sphericalangle EDA = 22^0 0' 5''$. Tidsskrift.

333. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC, sein Mittelpunkt sei O und r der Radius des Umkreises; AO, BO, CO werden um dieselbe Strecke $x = OA' = OB' = OC'$ verlängert. V sei das Volumen des Tetraeders, dessen Grundfläche das gleichseitige Dreieck $A'B'C'$ ist und dessen Seitenflächen die gleichschenkligen Dreiecke $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ sind. Gesucht werden die Werte von x, für welche $V = \frac{3}{8} x^3$ ist.

Auflösung. † S sei die Spitze des Tetraeders und es sei $CD \perp A'B'$. Dann ist $A'B' = x\sqrt{3}$; $OD = \frac{x}{2}$; $SO^2 = CD^2 - OD^2 = \left(r + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r(r+x)$. Folglich $V = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ $\sqrt{r(r+x)} = \frac{3}{8}x^3$; mithin $x^2 - \frac{4}{3}rx - \frac{4}{3}r^2 = 0$, $x_1 = 2r$; $x_2 = -\frac{2}{3}r$. Journ. élém.

334. Eine gegebene Gerade $AB = a$ durch den Punkt X so in zwei Teile $AX = x$ und $BX = a - x$ zu teilen, dafs, wenn man über AX ein gleichseitiges Dreieck AXC und über BX ein Quadrat $XBDE$ konstruiert und die Figur um AB rotieren läfst, die Summe der erzeugten Flächen ein Minimum ist.

Auflösung. † Ist $CF \perp AB$, so ist Obfl. $ACX = 2\pi CF \cdot AC$ $= \pi x^2\sqrt{3}$; ferner Obfl. $XBDE = 2\pi EX \cdot ED + 2\pi EX^2$ $= 4\pi(a-x)^2$. Also Min. $= \pi x^2\sqrt{3} + 4\pi(a-x)^2$. Für den Fall des Minimums ist dann $x = \frac{4a(4-\sqrt{3})}{13}$. Mathesis.

335. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seite a; der in dasselbe beschriebene Kreis O berührt CD in E, AB in F und trifft AE in M. Es ist das Volumen der beiden Körper zu berechnen, welche durch Rotation des Vierecks $AFOM$ 1) um EF und 2) um AF entstehen; 3) ist die Lage des Schwerpunktes von $AFOM$ zu bestimmen.

Auflösung. 1) Es sei $MH \perp EF$ und $ML \perp AB$. Wird EH mit x bezeichnet, so ist $MH = \frac{1}{2}x$. Nun ist $MH^2 = FH \cdot EH$ und hieraus $x = \frac{4}{5}a$; $FH = \frac{1}{5}a$; $EM = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Nun ist Vol. $AFOM$ $= \frac{1}{3}\pi OH \cdot MH^2 + \frac{1}{3}\pi HF(AF^2 + AF \cdot MH + MH^2) = \frac{1}{3}\pi$ $\left(x - \frac{a}{2}\right)\frac{x^2}{4} + \frac{1}{3}\pi\frac{a}{5}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\cdot\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) = \frac{17}{300}\pi a^3$. 2) Vol. $MAFO$ $= \frac{1}{3}\pi AL \cdot ML^2 + \frac{1}{3}\pi LF(OF^2 + OF \cdot ML + ML^2) = \frac{1}{3}\pi$ $\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)\frac{a^2}{25} + \frac{1}{3}\pi\frac{x}{2}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{5} + \frac{a^2}{25}\right) = \frac{4}{75}\pi a^3$. 3) Fläche $OMAF$ $= \frac{1}{2}MH \cdot OH + \frac{1}{2}HF(AF + MH) = \frac{x}{4}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{10}\left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2}\right)$ $= \frac{3}{20}a^2$. Hat der Schwerpunkt von EF die Entfernung y, so ist $2\pi y \cdot \frac{3}{20}a^2 = \frac{17}{300}\pi a^3$, also $y = \frac{17}{90}a$. Hat ferner der Schwerpunkt von AB die Entfernung z, so ist $2\pi z \cdot \frac{3}{20}a^2 = \frac{4}{75}\pi a^3$; also $z = \frac{16}{90}a$.

Mathesis.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Auflösungen sind eingegangen von: Bermann 671. 674. 675. Beyens 661—664. 666. 667. Drees 669. 671. 673. Fuhrmann 655. 658. 661—672. 674. 675. 677. 678. Gauger 702. Lucke 649. 650. v. Miorini 669. 673. Niseteo 663. 669. Rulf 664. Sauter 652. Simon 669 nebst Nachtrag. Stammer 649. 651—653. Stegemann 671. 673—675. 677. 678. Stoll 669—671. 674. 675.

Neue Aufgaben: Beyens (1). Fuhrmann (1). v. Miorini (2). Rulf (6). Schumacher (3). Schurig (1). Stegemann (2). Stoll (1).

Litterarische Berichte.

A) Rezensionen.

HOFFMANN, Dr. GUSTAV (Professor am königlichen Gymnasium in Dresden-Neustadt), Anleitung zum Lösen planimetrischer Aufgaben mit Übungsbeispielen für Schüler höherer Lehranstalten, insbesondere der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. Mit 44 Figuren im Text. Zweite verbesserte Auflage, Leipzig 1887, Fues's Verlag (R. Reisland). Preis *M* 1,70.

Vom königlich sächsischen Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts zur Einführung empfohlen.

Ein Zeitraum von kaum zwei Jahren trennt die zweite Auflage von der ersten,*) ein erfreuliches Zeichen für die Teilnahme, die man der planimetrischen Konstruktionsaufgabe entgegenbringt. Die zweite Auflage ist um 40 Seiten stärker als die erste, denn der Verfasser hat sein Buch einer gründlichen Umarbeitung unterzogen. Diese besteht im wesentlichen darin, daſs er den Methoden der Verschiebung und Drehung eine eingehende Darstellung hat zuteil werden lassen. Dadurch hat er den Weg betreten, der allein zu einer natürlichen Behandlung der Konstruktionsaufgabe führen kann, und Referent muſs deshalb von seinem Standpunkte aus die Sammlung von G. Hoffmann für die beste unter den deutschen Sammlungen ähnlicher Art erklären.

Die Zahl der vom Verfasser angenommenen Veränderungen und Verbesserungen ist so groſs, daſs es zu weit führen würde, sie alle aufzuzählen. Es mag genügen anzuführen, daſs Anordnung und Darstellung im einzelnen und im ganzen dadurch sehr gewonnen haben, und daſs der Verfasser ein wertvolles und in hohem Maſse brauchbares Schulbuch geliefert hat. Manches geht freilich über die Bedürfnisse des Gymnasiums hinaus, auch kann man zweifelhaft sein, ob die letzten Paragraphen des Buches, die teils eine Erweiterung, teils eine Zusammenfassung der Methoden enthalten, für die Schule nicht zu speziell oder zu fachwissenschaftlich sind. Aber gerade deswegen möchte Referent Veranlassung nehmen, das Buch auch Studierenden der Mathematik zu empfehlen. Auf der Universität

*) Man vergl. ds. Zeitschr. Bd. XVI, S. 361.

wird seit Diesterwegs Tode für die Pflege der Konstruktionsaufgabe nichts mehr gethan. Der Studierende der Mathematik, der sich dem Lehrerberufe widmen will, ist also in dieser Beziehung auf sich selbst angewiesen und in der Regel wird er während seiner Studienzeit an die Konstruktionsaufgabe garnicht denken, namentlich deshalb nicht, weil ihm die Möglichkeit einer wissenschaftlichen Behandlung derselben nicht in den Sinn kommen konnte. Eine solche Behandlung wird aber durch das Buch von G. Hoffmann angebahnt, und wenn es einerseits aus Petersens Methoden und Theorieen hervorgewachsen ist, so kann es andererseits als gründliche Vorbereitung auf dieselben dienen; und somit sei es der Beachtung aller Fachgenossen aufs angelegentlichste empfohlen. Über die Ausstattung des Buches läfst sich nur Lobendes sagen.

Kiel. R. von Fischer-Benzon.

Thieme, Dr. H. (ordentl. Lehrer am Realgymnasium zu Posen), Sammlungen von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschlufs an hinterlassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretzschmar bearbeitet. Leipzig 1885, B. G. Teubner. Preis kartonniert ℳ 1,20.

Bei Besprechung der von Franz Lucke herausgegebenen genetischen Stereometrie von Heinze sagt Dr. Holzmüller:*) „Das stereometrische Berechnen sollte im Verhältnis zur gesamten Stereometrie keinen gröfseren Raum einnehmen, als ihn die berechnende Planimetrie beansprucht". Zugleich weist er auf die Wichtigkeit des Projektionszeichnens für die Stereometrie hin. — In dem Aufsatz über die Systematik in der Stereometrie mit Beziehung auf Heinzes „Genetische Stereometrie" spricht G.-R. Prof. Dr. Hauck**) sich in gleichem Sinne aus und bemerkt, dafs es nicht gerade erforderlich sei, dafs die Stereometrie *darstellend-geometrisch* behandelt werde; die Behandlung müsse aber von Mongeschem Geiste durchweht sein. Diese Bemerkungen veranlassen den Referenten auf das überschriftlich genannte Buch hinzuweisen, das ganz dazu angethan ist, die Stereometrie in die Bahnen zu lenken, die von den beiden oben genannten Herren als die richtigen bezeichnet sind.***)

Die Sammlung von Thieme enthält Lehrsätze und Aufgaben, die beide den Zweck verfolgen, den Schüler im Konstruieren räumlicher Gebilde zu üben. Bei solchem Konstruieren kommt der Unterschied, der zwischen Analysis und Konstruktion bestehen soll, mit grofser Klarheit zum Ausdruck. Denn die Figur, an der die Ana-

---

*) Diese Zeitschr. XVII, S. 605.
**) Diese Zeitschr. XVIII, S. 83.
***) Als ein in diesem Sinne gearbeitetes Lehrbuch würden die Elemente der Stereometrie von Hubert Müller (Metz 1883, G. Scriba) hervorzuheben sein.

lysis vorgenommen wird, ist (mehr oder weniger richtig) perspektivisch zu zeichnen; dann werden die Ebenen, die sich schneiden, um ihre Durchschnittsgeraden umgewendet, bis alle in derselben Ebene liegen, und in dieser letzten Ebene wird die Konstruktion ausgeführt. Derartige Konstruktionen haben freilich ihre Schwierigkeiten, aber nur im ersten Anfang; der Schüler kann seiner Anschauung dadurch sehr zu Hülfe kommen, dafs er die gezeichnete Figur ausschneidet und zusammenfaltet; seine Einsicht in räumliche Lagenverhältnisse pflegt aber sehr bald so zu wachsen, dafs er dieses Hülfsmittels nicht mehr bedarf.

Besonders lehrreich sind die Aufgaben über die dreiseitige Ecke und das Tetraeder, einmal durch die Analogien zwischen diesen Gebilden und dem ebenen Dreieck, und zweitens durch die Analogien zwischen Umdrehungskegel und Kreis. Die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie werden in § 10 gegeben, stereographische Projektion in § 12; der Schlufsparagraph 14 bezieht sich auf die Kegelschnitte. Diese Anordnung ist nur zu loben. Nicht jeder Lehrer der Mathematik hat während seiner Studienzeit Gelegenheit nehmen können, sich mit darstellender Geometrie zu beschäftigen, so wichtig und notwendig dies auch sein mag. Jeder aber, der eine leidlich geübte Anschauung besitzt, wird die Aufgaben der 9 ersten Paragraphen mit seinen Schülern durchnehmen können. Wer mit Aufgaben dieser Art vertraut ist, dem bieten die verschiedenen Arten des Projektionszeichnens auch keine sonderlichen Schwierigkeiten mehr.

Das kleine, hübsch ausgestattete Buch von Dr. Thieme scheint im Deutschen Reich bis dahin wenig beachtet worden zu sein. Mögen diese Zeilen dazu beitragen, dafs es die verdiente Würdigung findet.

Kiel. R. von Fischer-Benzon.

Diekmann, Dr. Josef (Rektor des Realgymnasiums zu Viersen), Übungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie. Auf Grund rein konstruktiver Methoden in stufenmäfsiger Reihenfolge zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und verwandten Anstalten zusammengestellt. Erster Teil, Vorübungen zur Euklidischen Geometrie (Pensum für Quinta, bezw. das 1. Tertial der Quarta). Preis ℳ 0,75. Zweiter Teil, Vorübungen zur synthetischen Geometrie. Preis ℳ 0,50. Breslau 1886, Ferdinand Hirt, Königliche Universitäts- und Verlagsbuchhandlung.

Die beiden kleinen Hefte schliefsen sich ihrem Inhalt nach, wie schon ihr Titel angiebt, nicht an einander an, sondern sie lassen eine breite Lücke zwischen sich, die durch eine gröfsere Aufgabensammlung, wie die von G. Hoffmann, oder durch ein Lehrbuch der Planimetrie auszufüllen ist. Das erste Heft enthält im ersten

Abschnitt Übungen über die Gerade, den Winkel und den Kreis nebst einigen Anwendungen auf ornamentale Formen; im zweiten Abschnitt werden geschlossene geradlinige Figuren behandelt; im dritten wird auf die Lagenveränderung der Figuren durch Parallelverschiebung, centrische und axiale Drehung eingegangen, und im vierten Abschnitt kommen zusammengesetzte Lagenveränderungen geschlossener Figuren (geometrische Quadratur und Kreiszeichnungen) zur Darstellung. Auf jeder Seite treten dem Leser die Sorgfalt und Sachkenntnis des Verfassers entgegen, und der Schüler, der nach diesem Hefte arbeitet, lernt recht viel Geometrie, ohne dafs er nötig hätte viele Lehrsätze zu lernen. Die Art und Weise, wie der Begriff der Kongruenz und die Auffassung des Winkels als Drehungsgröfse vorbereitet wird, ist musterhaft zu nennen. Bemerkenswert ist ferner die Anwendung der Drehung auf die Theorie der Parallelen, und die Benutzung derselben, um die Beziehung zwischen Peripherie- und Centriwinkel, die auf demselben Bogen stehen, abzuleiten. Wissenschaftlich steht dies Verfahren hinter dem üblichen nicht nur nicht zurück, sondern es hat vor diesem noch den Vorteil gröfserer Anschaulichkeit voraus. Aber gerade wegen der Aufnahme dieses Verfahrens kann es zweifelhaft sein, ob das Heft noch als Vorübungen zur Euklidischen Geometrie zu bezeichnen ist. Euklidische Geometrie im strengen Sinne des Wortes*) wird auf deutschen Schulen schon lange nicht mehr getrieben, gehört auch gar nicht dahin, sondern auf die Universität. Denn reine Wissenschaft, namentlich so abstrakte Wissenschaft wie die in den Elementen Euklids enthaltene, gehört nicht in eine Anstalt, die auf wissenschaftliche Studien vorbereiten soll. Die Schulgeometrie ist im Begriff sich der Geometrie der Lage mehr zuzuwenden und das auszustofsen, was sie unrechtmäfsig oder unzweckmäfsig aus Euklids Elementen entnommen hat. Solche reformatorische Bestrebungen energisch zu unterststützen ist das erste Heft sehr wohl geeignet und deshalb sei es für den vorbereitenden Unterricht in der Planimetrie aufs wärmste empfohlen; nur möchte Referent noch vorschlagen, das Heft, statt in Quinta und dem ersten Vierteljahre der Quarta, in Quarta und Untertertia zu benutzen. — Das zweite Heft enthält auf wenig Seiten eine zweckmäfsige und anregende Einführung in die Methoden der synthetischen Geometrie.

Die Ausstattung der beiden Hefte verdient Anerkennung.

Kiel. R. von Fischer-Benzon.

---

*) Man vergl. die inhaltsreiche kleine Schrift von Hubert Müller: Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Metz 1887, G. Scriba.

DAMMER, O., Chemisches Handwörterbuch zum Gebrauche für Chemiker, Techniker, Ärzte, Pharmaceuten, Landwirte, Lehrer und Freunde der Naturwissenschaft. 2. Auflage. Stuttgart, W. Spemann. 1886. 1.—4. Lieferung.*)

Mein abgegriffenes Exemplar der ersten Auflage mag als ein Beweis gelten, wie oft ein Lehrer in die Lage kommt, in diesem Handwörterbuch irgend etwas nachzuschlagen. Leider war aber diese erste Auflage, welche 1876 erschienen ist, schon in vielen Beziehungen veraltet und es ist deshalb doppelt zu begrüfsen, dafs O. Dammer sich zu einer Neuauflage entschlossen hat. Der Autor, Lexikograph wie selten einer, hat aber auch die Gabe, das Notwendigste in gedrängter Kürze zusammenzufassen; sein Name wird gewifs manchem Leser aus diesem oder jenem Konversationslexikon als Mitarbeiter bekannt sein. Ferner sind von ihm lexikographisch behandelt: „Chemische Technologie" und sein bedeutendstes Werk: das vor Jahresfrist erschienene „illustrierte Lexikon der Verfälschungen", bei welchem Dammer durch geschickte Auswahl von Mitarbeitern verstanden hat, ein Werk zu schaffen, das dem „öffentlichen Chemiker" geradezu unentbehrlich geworden ist.

Eine eingehende Besprechung der bis jetzt erschienenen fünf Hefte dürfte noch nicht angezeigt sein; dagegen möchte ich die Gelegenheit nochmals dazu benützen, allen Kollegen das Handwörterbuch zur Anschaffung für Schulbibliotheken bestens zu empfehlen; denn diese Ausgabe kann sich selbst die kleinste Schule gestatten, während das Fehlingsche Handwörterbuch durch seinen Umfang und seinen dadurch bedingten wesentlich höheren Preis einem kleineren Etat schon zu viel Opfer zumutet. Aufserdem wird hoffentlich das Dammersche Lexikon baldigst vollendet sein, so dafs ein weiterer Nachteil, der mit der Anschaffung der gröfseren Werke verbunden ist, in Wegfall kommt.

Memmingen. VOGEL.

KRUSE, Dr. FRIEDRICH, Professor am königl. Wilhelms-Gymn. zu Berlin, Botanisches Taschenbuch, enthaltend die in Deutschland, Deutsch-Österreich und der Schweiz wild wachsenden und im Freien kultivierten Gefäfspflanzen nach dem natürlichen System einheitlich geordnet und auf Grund derselben zum Bestimmen eingerichtet. Berlin. Hermann Paetel 1887. Preis 4 *M*, gebunden 5 *M*.

Während die meisten Floren die Pflanzenarten wohl nach dem natürlichen System ordnen, zur Bestimmung der Familien und Gattungen aber besondere Tabellen mit neuen Anordnungen aufstellen,

*) Erste Auflage besprochen ds. Z. IX, 50 (1878) u. X, 451 u. f. von Janeček (Wien).

besteht das Eigentümliche dieser neuen Flora von Deutschland gerade darin, dafs sie eine einheitliche und übersichtliche Systematik, eine natürliche Gruppierung der anerkannten Pflanzenfamilien herzustellen versucht, mittelst welcher auch der Anfänger die Pflanzen bestimmen kann und bei welcher nicht, wie dies häufig in den Bestimmungstabellen anderer Floren der Fall ist, eine Übersicht des bei der Untersuchung zurückgelegten Weges unmöglich ist. Es ist dieser Versuch des Verfassers, den herkömmlichen Wirrwarr zu beseitigen und zu zeigen, dafs wirklich das natürliche System dasselbe beim Bestimmen zu leisten vermag wie ein künstliches, durchaus anzuerkennen und er ist auch leidlich gelungen. Ganz ohne Unzuträglichkeiten ist es indessen doch nicht dabei abgegangen, wie z. B. die ganz unnatürliche Zuordnung der Gymnospermen (Coniferen) zu den Dikotyledonen (3. Unterklasse Diklinen 20. Ordn. Julifloren, 21. Ordn. Coniferen) beweist.

Auch in einem zweiten Punkte weicht das Krusesche Taschenbuch von anderen Floren ab, indem es auch die im Freien gedeihenden Kulturpflanzen der Felder, Gärten und Parkanlagen, für welche man sonst oft vergeblich nach einem Bestimmungsmittel sich umsieht, in möglichster Vollständigkeit aufgenommen hat und bestimmen lehrt. Bei der Abgrenzung der einheimischen Arten wäre eine Berücksichtigung der vorzüglichen monographischen Bearbeitungen einzelner schwierigen Gattungen (*Rubus, Rosa, Potentilla, Hicracium, Carex* etc.) erwünscht gewesen. Von den 125 Arten der Gattung *Potentilla*, welche Alb. Zimmeter neuerdings für dasselbe Gebiet unterscheidet, bleiben z. B. bei gehöriger Reduktion doch einige Arten mehr als Verf. aufführt. Die zu weit gehende Verschmelzung z. B. der Gattungen *Comarum* und *Sibbaldia* mit *Potentilla* werden nur Wenige willkommen heifsen (die *Potentilla procumbens* Sibth. erhält dabei den späteren Namen Nestlers *P. nemoralis*, weil die *Sibbaldia* nach dem Verf. *Pot. procumbens* heifsen soll). Wenn wir als weiteren Fortschritt die Berücksichtigung morphologischer Verhältnisse bezeichnen müssen, welche eine biologische Bedeutung haben, so müssen wir es gleichzeitig tadeln, dafs dies ohne Erwähnung der letzteren und nicht in den biologischen terminis geschehen ist. Verf. erwähnt bei *Primula, Pulmonaria, Lythrum* (dagegen nicht bei *Hottonia, Menyanthes* u. a.) die verschiedenen Griffelsätze auf getrennten Stöcken, aber mit grofser Umständlichkeit. Anstatt vorne unter den „Erklärungen einiger Begriffe“ kurz die Begriffe heterostyldimorph und -trimorph, proterandrisch, proterogynisch etc. aufzuführen und, wie er das sonst thut, dafür Abkürzungen und Zeichen zu setzen, sagt er im einzelnen Falle z. B. (S. 129) bei Primula für 2-heterostyl: „Bltn 2 gestaltig; auf manchen Pfln sind die Staubbr dem erweiterten Blnschlunde eingefügt und überragen den Gf, auf anderen überragt der Gf die unterwärts in der Blnröhre haftenden Staubbr weit.“ Ein Biologe möchte aus der Haut fahren, wenn er das liest und

doch mufs man noch froh sein, dafs den biologischen Entdeckungen überhaupt in die trockene Floristik, die förmlich jede Belebung zu scheuen scheint, endlich Eingang gestattet wird. „Vom Honigsaft des *Apocynum* werden Insekten angelockt und sterben." Abgesehen von dem etwas mifsratenen Satz klingt das sonderbar. Verfasser vermischt hier den Bestäubungsapparat der Pflanze, welcher durch seinen Honig etc. Bienen, Wespen und gewisse Fliegen (*Eristalis tenax, E. arbustorum, E. nigritarsis, Microdon apiformis, Platycheirus peltatus* etc.) anlockt, die ungeschädigt von Blüte zu Blüte fliegen und die Bestäubung vollziehen und den Schutzapparat, welcher den hierbei so nöthigen Honig gegen unberufene Gäste (*Spilogaster carbonella, Scotophaga merdaria, Anthomyia pluvialis* u. a. kleine Fliegen, Hymenopteren und Lepidopteren) schützt. Nur für letztere ist die „Klemmfalle" da und nur letztere müssen sich oft in der Falle zu Tode zappeln.

Doch wollen wir durch Ausstellungen dieser und ähnlicher Art den Wert des Buches nicht weiter schmälern, es hat thatsächlich so viele Vorzüge, dafs wir nur wünschen können, es möchte recht vielen Pflanzenfreunden, kleinen und grofsen, zum Führer dienen auf ihren Wanderungen in Wald, Wiese, Feld und Garten.

Greiz. LUDWIG.

ROTHE, Prof. Dr. CARL. Vollständiges Verzeichnis der Schmetterlinge Österreich-Ungarns, Deutschlands und der Schweiz. Nebst Angabe der Flugzeit, der Nährpflanzen und der Entwicklungszeit der Raupen. Wien 1886. A. Pichlers Witwe & Sohn. Preis 0,80 *M.*

Ein vollständiges Verzeichnis der Schmetterlinge, wie es der Verfasser giebt, wird nicht nur für den Schmetterlingssammler von Wert sein, sondern auch beim Ordnen einer Naturaliensammlung einen willkommenen Ersatz für teuere und weniger übersichtliche Spezialwerke abgeben. Für die Anlage von Schmetterlingssammlungen sollen diesem Verzeichnis noch gedruckte Etiketten mit den einzelnen Artennamen folgen. Die Anordnung wurde nach dem Katalog der Lepidopteren Europas von Dr. O. Staudinger und Dr. M. Wocke getroffen.

Greiz. LUDWIG.

B) Programmschau.

Vacat.

C) Bibliographie.

Januar. Februar. März. April.

Nohl, Schuldir., Pädagogik für höhere Lehranstalten. 2. Tl. Methodik der einzelnen Unterrichtsgegenstände. Gera, Hofmann. 2,40.
Normallehrplan für die höheren Mädchenschulen in Preufsen. (14 S.) Lpz., Siegismund u. Volkening. 0,30.
Schiller, Prof. Dr., Handbuch der praktischen Pädagogik für höhere Lehranstalten. (604 S.) Lpz., Fues. 10.
Centralstelle der Vereinigungen für Sommerpflegen. Vereine, Badeeinrichtungen etc. etc. (47 S.) Berlin, Puttkammer u. Mühlbrecht. 1,40.
Bericht über die Ergebnisse der Sommerpflege im J. 1885. (102 S.) Ebda. 2,80.
Hagen, Prof. Dr., Fr. Fröbel im Kampf um den Kindergarten. (148 S.) Wien, Pichler. 2,50.
Jacusiel, Dr, die deutsche Schule der Zukunft. Gedanken u. Vorschläge zu einer gründl. Umgestaltung unsres Schulwesens. (56 S.) Berlin, Stuhr. 1,20.
Keferstein, H., Schleiermacher als Pädagog. (340 S.) Jena, Mauke. 3.
Mädchenschulen, die höheren, u. deren künftige Gestaltung. Wünsche u. Vorschläge. (20 S.) Hannover, Meyer. 0,40.
Geyer, Realgymn.-L., über das Wesen und die pädagog. Behandlung der Lüge. (31 S.) Lpz., Fues. 0,50.
Rappold, Prof., Unsere Gymnasialreform. Kritische Bemerkungen etc. (80 S.) Wien, Pichler. 1,20.
W., Ernst, Die Aristokratie des Geistes u. das moderne Schulmeistertum. (23 S.) Stuttgart, Brettinger. 0,60.
Flach, Prof. Dr. v., Die Einheitsschule der Zukunft. (40. S.) Lpz., Schloemp. 1.
Henke, Gymn.-Dir., Die Vorschulen der höheren Lehranstalten. Ein Gutachten. (47 S.) Barmen, Klein. 0,60.
Tewes, Prof. Dr., Schule, Universität, Akademie. (37 S.) Graz, Leuschner. 1.
Jahn, Dr., Ethik als Grundwissenschaft der Pädagogik. Ein Lehrbuch f. Sem. u. Lehrer. (183 S.) Lpz., Dürr. 2,25.
Kaiser, Dir., Welchen Anforderungen mufs ein Normallehrplan für die höheren Töchterschulen in Preufsen u. anderen deutschen Staaten entsprechen? (42 S.) Jena, Bufleb. 1.
Pflüger, Prof. Dr., Kurzsichtigkeit und Erziehung. (39 S.) Wiesbaden, Bergmann. 1.
Hirschfeld, v., Gymnasialunterricht und Fachbildung. (42 S.) Lpz., Grunow. 1,50.
Bartholomäus, Rektor, Die Mittelschule in ihrem Verhältnis zur Volksschule u. zu den höheren Lehranstalten. (96 S.) Gotha, Behrend. 1.
Dietrich, An die deutschen Universitäten. Protest gegen die moderne Wissenschaft. (24 S.) Hamburg, König. 1.
Klinghardt, Das höhere Schulwesen Schwedens u. dessen Reform im modernen Sinne. (168 S.) Lpz., Klinkhardt. 2.
Mahrenholtz, Gymnasium, Realschule, Einheitsschule. (12 S.) Oppeln, Franck. 0,40.
Ordnung der Prüfung f. das Lehramt an höheren Schulen vom 5. Febr. 1887. (37. S.) Berlin, Hertz. 0,60.
Rümelin, Kanzler, Die Berechtigung der Fremdwörter. 2. Aufl. (88 S.) Freiburg, Mohr. 1,60.
Kratz, Oberl. Dr., Die Lehrpläne u. Prüfungsordnungen f. d. höh. Schulen in Preufsen etc. (190 S.) Neuwied. Heuser. 1,60.

Schenckendorff v., Die pädagog. u. sociale Bedeutung erziehlicher Knabenhandarbeit u. ihre prakt. Durchführung. Kassel, Wigand. (20 S.) 0,30.

Burgerstein, Dr., Die Gesundheitspflege in der Mittelschule. (140 S.) Wien, Hölder. 2.

Jacobi, Gesamtrepetitorium über alle Prüfungsfächer der allg. Bildung. Für Kandidaten des höheren Schulamtes. Lpz., Violet. 4 Bdchen. 3,20.

Ostermann, Dr., Die hauptsächlichsten Irrtümer der Herbartschen Psychologie u. ihrer pädag. Consequenzen. (246 S.) Oldenburg, Schulze. 4.

Mathematik.

A. Reine Mathematik.

1. Geometrie.

Ofenheim, Dr., Die sphärische Trigonometrie u. analytische Geometrie. (112 S.) Wien, Seidel 3.

Müller, Prof. Oberl. Dr., Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Eine Betrachtung. (16 S.) Metz, Scriba. 0,30.

Cranz, Privatdoc. Dr., Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung v. Kurven mit Flächen II. O. (90 S.) Stuttg., Metzler. 3.

Graefe, Prof. Dr., Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises u. der Kegelschnitte. Auflösungen u. Beweise. (258 S.) Lpz., Teubner 4,80. (Hauptwerk u. Aufl. 7,20.)

Kaiser, Dr., Einführung in die neuere analytische u. synthetische Geometrie. (190 S.) Wiesbaden, Bergmann. 6,70.

Küpper, Prof., Über geometrische Netze. (25 S.) Prag, Calve. 0,66.

Steiner, Sammlung von Maturitätsfragen aus der darstellenden Geometrie. Nach d. offic. Jahresber. d. öffentl. Realschulen Österreichs zus.-gestellt. (115 S.) Wien, Hölder. 2.

Kajetan, Prof., Der Vorbereitungsunterricht für das perspektivische Zeichnen. (60 S.) Wien, Graeser. 1,60.

Gallien, Dir., Lehrbuch der Mathematik f. höhere Schulen. 3. Tl. Stereometrie u. Trig. (73 S.) Berlin, Weidmann. 1.

Rattke, Übungsaufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie. (23 S.) Hannover, Helwing. 0,25.

Sickenberger, Geometrie. 1. Tl. Planimetrie. (Autogr.). (54 S.) München, Ackermann. 1,25.

Frankenbach, Dr., Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. 3. Tl. Die ebene Trigonometrie. (44 S.) Liegnitz, Krumbhaar. 0,60.

Köpp, Geometrische Körpernetze zum Anfertigen von Körpermodellen f. d. Unterr. in der Geometrie. Bensheim, Ehrhard. 0,40.

2. Arithmetik.

Stolz, Prof. Dr., Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearb. 2. Tl.: Arithmetik der complexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen. (326 S.) Lpz., Teubner. 8.

Otto, Behandlung der Dezimalbruchrechnung in der Volksschule. (60 S.). Lpz., Siegismund. 1,20.

Bruns, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. (49 S.) Lpz., Hirzel. 0,60.

Bopp, Prof., Grofse Wandtafel des metrischen Systems. (16 S. Text). Stuttg. Maier. 3.

Otto, Die Behandlung der Decimalbruchrechnung in der Volksschule. (60 S.) Lpz., Siegismund. 1,20.

John, Prof., Über die Einführung der allgemeinen Zahlzeichen in die Mathematik. Eine histor. Studie. (32 S.) Wien, Pichler. 0,70.
Meier, Dir., Lehrplan für den Unterricht im Rechnen. Frankenberg i/S. Rofsberg. (85 S.) 1.
Schrader, Dr., Beiträge zur Theorie der Determinanten. (155 S.) Halle, Schmidt. 3,60.
Enholtz, Lehrbuch der elementaren Mathematik zum Schul- und Selbstunterr. f. Lehrer etc. 1. Tl. Reine Arithm. Aarau, Sauerländer. In Lfg. à 1.
Geigenmüller, Elemente der höh. Mathematik zugleich als Sammlung v. Beisp. u. Aufg. aus der algebr. Analysis etc. (80 S.) Mitweida. Polyt. Buchh. 2.
Biermann, Doc. Dr., Theorie der analytischen Funktionen. (452 S.) Lpz., Teubner. 12,80.
Wertheim, Elemente der Zahlentheorie. (381 S.) Lpz., Teubner. 8,40.

B. Angewandte Mathematik.

(Astronomie. Geodäsie. Mechanik.)

Dreger, Darstellung der verschiedenen Theorien der Sonnenflecken. (26 S.) Berlin, Friedländer. 0,60.
Skibinski, Doc. Ing., Der Integrator des Prof. Dr. Zmurko in seiner Wirkungsweise und praktischen Verwendung. (28 S.) Wien, Gerold. 3,20.
Ginzel, Über Veränderungen am Fixsternhimmel. (40 S.) Hamburg, Richter. 1.
Gross, Prof., Die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie. (94 S.) Stuttg., Wittwer. 2.
Baule, Prof. Dr., Repetitorium der niederen Geodäsie. (50. S.) Münden, Augustin. 1,20.
Loof, Gymn.-Dir., Die Himmelskunde in ihrer geschichtlichen Entwickelung und auf ihrem gegenwärtigen Standpunkte dargestellt. (132 S.) Langensalza. 2.
Herz, Min.-R. Prof. Dr., Lehrbuch der sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf geogr. Ortsbestimmung. (644 S.) Wien, Seidel. 16.

Mathematik und Naturwissenschaften.

Allgemeines.

Schellbach, K. H., Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. (34 S.) Berlin, Reimer. 0,80.
Lutz, Der Volksschullehrer als Naturaliensammler. Eine Anleitung zur Herstellung von Nat.-Sammlungen f. den Unterr. in Volks-, Mittel- etc. Schulen. (104 S.) Stuttg., Hänselmann. 1,20.
Hensen, Prof. Dr., Die Naturwissenschaft im Universitätsverband. Rede etc. (16 S.) Kiel, Univers.-Buchh. 1,00.
Günther, Prof. Dr., Simon l'Huilier. (9 S.) Tübingen, Fues. 0,20.
Schubert und Sudhoff, Paracelsus-Forschungen. 1. Heft. (89 S.) Frankfurt a. M., Koenitzer. 2,50.
Bauernfeind, v., Gedächtnisrede auf Josef v. Fraunhofer. (30 S.) München, Franz. 0,80.

Physik.

Baur, Dr., Die Entwickelung der Fernsprechkunst. (37 S.) Basel, Schwabe. 0,80.
Berndt, Dr., Der Föhn. Ein Beitrag zur orographischen Meteorologie und comparativen Klimatologie. Mit 10 Tafeln und Karten. (346 S.) Göttingen, Vandenhoek. 16.

Braun, Prof. Dr., Über Gesetz, Theorie und Hypothese in der Physik (23 S.) Tübingen, Fues. 0,80.
Uhlich, Dir., Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung. (150 S.) Dresden, Knecht. 3,50.
Jungclaus, Navig.-L., Magnetismus und Deviation der Kompasse in eisernen Schiffen für d. Unterr. in Nav.-Schulen. (195 S.) Bremerhafen, Tienken. 5.
Möller, Wetter-Berater. Anleitung zum Verständnis und zur Vorherbestimmung der Witterung. (80 S.) Hamburg, Friedrichsen. 1,20.
Klein, Gymn.-Prof. Dr., Leitfaden und Repetitorium der Physik mit Einschlufs der einfachen Lehren der Chemie und mathemat. Geographie. (12 S.) Leipzig, Teubner. 1,60.
—, Dr. H. J., Über den praktischen Wert der auf den synoptischen Karten beruhenden allgemeinen Wetterprognosen. (16 S.) Halle, Schmidt. 0,50.
Meutzner, Prof. Dr., Lehrbuch der Physik im Anschlufs an Prof. Weinholds physikalische Demonstrationen. Ein Leitfaden für den physikalischen Unterr. an höh. Lehranstalten. (286 S.) Leipzig, Fues. 2,40.
Rellstab, Prof. Dr., Leitfaden für den Unterricht in der Naturlehre an der kaiserl. Marineschule. (179 S.) Kiel, Univers.-Buchh. 3.
Brauer, Die Konstruktion der Wage nach wissenschaftl. Grundsätzen etc. (192 S.) Weimar, Voigt. 5.
Grosse, Dr., Die gebr. Polarisationsprismen mit bes. Berücks. ihrer Anwendung in Photometern. (72 S.) Clausthal, Gnosse. 1,60.

Chemie.

Mühlberg, Prof., Der Kreislauf der Stoffe auf der Erde. (26 S.) Basel, Schwabe. 0,80.
Huth, Dr., Das periodische Gesetz der Atomgewichte und das natürliche System der Elemente. (18 S.) Berlin, Friedländer und Sohn. 1.
Wiebecke, Dr., Geschichtliche Entwickelungen unserer Kenntnis der Ptomaïne und verwandter Körper. (22 S.) Ebda. 0,60.
Krüss, Dr., Untersuchungen über das Atomgewicht des Goldes. (112 S.) München, Rieger. 3.
Bauer, Prof., Chemie und Alchymie in Österreich bis zum beginnenden XIX. Jahrh. (85 S.) Wien, Lechner. 2.
Polis, Prof. Dr., Grundzüge der theoretischen Chemie. (145 S.) Aachen, Barth. 2,40.
Jansen, Dr., Methodischer Leitfaden der Chemie und Physik. Für höh. Töchterschulen, Seminarien etc. etc. (252 S.) Freiburg, Herder. 3.

Beschreibende Naturwissenschaften.

1. Zoologie.

Huth, Dr., Ameisen als Pflanzenschutz. (15 S.) Berlin, Friedländer. 0,50.
Wossidlo, Dir. Dr., Leitfaden der Zoologie für höhere Lehranstalten. (314 S.) Berlin, Weidmann. 3.
Dammer, Dr., Der Naturfreund. Anleitung zur naturwissenschaftlichen Beschäftigung im Hause und im Garten. 2. Jahrgang. (390 S.) Stuttgart, Spemann. 6,75.
Grotrian, Rektor, Praktische Anleitung zum Ausstopfen von Vögeln und Säugetieren. Mit 15 Textabb. (62 S.) Lpz., Siegismund & Volkening. 1.
Edlinger, Erklärung der Tiernamen aus allen Sprachgebieten. (117 S.) Landshut, Krüll. 2.
Katter, Dr. F., Lehrbuch der Zoologie. 1. Teil. Mit 244 Abb. (182 S.) Breslau, Hirt. 1,50.

Pilling, Gymn.-Prof. Dr., Zusammenstellende Repetitionsfragen für den naturgeschichtl. Unterricht. Altenburg, Wermann. In Heften à 0,40.
Marshall, Doc. Dr., Deutschlands Vogelwelt im Wechsel der Zeiten. (48 S.) Hamburg, Richter. 1.
Knauer, Dr., Handwörterbuch der Zoologie. (828 S.) Stuttg., Enke. 20,00.
Levy, Doc. Dr., Anleitung zur Darstellung organischer Präparate. Mit 40 Holzschn. (140 S.) Stuttg. Enke. 4,00.

2. Botanik.

Fraenkel, Assist. Dr., Grundriſs der Bakterienkunde. (368 S.) Berlin, Hirschwald. 8.
Potonié, Dr., Die Pflanzenwelt Norddeutschlands in den verschiedenen Zeitepochen, besonders seit der Eiszeit. (32 S.) Hamburg, Richter. 0,50.
Engler, Prof. Dir. und Prof. Prantl, Die natürlichen Pflanzenfamilien nebst ihren Gattungen und wichtigeren Arten. Lpz., Engelmann. In Lfgn. à 3.
Keller, Die Blüten alpiner Pflanzen, ihre Gröſse und Farbenintensität. (36 S.) Basel, Schwabe. 0,80.
Karsch, Prof. Dr., Vademecum botanicum, Handbuch zum Bestimmen der in Deutschland wildwachsenden, sowie im Feld und Garten, Park, Zimmer und Gewächshaus kultivierten Pflanzen. Leipzig, Lenz. In Lfgn. à 1,20.

3. Mineralogie.

Riemann, Dr., Taschenbuch für Mineralogen. (338 S.) Berlin, Springer. 7.
Blum, Prof. Dr., Taschenbuch der Edelsteinkunde. Lpz., Wilfferodt. 4,50.
Groth, Prof. Dr., Taschenbuch der Edelsteinkunde. Ein allgemeinverständlicher Leitfaden zur Bestimmung und Unterscheidung roher und geschliffener Edelsteine. (165 S.) Lpz., Engelmann. (165 S.) 5,00.
Bonn, Der Bernstein mit besonderer Berücksichtigung seiner Gewinnung in Ostpreuſsen. Berlin, Friedländer. 0,40.

Geographie.

Rohlfs, G., Quid novi ex Africa? (288 S.) Kassel, Fischer. 5.
Geistbeck, Dr., Der Weltverkehr. Telegraphie, Post, Eisenbahn u. Schiffahrt in ihrer Entwicklung dargestellt. Mit 123 Abbildungen u. 33 Karten. (495 S.) Freiburg, Herder. 8.
Engel, Dr., Aus dem Natur- und Volksleben des tropischen Amerika. (392 S.) Jena, Mauke. 4.
Vogel, Das britische Colonialreich. Geographisch, geschichtlich u. statistisch beschrieben. (144 S.) Berlin, Schneider & Co. 3,50.
Boettcher, Realgymn-Dir., Die Methode des geographischen Unterrichts. Aus „Verh. d. 11. Dir.-Vers. d. Prov. Preuſsen.“ (146 S.) Berlin, Weidmann. 2,40.
Bräunlich, Wandtafeln für den Unterr. in der math. Geographie. 9 Taf. (34 S. Text.) Weimar, Hemmleb. 7.
Dierke u. Gaebler, Schulatlas über alle Teile der Erde f. d. mittleren Unterrichtsstufen. 36 Haupt- u. 34 Nebenkarten. Braunschweig, Westermann. 3.
Schneegans, Sicilien. Bilder aus Natur, Geschichte u. Leben. (452 S.) Lpz., Brockhaus. 6.
Buchholz, Dr., Hilfsbücher zur Belebung des geographischen Unterrichts. VII. Charakterbilder aus Afrika mit Anh.: Deutschlands Kolonien in Afrika. (144 S.) Lpz., Hinrichs. 1,20.
Erkert, Der Kaukasus und seine Völker. Mit Textabb., Karten etc. (385 S.) Lpz., Frohberg. 12.

Horowitz, Marokko. Das Wesentlichste über Land u. Leute. (215 S.) Lpz., Friedrich. 4.
Lingg, Ing.-Hauptm. Erdprofil der Zone von 31° bis 65° n. Br. 1 : 1 000 000. München, Piloty. 20.
Steub, D., Zur Ethnologie der deutschen Alpen. (97 S.) Salzburg, Kerber, 1,60.
Leipoldt, Oberl. Dr., Die Leiden des Europäers im afrikanischen Tropenklima etc. (39 S.) Dresden, Zahn. 1,00.
Kirchhoff, Theod., Kalifornische Kulturbilder. (376 S.) Kassel, Fischer. 6.
Günther, Prof. Dr. S., Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen. (30 S.) München, Ackermann. 1.
Kappler, Surinam, sein Land, seine Natur, Bevölkerung und seine Kulturverhältnisse mit bezug auf Kolonisation. (384 S.) Stuttgart, Cotta. 5.
Woeikoff, Prof. Dr., Die Klimate der Erde. Nach dem Russ. vom Verfasser etc. Mit 10 Karten u. s. w. 2. Tl. (422 S.) Jena, Costenoble 12.
Hentschel, Prof. Dr. u. Dr. Märkel, Oberl., Umschau in Heimat u. Fremde. Ein geogr. Lesebuch zur Ergänzung der Lehrbücher der Geogr., insbes. derer von Seydlitz. 1. Bd. Deutschland. Mit vielen Abb. (295 S.) Breslau, Hirt. 2,50.
Paulus u. Stieler, Aus Schwaben. Schilderungen in Wort und Bild. (296 S.) Stuttgart, Bonz. 10.

Neue Auflagen.

1. Mathematik.

Martus, Prof. Dir., Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. 2. Tl.: Ergebnisse. 6. Aufl. (301 S.) Lpz., Koch. 4,80.
Müller, Prof. Oberl. Dr., Die Elemente der Planimetrie. Ein Beitrag zur Methode des geom. Unterrichts. 2. Aufl. (75 S.) Metz, Scriba. 1,20.
Ruland, Prakt. Anleitung zum gründl. Unterricht in der Algebra. Ausf. Aufl. der in Heis' Sammlung enth. Aufgaben. 2. Tl. Die Glchgn. u. Progress. Zum Selbstunterr. bestimmt. 6. Aufl. v. Schulinsp. Dr. Ruland. (592 S.) Bonn, Cohen. 7.
Lieber, Prof. Dr. u. Oberl. v. Lühmann, Leitfaden der Elementarmathematik. 1. Tl.: Planimetrie. 5. Aufl. (99 S.) Berlin, Simion. 1,50.
Gernerth, Fünfstellige gemeine Logarithmen, d. Zahlen und Winkelfunktionen v. 10 zu 10 Sekunden. 2. Aufl. (144 S.) Wien, Beck. 3,40.
Löwe, Oberl., Method. geordn. Aufg. zum kaufmänn. Rechnen. 3. Tl. 3. Aufl. (92 S.) Lpz., Klinkhardt. 0,80.
Focke u. Krass, Planimetrie, nebst einer Sammlung von Aufgaben und einer system. Anleitung zur Lösung derselben. 8. Aufl. Münster, Coppenrath. (131 S.) 1,80.
Féaux, Gymn.-Prof. Dr., Buchstabenrechnung und Algebra nebst Übungsaufgaben. 8. Aufl. v. Oberl. Luke. (363 S.) Paderborn, Schöningb. 2,40.
Prediger, Prof., Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. 2. Aufl. (358 S.) Clausthal, Brauns. 6.
Wittstein, Prof. Dir., 5 stell. log.-trig. Taf. 12. Aufl. Hannover, Hahn. 2.
Poinsot, Elemente der Statik. Nach der 12. Aufl. des franz. Orig. herausg. von Dr. Servus. (173 S.) Berlin, Springer. 6.
Geistbeck, Dr., Leitfaden der mathematisch-physik. Geographie f. Mittelschulen. 8. Aufl. Freiburg, Herder. 1,50.
Bardey, Dr., Quadratische Gleichungen mit den Lösungen f. die oberen Klassen etc. 2. Aufl. (94 S.) Lpz., Teubner. 2,00.

2. Naturwissenschaften.

Recknagel, Prof. Dr., Kompendium der Experimentalphysik. 2. Auflage. (365 S.) Kaiserslautern, Tascher. 15.

Sorauer, Dr., Handbuch der Pflanzenkrankheiten. 2. Aufl. 2. Tl. Die parasitären Krankheiten. (456 S.) Berlin, Parey. 14.
Casselmann, weil. Prof. Dr., Leitfaden für den wissenschaftlichen Unterricht in der Chemie. 5. Aufl. Bearb. von Dr. Krebs. I. (139 S.) 2,40. II. (137 S.) 2,00. Wiesbaden, Bergmann.
Rothe, Dir., Krystallnetze zur Verfertigung der beim mineralogischen Anschauungsunterrichte vorkommenden wichtigsten Krystallgestalten. 3 Taf. in Folio. 8. Aufl. 4 S.) Wien, Pichler. 0,60.
Graham-Ottos ausführl. Lehrbuch der Chemie. Anorganische Chemie v. Prof. Dr. Michaelis. 5. Aufl. (624 S.) Braunschweig, Vieweg. 12.
Johnstons Chemie des täglichen Lebens. Neu bearb. v. Dr. Dornblüth. 2. Aufl. Stuttgart, Krabbe. In 12 Lfgn. à 0,40.
Helmholtz, H. v., Handbuch der physiologischen Optik. 2. Aufl. Hamburg, Vofs. In Lfgn. à 3.
de Bary, Prof., Vorlesungen über Bakterien. 2. Aufl. (158 S.) Leipzig, Engelmann. 3.
Roscoe, Prof., Chemie. Deutsche Ausgabe, besorgt von Prof. Rose. 4. Aufl. (136 S.) Strafsburg, Trübner. 0,80.
Ladenburg, Prof. Dr., Vorträge über die Entwickelungsgeschichte der Chemie in den letzten 100 Jahren. 2. verm. Aufl. (354 S.) Braunschweig, Vieweg. 6.
Lübens Leitfaden für den Unterricht in der Naturgeschichte. 4 Kurse. 10. Aufl. Lpz., Schultze. 4,45.
Naturlehre in der Volks- u. Mittelschule. Bearb. v. prakt. Schulmännern in Düsseldorf. 4. Aufl. (92 S.) Düsseldorf, Schwann. 0,60.
Potonié, Dr., Illustrierte Flora von Nord- und Mitteldeutschland. 3 Aufl. (511 S.) Berlin, Boas. 5.
Seuberts Lehrbuch der ges. Pflanzenkunde, bearb. v. Prof. Dr. v. Ahles. 7. Aufl. (621 S.) Lpz., Winter. 6,80.

3. Geographie.

Daniel, weil. Prof. Dr., Lehrbuch der Geographie für höhere Unterrichtsanstalten. 67. Aufl. v. Dr. Volz. (511 S.) Halle, Waisenhaus. 1,50.
Nachtigals Reisen in der Sahara und im Sudan. Nach s. Reisewerk dargestellt von Dr. Fränkel. Mit N.'s Portr., 92 Abb. u. 1 Karte. 2. Aufl. (401 S.) Lpz., Brockhaus. 5.
Kirchhoff, Prof. A., Schulgeographie. 6. Aufl. (264 S.) Halle, Waisenhaus. 2.
Klein, Dr., Lehrbuch der Erdkunde für höhere Lehranstalten. Mit 55 Karten u. 102 Illustr. 3. Aufl. (368 S.) Braunschweig, Vieweg. 2,80.
Zsigmondy, Dr., Die Gefahren der Alpen. 2. Aufl. (239 S.) Leipzig, Frohberg. 4.
Supan, Prof. Dr., Lehrbuch der Geographie nach den Prinzipien der neueren Wissenschaft. 6. Aufl. (298 S.) Laibach, Kleinmayr. 2,80.
Stanley, Der Kongo und die Gründung des Kongostaates. Arbeit und Forschung. Aus dem Englischen von v. Wobeser. Mit über 100 Abb. u. 2 gr. Karten. 2. Aufl. 2. Bde. (557 S., 516 S.) Lpz., Brockhaus. 12.
Rossmässler, Die Geschichte der Erde. 4. Aufl. v. Dr. Engel. Stuttgart, Weisert. In 8 Lfgn. à 0,50.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Der Kampf gegen den Druck der toten Sprachen.

(Auszug aus Raoul Frarys Question du Latin)*)

von Dr. Rhode, Oberl. a. R.-Progymn. i. Lübben.**)

Aber die Wellenbewegungen breiten sich weiter aus; in einem Bande von mehr als 300 Seiten, der schon eine zweite Auflage***) in wenigen Wochen erreicht hat, macht Raoul Frary dem in Frankreich eingeführten System den Prozeſs, und wie ein Echo tönt vom Ostseestrande, aus „Schleswig-Holstein, meerumschlungen“, in kurzen aber inhaltsreichen Zeilen schwere Anklage, welche Professor Esmarch, der berühmte Chirurg, erhebt.†)

Viel Feind, viel Ehr, so mag Herr Frary getrost denken, wenn er die zahlreichen, zum teil recht heftigen Angriffe zu Gesicht bekommt, die seinem genialen Buche inner- und auſserhalb seines Landes widerfahren sind. Auch wird er sich angesichts des groſsartigen Aufsehens und der Verbreitung, welche ihm weit über die Grenzen seines Vaterlandes hinaus zu teil geworden ist, so daſs sogar der ungarische Minister Trefort dasselbe bei Gelegenheit seiner bedeutsamen Rede über die Unterrichtsreform rühmend erwähnt, über die Ausfälle der Stockphilologen zu trösten wissen, deren einer ihn, einen der hervorragendsten Kenner des klassischen Altertums in Frankreich, mit den nichtssagenden Worten abkanzeln zu können vermeint: „Was in aller Welt hat es für ein Interesse, die Meinung eines französischen Zeitungsschreibers über die französischen Lyceen kennen zu lernen, wenn es sich um die Beurteilung deutscher Schulverhältnisse handelt?“††) Vergiebt man sich vielleicht etwas damit, das Gute anzunehmen, was von auswärts kommt?

Sehen wir darum zu, was Frary in den 17 Kapiteln seines Buches begangen hat, um so gewaltigen Zorn auf sich zu laden. Als Zweck seiner Arbeit bezeichnet er die Herbeiführung einer Reform des höheren Unterrichts in Frankreich, welche ihm für die Zukunft seines Landes wichtiger zu sein scheint, als das groſse Publikum und selbst diejenigen glauben, die sich berufsmäſsig mit Unterrichten beschäftigen. Ehrwürdig, gefürchtet, unbegreiflich herrscht auch im französischen Gymnasium die

---

*) Übersetzt unter dem Titel: Die Tyrannei der toten Sprachen. Ein Mahnwort zu einer zeitgemäſsen Umgestaltung des höheren Schulwesens. Hagen i. W. Hermann Risel & Comp.

**) Verf. ist leider am 17. IV. ds J. verstorben. D. Red.

***) Wir erhielten auf unser Gesuch sofort von der französischen Verlagshandlung in Paris die vierte Ausgabe (Quatrième edition), während wir von der deutschen Verlagshandlung in Hagen die Übersetzung bis heute nicht erlangen konnten. D. Red.

†) Vgl. den Aufsatz: „Klassische Vorbildung“ von Karl Vogt, aus der Neuen freien Presse abgedruckt in der Zeitung für das höhere Unterrichtswesen Deutschlands XV, 10 und in dieser Zeitschrift XVII, 223.

††) S. Blätter für höheres Schulwesen, III, 10.

Tradition, ohne daſs die Eltern nur daran zu denken wagen, daſs die in denselben befolgten und ein für alle mal feststehenden Grundsätze vielleicht aberwitzig sein können. Die Allmacht des Staates und der Zwang der Berechtigungen lassen auch hier keine gedeihliche Fortentwickelung des höheren Schulwesens aufkommen, und nirgends wird starrer am Herkommen festgehalten als dort in Schulangelegenheiten.

Entstanden ist der höhere Unterricht zur Zeit der Renaissance unter den Händen der Jesuiten, die naturgemäſs Latein zu seiner Grundlage machten, weil es die einzige Quelle war, aus der sich der damals rege gewordene Wissensdrang stillen lieſs. Anfangs förderten sie somit die geistige Ausbildung, später aber widersetzten sie sich ihr, indem sie regungslos beim Althergebrachten verharrten, was sie auch noch bis auf den heutigen Tag thun. Bei den gesellschaftlichen Verhältnissen, wie sie vor der Revolution bestanden, und bei denen es sich nur darum handelte, Edelleute, Priester und Beamte zu erziehen, hatte dies in gewisser Weise seine Berechtigung. Trotzdem datieren schon aus jener Zeit die Angriffe Diderots und Rousseaus auf die klassische Tradition, ohne daſs dieselbe indessen gegen die Allmacht hergebrachter Gewohnheit aufkommen konnten, zumal eine öffentliche Meinung noch nicht bestand. Ganz anders aber haben sich die Verhältnisse im 19. Jahrhundert gestaltet. Hier haben die groſsartigen Entdeckungen und die leichteren und rascheren Verkehrsmittel einen fieberhaften Kampf ums Dasein zwischen allen Nationen der Erde wachgerufen, bei dem derjenige Staat am besten fährt, der die Unkosten der Produktion möglichst zu verringern weiſs, die Kräfte jedes Bürgers auf nützliche Arbeiten zu lenken versteht, alle Kapitalien am fruchtbringendsten anlegt und sein Augenmerk unablässig auf seine Nebenbuhler und den Stand des Welthandels gerichtet hat. Hiernach verlangt das nationale Interesse vor allen Dingen eine billige Staatsverwaltung, die bei ihren Ansprüchen nicht bis an die Grenze der Leistungsfähigkeit der Bürger geht, sondern sich mit den notwendigsten Bedürfnissen begnügt, damit auf diese Weise die nationale Arbeit erleichtert und die Regierung ihrer wahren Bestimmung als Beschützerin des Eigentums und der Sicherheit zurückgeführt werde. Man braucht dann weniger Beamte und hat nicht mehr nötig, wie es heutzutage geschieht, die Jugend in Rücksicht auf die Staatsämter einseitig auszubilden. Hat der Staat überhaupt ein Recht, das Geld der Steuerzahler dazu zu verwenden, um Stellenjäger groſszuziehen? Ist es nicht eine Ungerechtigkeit, gegen den Ackerbau, den Handel und die Industrie, den Schmand der Jugend zu Gunsten der Beamtenlaufbahn vorwegzunehmen? Wie darf man jährlich Tausende von Jünglingen von dem Wege abbringen, auf dem sie ihr Glück gemacht haben würden! wie zugeben, daſs der blinde Ehrgeiz der Eltern und die noch blindere Fürsorge der Staatsgewalt sie Berufszweigen zutreiben, in denen sie keinen Platz mehr finden, während sie für diejenigen Berufszweige untauglich geworden sind, in denen noch leere Stellen vorhanden sind! So lange aber das öffentliche Unterrichtswesen eine Art Hierarchie aufrecht erhält, bei der der Nährstand auf der niedrigsten Staffel steht, wird sich die Jugend nach Höherem drängen; so lange die klassische Erziehung, dank den Vorrechten, welche ihr Gesetze und Verordnungen zusichern, einen unwiderstehlichen Nimbus von sich strahlt, wird der Bürgerstand seine Söhne dem Latein ausliefern müssen.*) Sehr verhängnisvoll schädigen solche Verhältnisse den nationalen Wohlstand, der heutzutage nicht gedeihen kann, ohne daſs der Unternehmungsgeist den Weltmarkt für seine Spekulationen erfolgreich aufsuchen kann. Dazu aber gehören nationalökonomische, geographische und sprachliche Kenntnisse, die durch Studien vergilbter Bücher nicht erworben werden, und um Absatz für die heimische Industrie zu finden, bedarf es Kenntnis der Bedürfnisse und des

*) Die Ähnlichkeit mit unsern Verhältnissen liegt klar zu Tage.

Geschmacks fremder Völker, denen der Franzose seither seinen Geschmack aufzuzwingen pflegte, bis er vor den Fortschritten seiner Konkurrenten erlag, deren Thätigkeit über seine Trägheit den Sieg davon trug. Die schwere wirtschaftliche Krise, die Frankreich durchzumachen hat, rührt zum gröfsten Teil von der Unwissenheit seiner Bewohner her. Hier kann nur eine gründliche Änderung der Lehrpläne des höheren Unterrichts Wandel schaffen. Die Träumerei auf den Trümmern des klassischen Altertums hat lange genug gedauert, die Augen müssen endlich dem Lichte der modernen Welt geöffnet werden. Zu diesem Zwecke müssen, und das ist der Kernpunkt der Fraryschen Darlegungen, die alten Sprachen aus den Lehrplänen des höheren Schulwesens gestrichen werden.

Beim Griechischen ist dies thatsächlich, wie bei uns, schon der Fall. Bei der Einschränkung, die es gegenüber dem sonstigen Wissensstoff, der sich dem Menschen immer gebieterischer aufdrängt, wie Geschichte, Geographie und Naturwissenschaften, über sich hat ergehen lassen müssen, kann von einer wirklichen Erlernung dieser bewunderungswürdigen Sprache und Litteratur, von der Chenier mit Recht sagt, dafs nie eine schönere auf Menschenlippen geboren sei, heutzutage keine Rede mehr sein. Bis zum verständnisvollen Lesen dringen die wenigsten vor, obwohl gerade die griechischen Schriftsteller nur dann wahren Genufs gewähren, wenn man sie gut versteht und im Zusammenhang liest. Ihr Geist tritt nimmermehr in winzigen Bruchstücken zu Tage. Den Homer nach einem seiner Gesänge oder den Sophokles nach einer Szene seiner Tragödien beurteilen zu wollen, wäre gerade so, wie wenn man den Ozean nach einer Bucht, die Alpen nach einem Hügel studieren wollte. Da sich nun von allen Seiten einstimmige Klage gegen die Quälerei erhebt, welche die Schule mit Überbürdung von Wissen an der Jugend verübt, ist eine Verstärkung der dem Griechischen zugemessenen Zeit undenkbar und mufs demnach ganz fallen gelassen werden; freilich, ein schmerzliches Opfer für diejenigen, welche sich nach mühevoller Arbeit an der Erkenntnis der Schönheiten hellenischer Litteratur erbaut haben; die Jugend aber wird dabei nur Kenntnisse einbüfsen, die zu elementar sind, um von grofsem Nutzen sein zu können: eine Grammatik, von der sie nur Härten kennen gelernt hat, und Meisterwerke, von denen sie nur einige Brocken liest. Auch der aus den griechischen Etymologieen abgeleitete Einwand ist zurückzuweisen. Niemand braucht zu wissen, woher gewisse wissenschaftliche Wörter stammen, um zu verstehen, was sie bedeuten. Entweder sind die aus dem Griechischen stammenden Wörter in den allgemeinen Sprachgebrauch übergegangen, und man versteht sie, ohne auf ihren Ursprung zurückzugreifen, oder sie gehören dem Spezialwörterschatz einer Wissenschaft an und man braucht und versteht sie in Verbindung mit Thatsachen oder Gedanken, auf die man stöfst; ihre Herkunft thut nichts zu ihrer Bedeutung.

Das bei weitem wichtigste Kapitel des ganzen Buches, bei dem der Berichterstatter naturgemäfs länger verweilen mufs, ist dasjenige, welches speziell vom Latein handelt. „Hier vor allem,“ ruft der Verfasser eingangs aus, „fühle ich die ganze Schwierigkeit meiner Aufgabe; sich am Latein vergreifen, kommt fast einer Gotteslästerung gleich, denn ohne Latein ist kein höherer Schulunterricht denkbar.“ Diesen bis auf den heutigen Tag für unumstöfslich gehaltenen Grundsatz vermisst er sich anzugreifen. Auch in Frankreich bemühen sich seit einem halben Jahrhundert die gröfsten Geister unablässig, die Lehrpläne mit den Bedürfnissen der Jetztzeit in Einklang zu bringen. In kürzerer Zeit will man durch verbesserte Methoden ein gröfseres Mafs von Wissen im Gehirn des Kindes aufspeichern und ahnt nicht, dafs man dasselbe auf solche Weise schliefslich überlastet. Beweisgründe für die Beibehaltung des Latein stehen den Verfechtern der Tradition massenweise zu Gebote, aber sie rufen auch noch Redekunst und Verunglimpfungen gegen die Gegner zu

Hülfe. Ihre Gründe aber lauten, wenn man sie des rednerischen Schmuckes entkleidet:

1. Das Studium einer alten Sprache ist eine ausgezeichnete Gymnastik für den Geist der Kinder.
2. Die Kenntnis des Latein ist für den unerläfslich, der das Französische beherrschen will.
3. Die fleifsige Beschäftigung mit den grofsen Männern und grofsen Schriftstellern des Altertums bildet den Geist und das Herz.
4. Da die moderne Civilisation eine Tochter der griechisch-römischen ist, so ist die beste Ausbildung, welche man den heranwachsenden Geschlechtern geben kann, diejenige, welche wir aus unseren Meistern schöpfen

Zu 1. wird bemerkt, dafs das Sprachstudium allerdings eine für das Kindesalter passende Beschäftigung ist, weil es das Gedächtnis in Anspruch nimmt. Während man aber durch Sprechen und Lektüre, also vermittelst des lebendigen Wortes, aus einer lebenden Sprache in die andere übergehen kann, ändert sich beim Latein plötzlich alles, die Wörter, Wendungen, ja selbst die Art zu denken. Deklination und Konjugation, und das Gestrüpp der Grammatik mit seinen Abstraktionen, verwehren gleich Festungswerken den Eintritt in das zu erlernende Idiom. Die Mehrzahl der Schüler erfährt bei diesen Mühseligkeiten, denen die Begabteren Widerstand leisten, nur eine Art moralischer Zerschlagenheit und unheilbarer Verunstaltung. Deshalb flöfst diese Art Gymnastik sehr bald Widerwillen gegen das Lernen ein, und nur ein einziger Umstand könnte diese mühselige, von Anfang an drückende Arbeit rechtfertigen, nämlich der völlige Besitz und uneingeschränkte Genufs der Meisterwerke; gerade der aber geht den meisten Schülern verloren, weil sie zu früh abgehen.*) Nur ihretwegen hat man nachträglich die Theorie von der Gymnastik des Geistes erfunden, ungefähr so, wie wenn man behaupten wollte, dafs ein zehnjähriges forciertes Abspielen der Tonleiter unter Verzicht auf die Musik von Wert wäre. Unsere Vorfahren würden über unsere Bescheidenheit lachen, wenn sie erführen, dafs wir das lateinische Elementarbuch nötig haben, um unsern widerspenstigen Geist geschmeidig zu machen. Wie häufig aber bemerkt man einen betrübenden Unterschied zwischen dem Eifer, mit dem die Kinder sich ans Lernen begeben, wenn man sie nicht übermäfsig anstrengt, und der dumpfen Folgsamkeit, mit welcher sie sich auf dem holprigen Pfade der einzelnen Lektionen und Exercitien dahinschleppen! Die angebliche Gymnastik des Geistes hat sie geschwächt.

Die Behauptung 2. bekundet, wie gute alte Vernunftgründe bei den modernen Beweisführungen mehr und mehr im Schwinden begriffen sind. So wenig wie Homer Sanskrit verstand, braucht Jemand eine tote Sprache zehn Jahre zu studieren, um seine Muttersprache zu beherrschen, das beweist schon der Stil einer geistvollen Frau. Aufserdem ist der französische Sprachschatz zum geringsten Teil aus dem klassischen Latein geschöpft. Die christliche Theologie, die Kirchenväter, die Scholastik, das Lehnsrecht, und noch mehr die verschiedenen Arten des Handwerks liefern reiches Material. Eine Sprache ist wie ein Flufs, der, wenn nicht zahlreiche Zuflüsse nach und nach ihre Gewässer in denselben ergössen, austrocknen würde. Was vom Latein durch volkstümliche Tradition überkommen ist und den Grundstock der französchen Sprache ausmacht, wird durch Mütter und Ammen zur Genüge überliefert. Es ist überhaupt ein seltsamer Widerspruch, dafs man sich auf die Verschiedenheit beider Sprachen steift, um die Geistesgymnastik beim Übergange aus der einen in die andere zu rühmen und auf die Ähnlichkeit, um die eine aus der andern zu erklären. Auch die französischen Klassiker sind ohne ein Ge-

*) Bei uns auch.

folge von Grammatikern und Erklärern recht wohl verständlich. Man gebe dem Tragiker eine Rachel, und die Gelehrten sind unnötig.

Wo aber hat man, wird beim Übergange zu Punkt 4 gefragt, gesehen, daſs der Inhalt der klassischen Schriftdenkmäler eine geistige Erziehung ausübt? Etwa an den banausischen Reden der Revolutionsmänner, die Cato und Brutus beständig im Munde führten, oder an den Schmeichlern, die die schönsten Erinnerungen an das Altertum in den Vorzimmern des Schlosses zu Versailles herabwürdigten? Nein, die Alten sind keine guten Lehrer für moderne Staatskunst und Moral. Sie opferten dem Staate das Einzelwesen und trugen den Rechten der Familie wenig Rechnung und wissen nichts von der Freiheit zu denken, geschweige denn zu leben. Die besten unter ihnen treten für verschwenderische Gesetze, eine mechanische und einförmige Erziehung, eine vorgezeichnete Tugend, eine miſsgünstige Gleichheit und eine theatralische Brüderlichkeit ein. Die Moral eines Horaz und Virgil ist eine sehr fragwürdige und das Studium der Klassiker nichts als eine groſse Lehre des Redeschwulstes und des Skeptizismus. Man muſs nur genauer in das Studium der von Livius und Plutarch geschilderten Personen eindringen, um an ihnen ebenso grobe Flecken zu finden, wie an unsern Zeitgenossen. Auch fehlt es nicht an Ereignissen in der modernen Geschichte, die sich denen der Alten würdig zur Seite stellen lassen. Das überaus ergreifende Bild von dem schweren Miſsgeschick des Zuges gegen Sizilien im Thucydides stellt Segurs Erzählung des Feldzuges von 1812 keineswegs in Schatten. Der Krieg zwischen Caesar und Pompejus ist nicht groſsartiger und ergreifender als der amerikanische Freiheitskrieg. In Summa ist die alte Litteratur nur ein Bruchteil der Gesamtlitteratur, und zwar ein Bruch, der beständig kleiner wird, weil der Zähler konstant ist, während der Nenner ins unendliche wächst. Jede Generation vermehrt unsern Besitzstand an Meisterwerken, und das näher Stehende, unserm Geschmack mehr Entsprechende bleibt uns fremd, so lange wir die schönsten Jahre unserer Jugendzeit über der römischen Litteratur verträumen. Auch ist dieselbe im Gegensatz zu der griechischen keineswegs originell. Die Griechen haben in der Jugendzeit der Welt gelebt, und so die Blume der Poesie abgepflückt. Ein Molière aber ist ebenso gut ein schöpferischer Genius wie Plautus, Bossuet wie Cicero, Racine wie Virgil; Dante und Shakespeare sind es noch mehr. So sind die Römer bis zum Schluſs Nachahmer der Griechen geblieben. Der Schlummer des Mittelalters, die Umgestaltung des religiösen Glaubens und der gesellschaftlichen Zustände haben der menschlichen Gesellschaft einen Lenz gebracht, wie sie ihn beim Übergange Athens an das Ufer der Tiber nicht hat finden können. Der Genius im Zeitalter der Elisabeth war ungezwungener als in dem des Augustus, warum also Meister in Rom suchen, die wir näher bei uns finden können? Die Oden des Horaz müssen, trotz der Schönheiten des Stils, an der Seite lyrischer Dichter, wie Victor Hugo und Lamartine, Goethe und Schiller, verblassen; sind etwa seine Satiren und Episteln mehr wert als die Voltaires? Und so lassen sich allen alten Klassikern überlegenere neue gegenüberstellen. Es giebt im ganzen Altertum keinen Geschichtsschreiber, der Macaulay an Beredsamkeit überragt und keinen Kulturhistoriker, der Buckle gleichkommt. Wozu also an dem Aberglauben festhalten, daſs die alten klassischer sind als die neueren, und besser geeignet, den Geschmack der Jünglinge auszubilden? Sie sind mit vielen Mängeln behaftet, man findet bei vielen von ihnen Weitschweifigkeit, Geziertheit, Übertreibung und Redeschwulst. Dasjenige, was ihnen eine gewisse Überlegenheit hinsichtlich der Form zu verleihen scheint, nämlich die bestimmte Sprache als Ausdruck allgemeiner Gedanken, rührt daher, daſs ihr Geist arm an Vorstellungen und Kenntnissen war. Ihr plötzliches Wiederauftauchen im Mittelalter, zur Zeit, als das Christentum einen strengen und geisttötenden Druck ausübte, gleicht einer Wiedergeburt der Natur. Durch ihre Bewunderung

schüttelt man das Joch eines langen Zwanges, des Aszetismus, des Mystizismus und der Scholastik ab, daher die Begeisterung, welche sie wachriefen.

Noch schlimmer steht es um den aus der Tradition abgeleiteten Beweisgrund. Herr von Laprade, einer der eifrigsten Verfechter des Latein, hat sich schwerlich etwas Rechtes dabei denken können, als er schrieb:

„Als Erbe des griechischen und lateinischen Genius läuft der französische Genius, der bis zu dieser Zeit in der Welt der christliche Genius im wahren Sinne des Wortes gewesen ist, Gefahr, alles zu verlieren, wenn er sich von seinem Ursprunge lossagt. Wenn er der grofse Träger wahrer Civilisation gewesen ist, so dafs im Vergleich mit ihm jenes heute triumphierende Deutschland nicht minder ein barbarischer Volksstamm (!) genannt werden kann, so rührt dies daher, dafs er der christliche Fortsetzer des Hellenismus gewesen ist, und weil der Hellenismus die grofse Überlieferung der menschlichen Vernunft, die Grundlage jeder civilisierten, gerechten und vernünftigen Gesellschaft ist; indem wir Latein und Griechisch studieren, studieren wir unsere eigene Herkunft und treten nicht aus der christlichen Welt heraus.“

Unklar ist, was hier das Christentum soll, auch mit welchem Rechte die Franzosen, das am wenigsten christliche unter den civilisierten Völkern, die Deutschen als barbarischen Volksstamm ansehen dürfen, obgleich die Deutschen mindestens ebenso gute Christen und ebenso gute Kenner des Lateinischen sind. Aber die Menschen, bei denen die Empfindung über die Logik den Sieg davon trägt, setzen gern auf die eine Seite alles, was sie lieben, auf die andere alles, was sie hassen und werden so völlig ungerecht.*) In Wahrheit lernt man Latein, weil es Mode ist und um zur besseren Gesellschaft zu gehören, oder vielmehr: man verbringt eine gewisse Zahl von Jahren in Gebäuden, wo es gelehrt wird. Deshalb darf man es auch nach dem Abiturientenexamen so rasch wie möglich vergessen, wenn man nur einmal seiner Tyrannei unterworfen gewesen ist.

Wir übergehen, unter Hinweis auf die Übersetzung des Fraryschen Buches, die interessanten Darlegungen über die verfehlten Versuche, welche auch in Frankreich mit Gabelung in den unteren Klassen und Errichtung von Fachschulen gemacht sind, die auch dort sämtlich unter dem Drucke der Allmacht des Latein, was die besten Lehrer und Schüler anzog, genau wie bei uns, kläglich gescheitert sind, und wenden uns sofort zu dem Kapitel über Mathematik und Naturwissenschaften, um nach kurzer Berührung desselben, sowie der über neuere Sprachen und Geschichte handelnden eingehender den Inhalt des Kapitels über „Geographie“, welches den Glanzpunkt des ganzen Buches bildet, darzulegen.

Die Mathematik wünscht Frary bis auf die Arithmetik, erst im 14. oder 15. Lebensjahre zu beginnen, einmal weil vorher den Kindern die zu ihrer Auffassung unerläfsliche Genauigkeit und Klarheit der Begriffe fehlt, dann, damit auch in diesem Gegenstande die früher abgehenden nicht mit unabgeschlossenem Wissen ins Leben treten. Die Behauptung, dafs die Mathematik die Übung verleihe, im Leben gute Schlufsfolgerungen zu ziehen und den Geist logisch bilde, wird bestritten, weil bei der Logik der exakten Wissenschaften Stoff und Prinzipien grundverschieden von denen der humanen Wissenschaften sind. Auch Physik und Chemie sollen für die oberen Klassen aufgespart werden, dagegen soll die Naturbeschreibung, welche mehr aus Thatsachen als aus Schlufsfolgerungen besteht, und die das Gedächtnis nötig hat, frühzeitig begonnen werden, aber einfach, ohne gelehrte Theorieen und ohne Bearbeitung schriftlicher Aufgaben. Die dabei üblichen Spaziergänge sollen zugleich körperliche Übungen bleiben, nicht aber zu Lehrstunden über Dinge gemacht werden, welche den Geist abspannen. In Auswahl und Behandlung des Stoffes ist Mannig-

*) Wie oft haben wir das bei uns auch schon erlebt!

faltigkeit je nach den Gewohnheiten der Gegend und dem Geschmack und Beruf der Schüler anzustreben.

Beim Kapitel: „Die lebenden Sprachen“ wird die stiefmütterliche Rolle bemängelt, die dieselben seither neben den Sprachen, namentlich auch beim Abiturientenexamen, gespielt haben. Um das abzustellen, mufs ihr Studium zur Geschmackssache gemacht werden, dazu aber mufs früh angefangen werden und zwar an der Hand passender Lektüre ohne den Wust der Grammatik und die Dornen der Syntax. Mehr und mehr schwindet die historische Vorherrschaft des Französischen und die englische Sprache wird Weltsprache. Es giebt schon zwei Nationen, die sie sprechen, in Australien wird bald die dritte erstehen, deshalb allein verdient sie schon mehr Berücksichtigung in den Lehrplänen. Sie verdient sie aber auch wegen ihrer Beschaffenheit. Frei von grammatischen Spitzfindigkeiten, kurz und bündig, ist sie wie geschaffen zum Befehlen und Urteilen. Ohne die launenhafte Orthographie würde sie fast vollkommen sein. Auch die Kenntnis des Deutschen ist heutzutage für die meisten Berufsarten nötig, um die Fortschritte unserer mit uns rivalisierenden Nachbarn aufmerksam zu verfolgen. Dazu hat das Deutsche in vieler Hinsicht grofse Vorzüge vor dem Französischen. Viele Franzosen sind fest davon überzeugt, dafs Deutschland sich durch Spionage einen grofsen Vorteil über sie verschafft hat. Sie setzen hinzu, dafs die angeborene Grofsmut der Franzosen ihnen nie gestatten wird, mit denselben Waffen zu kämpfen. Wahr daran ist nur, dafs die Deutschen es verstanden haben, die nützlichste und tadelloseste Spionage auszuüben, welche einfach darin besteht, die litterarischen Produkte eines Landes aufmerksam zu lesen, denn in ihnen findet sich alles für denjenigen, welcher sehen und begreifen kann. Das Englische und Deutsche sollte deshalb in Gemeinschaft mit der Muttersprache die Grundlage der wissenschaftlichen Bildung abgeben, die vom höheren Schulunterricht zu verlangen ist. Daneben hat die Geschichte zu treten, nicht als Anhängsel der Gymnasialstudien, sondern vorwiegend als Kulturgeschichte zur Erschliefsung des Verständnisses moderner Weltentwicklung. Und nun zur Geographie!

Schon 1864 hatte Cournot, ein bedeutender Gelehrter, die Ansicht ausgesprochen, dafs die Geographie, richtig gelehrt, das nützlichste aller Fächer sei und den ersten Platz im Unterricht beanspruchen dürfe. Freilich hielt ihn das Gefühl, wonach man das Nützliche dem Schönen gegenüber auch bei uns für etwas Erniedrigendes hält, ab, seine Forderung mit Nachdruck geltend zu machen. Dieser Rest aristokratischer Gesinnung erinnert, wie Frary meint, an die Chinesen, welche als Zeichen der Nobilität die künstlich hergestellte Kürze der Füfse bei den Frauen und die Länge der Nägel bei den Männern ansehen. Sich der Füfse nicht zum Gehen und der Hände nicht zum Arbeiten bedienen können, ist freilich eine seltsame Art, sich von der grofsen Menge abzusondern. Heutzutage ist jeder von dem Nutzen der Geographie überzeugt und es giebt wenige Berufsarten, bei denen sie nicht dienlich ist, was man noch mehr einsehen würde, wenn mehr Leute sie verständen. Aber die Wissenschaft offenbart alle ihre Wohlthaten nur denen, die sie sich angeeignet haben. Die Geographie soll vor allem auch dazu dienen, die Berufswahl zu bestimmen. Sie erweitert den Horizont der Jugend; sie zeigt ihr manche Laufbahn, in denen ihre Kräfte eine hundertmal fruchtbringendere Beschäftigung finden, sowohl für sie selbst, als auch für ihr Land, als in der Beamtenlaufbahn. Von früh auf giebt die Geographie der Neugierde der Kinder die reichste Nahrung; sie empfinden den Wunsch, alles nachzuahmen, was sie ihnen an Schönem und Grofsem aufserhalb ihres Landes vorführt; wenn sie erfahren, in wie vielen Punkten wir hinter unsern Nebenbuhlern zurückstehen, wird die Begierde in ihnen rege, mit daran zu helfen, dafs ihr Land den Vorrang erwirbt. Die Geschichte stachelt den kriegerischen Wetteifer an, die Geographie den friedlichen, denn ihre

schönsten Belehrungen handeln von dem Kampf des Menschen gegen die Natur, sowie von dem Wohlergehen arbeitsamer Völker. Ihre Kenntnis vergifst sich nicht wie die der lateinischen und griechischen Brocken, sondern entwickelt sich beständig weiter, weil man sie fortwährend braucht. Die auswärtige, die koloniale und wirtschaftliche Politik sind ohne sie nicht verständlich. So trägt sie von allen Wissenschaften am meisten zur Aufklärung bei und verleiht dem, der sie beherrscht, die unbestreitbare Überlegenheit in gesellschaftlicher Beziehung, welche ihn instand setzt, ohne Pedantismus in den Ruf eines gebildeten Mannes zu kommen. Aber wollte man auch den von den Verfechtern der toten Sprachen so oft geltend gemachten Einwand zu dem seinigen machen, dafs die Erziehung Geist und Herz harmonisch ausbilden soll, ohne Rücksicht auf den künftigen Beruf, so behauptet die Geographie doch noch den ersten Platz. Sie wird die ersten erhabenen Regungen wachrufen, das Schauspiel des menschlichen Lebens in seiner ganzen Gröfse und Verschiedenartigkeit vorführen und zeigen, was Mut und Beharrlichkeit einzelner Menschen und ganzer Völker vermögen. Soll sie aber diesen Zweck erfüllen, so darf sie nicht mehr so geistlos und trocken wie früher behandelt werden. Sie mufs sich nicht nur an das Gedächtnis, sondern auch an die Einbildungskraft wenden. In Frankreich hat *Elisée Reclus* in seinem umfangreichen Werke zuerst den Weg gezeigt, auf dem dies zu geschehen hat, und damit die Muse, der er sich weihte, aus niedriger Stellung zu der einer Königin emporgehoben. Die Geographie soll keine tote Wissenschaft sein. Natur und Menschheit befinden sich in beständiger Umgestaltung und diese mit einander in Beziehung zu setzen, ist ihre Aufgabe. Hiernach hat sich der Unterricht etwa wie folgt zu gestalten: Nachdem die Gesetze der doppelten Umdrehung der Erde, die Verteilung von Wärme und Kälte auf Tage und Jahreszeiten bestimmt sind, nachdem ein Blick auf die allgemeine Gestalt der Meere und Erdteile geworfen ist, wird mit dem Studium des Lebens auf der Erde begonnen. Beim Ozean betrachten wir Ebbe und Flut und den sich daran anschliefsenden Kreislauf des Wassers. Wir sehen Gletscher entstehen, Meere und Flüsse Berge abtragen und Thäler aushöhlen, ferner den Erdboden sich heben und senken durch unterirdische Erschütterungen, kurz: es erklären sich so frühere Umgestaltungen unseres Planeten, die im Laufe von Jahrtausenden vor sich gegangen sind. So wird die physische Geographie umgestaltet und belebt. An Stelle von langweiligen Verzeichnissen von Kaps, Bergen und Flüssen tritt die Beschreibung des Lebens auf der Erdkugel und seiner verschiedenen Erscheinungsformen. Die Schüler erfahren, warum hier Vorgebirge gleich Riesen hervorragen, dort Wälle zusammengestürzt sind, in die die Zeit Bresche gelegt hat. Die zufälligen Eigenschaften des Erdbodens, die vorher nur wie unbegründete Launen erschienen, werden fast zu lebenden Wesen, die ihre Physiognomie, ihren Charakter, ihre Geschichte und ihre Zukunft haben. Die physische Geographie war eine schleierhafte und tote Wissenschaft, die das Gedächtnis überlastete; jetzt regt sie das Denken an und bezaubert die Einbildungskraft. Hieran schliefst sich das Studium der klimatischen Verhältnisse. Aus Jahreszeiten, Winden und dem Einflufs der Abdachung des Bodens wird man dem Kinde leicht begreiflich machen, warum wir uns eines gemäfsigten Klimas erfreuen, warum es Gegenden giebt, die in ewiges Eis gehüllt sind, und warum man unter derselben Breite Wüsten und Urwälder antrifft. Zur Darstellung der Verteilung des Lebens auf der Erde müfsen Flora und Fauna, die von den klimatischen Verhältnissen abhängig sind, skizziert werden. Dies alles aber sind nur Vorbereitungen. Der wirkliche Gegenstand geographischer Forschung ist der Mensch. Bevor zu den einzelnen Völkern übergegangen wird, sind die Rassen und ihre Verbreitung anzugeben. Ihre Eroberungen untereinander sind interessanter und von nachhaltigerem Einflufs auf die Geschicke der Menschheit gewesen als die

der Könige, weshalb sich aus ihnen das Gefüge der Gesellschaft, die Sklaverei und Kastenvorrechte am besten erklären. Dann hat man von den Sprachen zu reden, die sich nicht immer mit den Rassen decken und die verschiedenen Schriftsysteme zu erörtern. Schliefslich wird man auch nicht umhin können, einige Worte über das Wesen und die Verbreitung der einzelnen Religionen zu sagen, ohne indessen nach der einen oder anderen Seite hin Partei zu nehmen. Dann kommt ein Überblick über die Mittel der Ernährung und Kleidung, der uns nötigt, die Jägerei Fischerei und Ackerbau treibenden Völker zu unterscheiden. „Sage mir, was du issest, und ich will dir sagen, wer du bist,“ ruft in diesem Sinne Brillat-Savarin aus, und in der That läfst sich ein gut teil menschlicher Entwicklung aus den Umwälzungen der Tafel erkennen. Die richtig aufgefafste Geographie ist die mit einem Blick, wie im Panorama, überschaute Geschichte. Jede Völkergruppe bezeichnet eine Epoche der Menschheit; die Ungleichheit in der Entwickelung der Rassen legt die Stufen der Civilisation blofs, gleichwie die Unebenheiten und Risse des Bodens die aufeinandergelagerten Schichten der Erdrinde sichtbar machen.

„So erscheint uns“, und damit schliesst das hochinteressante Kapitel, „die Geographie, diese bisher so verachtete Wissenschaft, die sich nur mit Mühe im Gefolge der Geschichte und unter deren Schutzmantel ein bescheidenes Plätzchen erobert hat, als die Herrin des höheren Schulunterrichts. Sie ist es, die den gröfsten Teil der Zeit und Arbeit erben müfste, der durch das Aufgeben der toten Sprachen frei werden würde.“

In lebendiger und erschöpfender Weise behandelt Frary so sein Thema, ob die Streichung des altsprachlichen Unterrichts aus dem Lehrplan aller höheren Schulen wünschenswert ist und kommt dazu, diese Frage unbedingt zu bejahen. Wennschon nun dieses Ziel in seinem ganzen Umfange in absehbarer Zeit bei uns wohl kaum zu erreichen ist, so läfst sich doch schon jetzt mit Bestimmtheit behaupten, dafs es dereinst dazu kommen wird. Vorbereitet werden diese Bestrebungen durch den auf allen Seiten immer lauter werdenden Ruf nach einem einheitlichen Unterbau des höheren Schulwesens, in dem für alte Sprachen kein Platz sein würde. Die Erreichung dieses Zieles steht hoffentlich nicht mehr in allzu weiter Ferne. Eine Verbreitung der Ideen Frarys würde viel dazu beitragen.

Eine französische Frau über Unterricht und Bildung.

Als im J. 1884 im Leipziger Tageblatt zwischen einigen Schulmännern sich ein Streit über die Real- und Gymnasialbildung entspann (in den sich auch ein Arzt mischte s. XV, 314ff.), erschien im genannten Blatt (Nr. 40, Beil. I, Jahrg. 1884) u. A. auch ein Artikel überschrieben „Unterricht und Bildung“, gez. von H. Sg.*) Da in demselben die Ansicht einer französichen Frau und berühmten Schriftstellerin mitgeteilt wurde, wobei auch die Mathematik als Bildungsmittel eine Beurteilung erfuhr, so schien uns der Art. im Interesse künftiger Geschichtsschreibung über den Gegenstand des Abdrucks nicht unwert. Doch wurde er längere Zeit zurückgelegt. Aber auch jetzt erscheint uns derselbe im Hinblick auf die sehr veränderten und geläuterten Ansichten und auf das Schwinden der Vorurteile über die Mathematik als Bildungsmittel noch wichtig genug. Denn man ersieht aus demselben, dafs die berühmte Frau von eigentlicher Mathematik und ihrem Bildungswerte einen höchst mangelhaften Begriff hatte; ferner: dafs sie in dem Vorurteil befangen war, dafs die Mathematiker ihre Wissenschaft zur ersten und alleinigen Grundlage der Bildung gemacht wissen wollten, was doch noch keinem

*) S. den Namen des Verf. in der Anm. auf S. 386.

Mathematiker eingefallen ist. Sonach dürfen wir wohl über diese Auslassungen einer „geistreichen" französischen Frau i. J. 1887 zur Tagesordnung übergehen. Die Mathematik und ihre Wirkung als Bildungs- und Erziehungsmittel steht gegenwärtig in einem ganz andern Lichte da, als es eine noch so „geniale" französische Frau zu ihrer Zeit begreifen konnte. Wir verweisen u. A. auf jene zwei schon in Heft 4 (S. 264) bezeichneten neueren Schriften: Förster (Dir. d. Berl. Sternw.) „Ueber Genauigkeit, ein Beitrag zur Pädagogik", worin zugleich die Erziehung zur Wahrhaftigkeit eingeschlossen ist, und Schellbach, „Die Zukunft der Mathematik", Schriften, auf die wir in d. Z. zurückkommen werden. Bezüglich der alten (toten) Sprachen aber wäre es ungemein anziehend einen Meinungskampf der auferstandenen Frau von Staël mit ihrem noch lebenden Landsmann Frary, dessen Ansichten der vorausgehende Artikel giebt, mit anzuhören. Es möge nun der Aufsatz selbst folgen:

H. Sg. Bei dem gegenwärtigen Streit zwischen Gymnasium und Realschule sei es erlaubt, die Stimme eines Fremden anzuführen, eines aufrichtigen Verehrers der deutschen Bildung. Es ist Frau v. Staël. In ihrem Buche „de l'Allemagne" sagt sie in dem Kapitel von den deutschen Universitäten:*)

„Das Studium der Sprachen, das die Grundlage des Unterrichtes in Deutschland bildet, ist der Entwicklung der Anlagen in der Jugend weit günstiger als das der Mathematik oder der Naturwissenschaften. Pascal selbst, dieser große Geometer, dessen tiefer Geist die exakten Wissenschaften, mit denen er sich besonders beschäftigte, wie alle übrigen beherrschte, hat die Mängel erkannt, die untrennbar dem Geiste derjenigen anhaften, die ihre erste Bildung durch die Mathematik erhalten haben; dieses Studium übt in den ersten Lebensjahren nur den Mechanismus der Intelligenz; die Kinder, die man so frühzeitig mit dem Rechnen beschäftigt, verlieren all die Frische der Einbildungskraft, die in jenen Jahren so schön und fruchtbar ist, ohne darum eine außerordentliche Urteilskraft zu erlangen; denn die Arithmetik und Algebra beschränken sich darauf, uns auf tausenderlei Weise stets identische Sätze zu lehren. Die Probleme des Lebens sind verwickelter; keines ist positiv, keines absolut; man muss erraten, muſs wählen und zwar mit Hilfe von Beobachtungen und Voraussetzungen, die keine Verwandtschaft mit dem unfehlbaren Gange der Rechenkunst haben.

Die demonstrierten Wahrheiten führen durchaus nicht zu den mutmaßlichen Wahrheiten *(vérités probables)*, die allein in den Geschäften wie in den Künsten, wie auch in der Gesellschaft zum Führer dienen. Ohne Zweifel giebt es einen Punkt, wo auch die Mathematik jene geniale Kraft der Erfindung verlangt, ohne die man nicht in die Geheimnisse der Natur eindringen kann; auf dem Gipfel des Gedankens scheinen sich die Einbildungskraft Homer's und die Newton's zu vereinigen; aber wie viel Kinder ohne Genie für die Mathematik widmen nicht all ihre Zeit dieser Wissenschaft? Man bildet bei ihnen nur eine Anlage aus, während man zu einer Zeit, wo man durch einseitige Kraftübung die Seele wie den Leib verbilden kann, das gesammte moralische Wesen entwickeln muſs.

Nichts ist weniger auf das Leben anwendbar als eine mathematische Beweisführung. Ein Satz in Ziffern ist entschieden falsch oder wahr; in allen anderen Beziehungen mischt sich Wahres und Falsches dergestalt, daſs oft der Instinkt allein unter den verschiedenen Motiven entscheiden kann, die zuweilen auf der einen wie der andern Seite gleich kräftig sind. Da das Studium der Mathematik an die Gewiſsheit gewöhnt,

*) L'Allemagne par Madame de Staël. Nouvelle édition avec une préface par X. Marmier. Paris, Charpentier, 1859. Première partie. Chapitre XVIII. Des universités allemandes. S. 106 u. f.

so reizt es gegen alle der unseren entgegengesetzten Meinungen auf, während es gerade für den Verkehr im Leben am wichtigsten ist, die andern zu verstehen, das heifst: Alles zu begreifen, was sie dazu führt, anders zu denken und zu empfinden als wir. Die Mathematik verleitet, nur das zu beachten, was bewiesen ist, während die primitiven Wahrheiten, diejenigen, welche von dem Gefühl und von dem Genie erfafst werden, der Demonstration nicht fähig sind. . . .

Es scheint mir also, dafs es im Interesse der Moral wie des Geistes besser ist, das Studium der Mathematik zu seiner Zeit und zwar als einen Teil des Gesammtunterrichts anzubringen, nicht aber dasselbe zur Grundlage der Erziehung und folglich zu dem Prinzip zu machen, das den Charakter und die Seele bestimmt. . . .

Nicht ohne Grund also ist das Studium der alten und neuern Sprachen die Grundlage in allen Erziehungsanstalten gewesen, die die hervorragendsten Männer in Europa gebildet haben.“ So sagt Frau von Staël, die am Schlufs des Kapitels uns noch das Lob spendet: „In Deutschland treibt man alles mit Gewissenhaftigkeit.“

Diese Gewissenhaftigkeit möge die Streitenden veranlassen, die im Vorhergehenden enthaltenen, für Erziehung und Bildung wichtigen Momente wohl zu erwägen. Schreiber dieses hat auch die Stelle in seine „Literaturgeschichte der französischen Schweiz und Savoyens“ aufgenommen und ausdrücklich die Realschulen darauf aufmerksam gemacht.*)

Was den Unterricht in der griechischen Sprache betrifft, so wurde vor zwanzig Jahren in Frankreich vom geschäftlichen Bürgerstande auch einmal die Abschaffung desselben verlangt. Nicht nur vom Standpunkte der idealen Bildung aus wurde dies Verlangen zurück gewiesen, wobei Thiers besonders seine Stimme erhob, auch vom rein praktischen, merkantilen Gesichtspunkte aus trat man für das Studium des Griechischen ein und sagte: Es sei keine so todte Sprache als man meine; das Altgriechische durchdringe mehr und mehr wieder das Neugriechische; die hellenische Nation habe noch eine grofse Zukunft im Osten und für den Handel sei bald das Griechische daselbst so notwendig, wie jetzt das Italienische.

Wie? In Deutschland, dem Vaterlande Schliemann's, der zuerst den Schauplatz der von Homer besungenen Kämpfe um die schöne Helena entdeckt hat, in Deutschland, das durch die von hier ausgegangenen Ausgrabungen zu Olympia das althellenische Heiligtum wieder enthüllt hat, wollte man, leichtfertiger als die leichtfertigen Franzosen, das Griechische abgethan wissen? Wo wäre denn ohne das Studium desselben unsere ganze klassische deutsche Literatur!? Nein, wer einmal die Reize der griechischen Sprache hat kennen lernen, der wird in ihrem Studium auch das Element aller höheren idealen Bildung gewahrt wissen wollen, der Sprache, die der geniale französische Dichter André Chénier voll Begeisterung und mit allem Recht genannt hat:

Ce langage sonore, aux douceurs souveraines,
Le plus beau qui soit né sur des lèvres humaines!

---

*) Kultur- und Litteraturgeschichte der französischen Schweiz und Savoyens. In ihrer selbständigen Entwicklung zum ersten Male dargestellt von Dr. Herman Semmig, ancien professeur agrégé de l'Université de France au Lycée d'Orléans (früher Oberlehrer an der h. Schule für Mädchen in Leipzig), Zürich 1882. Trübsche Buchhandlung (Th. Schröter). Verf. bemerkt hierzu brieflich: „Ich habe in diesem meinem Buche dagegen protestiert, dafs man Frau v. Staël eine „Französin“ nennt; sie war eine Genferin. Genf, damals noch selbständige Republik, erst 1815 in den Schweizer Bund aufgenommen, bildet aber doch einen Teil der französischen Schweiz, richtiger *Suisse romande*. Der Name „französische Schweiz“ ist erst später aufgekommen und bezieht sich nur auf die Sprache, hat aber keine politische oder nationale Bedeutung. Auch J. J. Rousseau war kein Franzose, er nannte sich selbst *„citoyen de Genève“*.“

Eine christliche Physik.*)

(Angezeigt von einem Lehrer der Naturw.)

Unter anderem schickt mir mein Buchhändler kürzlich eine eben erschienene „Einführung in das Gebiet der Physik von Dr. Morgenstern, Direktor der höheren Töchterschule in Göttingen" zur Ansicht, und da ich als Lehrer in diesem Gegenstande einen knappen Leitfaden wohl zu schätzen weiſs, machte ich mich daran, das vorliegende Büchlein genauer durchzusehen.

Ich bin für diese Mühe reichlich entschädigt worden, allerdings nicht ganz in dem Sinne wie ich erwartete, aber ich fand in dieser „Physik" so viel Scherzhaftes und Erheiterndes, daſs ich es einem jeden Freunde humoristischer Lektüre empfehlen kann.

Gleich der Anfang ist für den Ton dieser Physik charakteristisch:

„Im Anfang schuf Gott Himmel und Erde. Und die Erde war wüste und leer. So sollte sie aber nicht bleiben, sondern Gott hat sie zubereitet, daſs man darauf wohnen soll." So geht das über eine halbe Seite weiter und ebenso wird man im Weiteren alle Augenblicke aus dem Nachdenken physikalischer Forschung durch eine kleine Predigt des Herrn M. herausgerissen, welche zur Einleitung in die einzelnen Abschnitte dienen soll. Nur das „achte Stück" vom Magnetismus entbehrt dieses stimmungsvollen Schmuckes, was uns sehr bedauerlich erscheint. Sollte nicht vielleicht der Spruch: „Was ihr auf Erden binden werdet, soll auch im Himmel gebunden sein, und was ihr auf Erden löset, soll auch im Himmel los sein" hier zu verwerten gewesen sein? Er paſst zwar nicht genau, aber doch immerhin ebenso gut wie die anderen angeführten Bibelsprüche, und vielleicht läſst sich doch, da in dem Kapitel viel von „gebundenem und freiem" Magnetismus die Rede ist, ein Zusammenhang entdecken.**)

Auch im einzelnen ist so viel Erheiterndes zu finden, daſs ich mir nicht versagen kann, eine kleine Sammlung von Beispielen hier folgen zu lassen.

pag. 4. Eben ist der Satz abgeleitet: „Alle Dinge fallen, wenn sie die Stütze verlieren, senkrecht und gleich schnell zur Erde," da folgt die „Beschränkung: Lehrt dich die Erfahrung, daſs auch der Papierdrache, der Federball, die Schneeflocke in ihrem Fall diesen Sätzen entsprechen? Fallen sie mit einer solchen Schnelligkeit? Nein — Ihr Fall entspricht deshalb nicht unseren Gesetzen." Doch! Herr Dr., er entspricht denselben Gesetzen, sonst würden Sie überhaupt für jeden Körper ein besonderes Gesetz aufstellen müssen.

pag. 5. „Die Kraft, welche auf den Stein wirkt (es ist vorher von Steinwerfen und Wagenziehen gesprochen) unterscheidet sich wesentlich

---

*) Obgleich wir anfangs Bedenken trugen, diesen etwas satirisch angehauchten Artikel aufzunehmen — weil vielleicht die Hereinziehung des heiligen Buches der Bibel bei manchen theologisch gestimmten Lesern ds. Ztschr. Anstoſs erregen könnte — so haben wir uns schlieſslich doch zur Aufnahme entschlossen, weil der Artikel eine Warnung enthält, in den naturw. Unterricht die Religion, mehr als recht ist, hineinzuziehen, eine Ansicht, der auch Ellendt, ein hierin gewiſs strenger Richter, beistimmt (s. d. folgende Anm.). D. Red.

**) S. die Äuſserung von Ellendt (ds. Z., Heft 4, S. 240): „Dagegen ist es notwendig, daſs aller Unterricht vom Geiste des Christentums durchdrungen, erfüllt und geheiligt werde. Davon kann man allerdings die Mathematik ausnehmen, die aus andern Gründen, wiewohl in weiser (jetzt nicht vorhandener) Beschränkung, beibehalten werden muſs, einer solchen Durchdringung aber nicht fähig ist. Auch von den Naturwissenschaften gilt jene Forderung nur in einem sehr beschränkten Maſse. Diese als Darlegung der schöpferischen Herrlichkeit Gottes fassen zu sollen, ist zwar ein Modesteckenpferd sämtlicher Realisten. Allein sie würden sich höchst lächerlich machen, wenn sie z. B. die Mineralogie oder die Gesetze der Mechanik und Optik im Geiste frommer Betrachtungen behandeln wollten."

von der, welche auf den Wagen ausgeübt wird. Beide sind bewegende Kräfte, aber sie sind verschieden nach Art und Richtung."

Wenn die Richtung zweier Kräfte einen wesentlichen Unterschied ergeben soll, dann könnten wir eine schöne Sammlung „wesentlich" verschiedener Kräfte aufstellen, und das thut doch sonst keiner.

pag. 7 kommt die Entwerfung eines Planes für weitere Untersuchungen. Es heifst da im Anschlufs an die besprochene Anziehungskraft der Erde: „Sie wirkt anders auf den freibeweglichen Stein, als auf die von der Rollbahn abhängige Kugel; anders auf Körper, welche wie der geworfene Stein gleichzeitig noch von anderen Kräften abhängig sind, als auf solche, welche wie das Senkblei durch feste Stützen an der Bewegung gehindert werden."

Nein! Herr Dr., sie wirkt genau in derselben Weise auf alle diese Körper, nur die Erscheinungen, welche beim Zusammenwirken mit anderen Kräften auftreten, sind andere.

pag. 8. Was „wasserflüssige" Körper sind, hätte Herr M. wohl in einer Note auseinandersetzen können.

pag. 9. „Körper, welche bei geringer Masse einen grofsen Raum einnehmen (Seifenblasen, Schneeflocken, Federn, Kork, Schwamm, Federball, Papierdrache) können, da sie von der Luft mehr oder weniger getragen werden, als freifallende Dinge überhaupt nicht betrachtet werden."

Wo ist da die Grenze?

pag. 10. Als erstes Beispiel für das Zusammenwirken von Kräften die Wurfbewegung durchzunehmen, erscheint mir pädagogisch recht unbeholfen, es giebt doch so einfache Beispiele (Bewegung eines Schiffes durch Wind und Ruder u. dgl. m.), dafs man sich doch erst damit beschäftigen könnte. Davon ist aber nirgends die Rede, wahrscheinlich weil Herr M. den Abschnitt über das Parallelogramm der Kräfte, in dem diese einfachen Beispiele vorzukommen pflegen, weggelassen hat.

pag. 12. „Der Grund des verschiedenen Gewichtes gleich grofser Körper liegt in der Verschiedenheit der Dichte ihrer Masse, in der Verschiedenheit ihrer „Porosität".

Soll vielleicht Dichte der Masse und Verschiedenheit der „Porosität" sich decken?

pag. 20. Den Winkelhebel zuerst an Rollen klar machen zu wollen, ist doch so unpraktisch wie möglich.

pag. 21. Genial ist die Ableitung des Wellrades: „Wäre die Last für eine einfache Schnur zu schwer, so würden wir statt derselben ein Seil gebrauchen müssen. Da ein solches auf der einfachen Rolle nicht Platz findet, so mufs man statt derselben eine Welle anwenden."

pag. 25. „Zweites Stück. Und Gott sprach, es werde eine Veste zwischen den Wassern und Gott nannte die Veste Himmel." — — — — Daran wird angeknüpft: „Die Wasser über der Veste bilden den Wolkenhimmel, aus dem sie als segenspendender Regen zur Erde zurückkehren."

Was für eine Vorstellung sollen sich die Kinder bei diesem Unsinn machen? Wie dringen die Wasser durch die Veste zu uns, über welcher sie nach Herrn M.'s Ansicht sich befinden?

pag. 27. „Unter Mitwirkung einer seitlichen Stosskraft beschreibt das Wasser Bahnen, die den Wurfbahnen fester Körper ähnlich sind."

Nein! „gleich sind" mufs es heifsen; da ist gar kein Grund, einen Unterschied machen zu wollen.

pag. 34. Eine merkwürdige Gegenüberstellung ist folgende: „Das Gewicht eines Körpers, seine Schwere, ist eine ganz bestimmte Gröfse." (Die Abhängigkeit des Gewichts von den Breitengraden scheint Herrn M. unbekannt zu sein.) „Jeder Körper hat sein ihm eignes Gewicht." „Anders steht es um den Auftrieb. Derselbe wird gröfser, wenn wir den Körper tiefer ins Wasser drücken, wird geringer, wenn wir ihn weniger tief ins Wasser tauchen."

Abgesehen von der äufserst mifsverständlichen Ausdrucksweise des

letzten Satzes, der nur gilt, wenn der Körper noch nicht ganz eingetaucht ist, erinnert die Zusammenstellung an die berühmte: „Ein ewig blauer Himmel lacht über Italien und schöner Parmesankäse wird dort fabriziert."

pag. 85. Das Schweben im Wasser wird als ein seltner Fall bezeichnet, auf der folgenden Seite aber von dem Schweben der Fische gesprochen. Die sind doch so selten nicht.

pag. 37. Bei der sonstigen Beschränkung des Stoffes, scheint mir, daſs die „Branntweinwage" wohl hätte entbehrt werden können, besonders für höhere Töchter.

pag. 41 redet Herr M. von einer sehr feinen Wage, die wir uns „für wenige Pfennige herstellen können".

Wenn doch Herr M. lieber solche billige Wagen fabrizierte, statt Leitfäden der Physik zu schreiben.

pag. 48. „Luft ist in hohem Grade pressbar". Das sind alle anderen Körper auch, es fragt sich nur, ob sie sich beim Pressen auch zusammendrücken lassen, das Pressen allein thut's nicht.

pag. 54. Wenn Herr M. jemals den Luftdruck an einem Barometer abgelesen hätte, so würde er wissen, daſs nach dem Klopfen an der Röhre das Quecksilber immer eine Kuppe besitzt, als nicht „zu beachten ist, ob das Quecksilber dadurch oben eine Kuppe oder ein Näpfchen erhält."

pag. 61. Die Einleitung für das „fünfte Stück" vom Schalle bildet ein Sermon über „das faule Geschwätze oder böse Afterreden" und „die Stimme der lieben Eltern und Lehrer".

pag. 63. Die Schallsorte „simmern" ist mir noch nicht vorgestellt.

pag. 67 findet sich ein bedenklicher Irrtum. Es ist von dem Tönen von Stäben die Rede. Dazu wird als Beispiel angeführt „wenn wir bei windigem Wetter das Ohr an eine Telegraphenstange legen. Durch den Wind gerät sie in Schwingungen und wird Ursache unserer Tonempfindung".

Warum wohl nicht auch eine Fahnenstange? Sollten nicht die Drähte das Beste thun und die Stange den Schall bloſs leiten?

pag. 88. „Das farblose Sonnenlicht ist kein einfaches Licht, sondern es ist ein Gemisch von sieben Farbenlichtern (!), nämlich von den sieben Lichtfarben: rot, orange, grün, blau, indigo, violett."

Fatal! ich zähle nur sechs; wie mag wohl das siebente „Farbenlicht" aussehen?

pag. 94 wird von der Erdwärme gesprochen: „Wasser aus groſser Tiefe ist sogar heiſs; und wie es in noch gröſserer Tiefe der Erde aussehen mag, davon zeugen die feuerspeienden Berge."

Wie die Erdwärme zu erklären ist, davon sagt Herr M. nichts, vielleicht fürchtet er, dabei den Boden der Bibel zu weit verlassen zu müssen.

pag. 100. „Alle Körper erfahren durch Erwärmung eine Ausdehnung, durch Abkühlung eine Verdichtung."

Daſs Körper wie Kautschuk, Eis, Jodsilber u. s. w. davon eine Ausnahme machen, setzt Herr M. nicht hinzu, obgleich er es an anderer Stelle, wo er vom Gefrieren des Wassers redet, wodurch Sprengungen herbeigeführt werden könnten, durchaus nötig hat, wenn nicht eine einigermaſsen witzige unter seinen Schülerinnen ihn auf den Widerspruch aufmerksam machen soll.

pag. 113. Von jetzt ab wird die Sammlung wieder reichhaltiger, es beginnt die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität. Es wird ein natürlicher Magnet einer Stricknadel bis zur Berührung genähert, dann heiſst es: „Jedenfalls zeigt sie, wenn die magnetische Kraft dazu nicht ausreichen sollte, ihr eine entschiedene N S Stellung zu geben, eine mehr oder weniger starke Neigung, diese Stellung einzunehmen, was vor dem Streichen nicht der Fall war."

Es ist ja noch gar nicht gestrichen worden, Herr M.! Das kommt erst im folgenden:

„Die gewöhnliche und erfolgreichere Weise, Stahl magnetisch zu machen, besteht darin, daſs man es (ihn!) mit dem Magneten streicht."

pag. 115. Ob die Bezeichnung „Nordpol" und „Südpol" von „Polarität" herzuleiten ist, wie Herr M. meint und nicht umgekehrt, erscheint mir doch recht zweifelhaft.

Auf ganz neuen (cf. Vorwort VI) Forschungen dürfte folgender Versuch beruhen:

„Mittel zum Nachweis schwacher magnetischer Kraft" .... (Es ist vom weichen Eisen die Rede.) „Wir haben aber ein sehr feines Mittel, um zu erfahren, ob es überhaupt magnetische Kraft habe oder nicht. Ist es polarisch geworden, so muſs, wenn wir die Kompaſsnadel ihm nähern, eine Anziehung oder Abstoſsung erfolgen. Daſs jene ein sicheres Zeichen von magnetischer Kraft im Eisendraht sei, sagen wir nicht, wir wissen das aber von der Abstoſsung."

Derselbe Unsinn wird nachher in einem „Ergebniſs" noch einmal vorgeführt (pag. 121).

„Ein sicherer Beweiſs, daſs freie magnetische Kraft vorhanden sei, liegt nicht in der Anziehung, sondern vielmehr in der Abstoſsung."

pag. 117. Die eigentlichen Pole des Magnets „liegen, wie die Figur zeigt, nicht am äuſsersten Ende, sondern etwas gegen die Mitte hin".

Leider zeigt die Figur nichts, denn sie ist nicht da.

pag. 119. Ueberschrift: „Letzte Ursache der magnetischen Kraft." Jetzt kommt's, denkt man, aber

nascetur ridiculus mus,

es wird nur die Richtung der Magnetnadel durch die Erde erklärt.

pag. 121. Es wird zum Schluſs eine geistreiche Parallele zwischen den magnetischen und geistigen Kräften gezogen. Ich lasse Herrn M. reden:

„Durch Übung wird die geistige Kraft gestärkt, durch Trägheit geschwächt. Gerade so verhält es sich mit der magnetischen Kraft. Wenn das (sic!) Stahl rostet, so wird auch dadurch seine magnetische Kraft geschwächt. Wird wohl ebenso die geistige Kraft des Menschen geschwächt durch Rost? Weiſst Du auch, mein Kind, was für ein Rost das ist?"

pag. 127. Wie mag sich Herr M. ein „mit Siegellack geladenes Scheibchen" vorstellen?

pag. 133 bietet zu den anderen noch einige sprachliche Fehler. Zunächst prangt da in Überschrift

„Das (sic!) Elektrophor."

Ob Herr M. auch wohl „das Phosphor" sagt?

Dann kommt eine „mit Staniol überzogene Holzscheibe" (auch später immer so).

Das Zinn heiſst Stannum, Herr Direktor!

Dann wird mit einemmale von dem Firnis gesprochen, der den Deckel des Elektrophors überziehen und verhindern soll, daſs die Elektricität des Deckels sich mit der entgegengesetzten des Kuchens verbindet. Von diesem Firnis ist vorher bei der Beschreibung des E. gar nicht die Rede, er ist auch ganz überflüssig, denn die Trennung wird durch die dünne Luftschicht zwischen Deckel und Kuchen vollständig besorgt. Das scheint Herrn M. doch nicht ganz klar zu sein.

pag. 136 u. ff. bieten ein äuſserst interessantes Material über das Gewitter. Nachdem eine Erklärung gegeben ist, kommen Vorsichtsmaſsregeln. Da heiſst es unter anderem:

„Ein alter Volksspruch sagt:

Den Beter laſs beten,
Den Schläfer lass schlafen,
Den Fresser schlag tot.

Was ist davon zu halten?"

Schade, dafs Herr M. nicht selbst sagt, was er davon hält.

Ferner:

„Dafs bei sehr starkem Gewitter die in den Händen des Essers befindlichen metallenen Gegenstände Gefahr bringen können, läfst sich nicht leugnen. Aber auch abgesehen davon wird ein gesitteter Mensch bei Entfaltung so vieler Majestät und grofsartiger Herrlichkeit, wie solche im Gewitter offenbart wird, sich des Essens billig enthalten."

Wenn sich Herr M. doch auch über das Skatspielen ausgesprochen hätte!

pag. 146. „Durch den galvanischen Strom kann die freischwebende Magnetnadel nach Osten oder Westen abgelenkt werden. Ob dies oder jenes geschieht, das ist abhängig von der Richtung des + Stromes."

Nein, Herr M., das ist ganz unabhängig davon, es geschehen immer beide Ablenkungen zugleich; Sie haben vergessen, das Gesetz auf einen Pol der Nadel zu beziehen, wodurch es erst Sinn erhält.

pag. 151. Einen kolossalen Respekt hat Herr M. vor der elektrischen Telegraphie, so dafs er es für nötig hält, sogar das Morse-Alphabet in fetter Schrift vollständig abdrucken zu lassen (der Name Morse's wird jedoch nicht ein einziges Mal genannt); schliefslich bricht er in folgenden Hymnus aus:

„In der Telegraphie feiert der Mensch einen grofsen Triumph der Wissenschaft, seiner Herrschaft über die Materie und über die Kräfte der Erde; in ihr hat er ein wesentliches (!) Stück der Verheifsung erreicht, die Gott der Herr in das Wort legte:

Herrschet über die Erde und macht sie euch unterthan."

Damit sind wir am Ende; ich mufs mich anklagen, nachlässig gewesen zu sein in der Auswahl des Angeführten, ein aufmerksamer Leser wird leicht mehr derartiges finden. Es lohnt sich der Mühe, wie man sieht; also kaufen Sie und lesen, damit Herr Erhard Schultz, Buflebs Verlag (Jena und Leipzig) wenigstens auf diese Weise ein paar Exemplare dieser „Physik" los wird. Y.

Schülerausflüge zum Zwecke der Belehrung über die Bodenverhältnisse der Heimat.*)

Ein Vortrag, gehalten im Leipziger Lehrerverein nebst Nachbemerkungen des Herausgebers.

Motto: *Ne quid nimis!*

Bei Beginn des Wintersemesters 1886/87 sprach Herr Lehrer Helm in Leipzig über Behandlung der hiesigen Bodenverhältnisse in der Volksschule. In der Debatte über den anregenden Vortrag wurde auch der Schülerausflüge gedacht und der Herr Vortragende ersucht, auf Grund seiner reichen Erfahrungen auf diesem Gebiete, dem Vereine darüber zu berichten und den Entwurf eines Führers für Schülerausflüge zusammenzustellen.

Diesem Wunsche entsprach Herr Helm in der letzten Sitzung, indem er über dieses Thema sich eingehend verbreitete und die Anlage seines geplanten Werkes vorführte.

Mit Recht verlangt die Schule, dafs vor allem grofsstädtische Schüler fleifsig angehalten werden sollen zur Betrachtung heimatlicher Dinge und Erscheinungen. In den höheren Klassen mufs vielfach zurückgegriffen werden auf die Stoffe der Heimatskunde. Der Schüler vermag nur dann sich das weitere Vaterland und ferne Gegenden deutlich vorzustellen, wenn ihm die eigne Heimat mit allen Thalfurchen, Feldern, Wiesen, Ortschaften, Flufsläufen, Hügeln etc. genau bekannt ist. Die künstlichen Anschauungs-

*) Nach dem Leipziger Tageblatte (1887) No. 74, I. Beil.

mittel wie Karten, Modelle, Nachbildungen sind zwar sehr wertvoll, können aber nimmer die unmittelbare Anschauung der heimatlichen Landschaft ersetzen. In der Liebe zur Heimat wurzelt zugleich die Vaterlandsliebe. Da aber das Elternhaus allermeist nicht leisten kann, was die Schule nach dieser Seite fordern muſs und die Kinder ohne gründliche Anleitung die Umgegend durchstreifen, ohne die gewünschten Resultate zu gewinnen, so sind vom Lehrer geleitete Schülerausflüge als eine Notwendigkeit zu betrachten.

Am besten eignen sich dazu Mai, Juni und September, denn sie bieten meist klare Aussicht und sind nicht so drückend heiſs wie die eigentlichen Sommermonate. Für kleine Schüler ist es zu weit, wenn sie z. B. einen natürlichen Hügel oder Berg besuchen sollen und zu schwer, wenn ihnen die Leipziger Wasserleitung ordentlich erklärt werden soll. Darum müssen solche Ausflüge in den oberen Klassen und zwar wiederholt unternommen werden. Ein Ausflug mit der Klasse dürfte 5—6 Stunden erfordern, von welcher Zeit aber nur für eine Stunde die volle schulmäſsige Aufmerksamkeit zu fordern ist. Freilich muſs der Lehrer den Stoff ganz beherrschen. Es empfiehlt sich, den Weg mit den Kindern erst einmal im Geist zu unternehmen, eine kleine Zeichnung vom Terrain zu entwerfen und die Kinder mit den wichtigsten Beobachtungen vorher bekannt zu machen.

Für die Hand des Lehrers ist aber ein Führer erforderlich, denn nicht jeder findet Zeit, alle die Studien selbst zu machen. Die pädagogische Litteratur über diesen Stoff weist für Leipziger Verhältnisse sechs Werke auf. Drei davon behandeln nur einzelne Seiten der Heimat (Lungwitz, Niederley und Reuter); die anderen drei geben dagegen eine vollständige Heimatskunde (Rommel, Bulnheim und Leisner). Trotz dieser Werke ist also ein besonderer Führer notwendig, der das Bedingtsein der Bodenformen und Zustände mehr betont, von dem geologischen Aufbau eine genügende Darstellung giebt, alle die Dinge und Vorgänge zusammensucht, welche im Unterricht verwendet werden können, sie zusammenstellt zu Spaziergängen, die wieder auf einzelne Schuljahre zu verteilen sind.

Den Hauptteil des Entwurfes bilden 10 Spaziergänge. Einige Zusammenfassungen bilden einen Anhang. Bei Auswahl der Touren ist die äuſsere Bodengestalt zu Grunde gelegt. Die Gegend zwischen Borsdorf, Schladitz, Rückmarsdorf und der Harth ist eine nach Nordosten geneigte Ebene von circa 400 Quadratkilometer; sie wird durchschnitten von den Thalfurchen der Elster, Pleiſse, Parthe, der beiden Rietzschken und zeigt Bodenanschwellungen in der Hügelreihe von Rückmarsdorf, in der Hügelgruppe von Taucha und den Rücken von Liebertwolkwitz und Breitenfeld.

Der Herr Vortragende skizzierte das Bild dieser Ebene und gab die 10 Touren an.*) Es sind folgende: 1) Rechtes Gehänge des Elster-Pleiſsenthales zwischen der Wasserkunst und Gohlis. 2) Gang um die Promenade. 3) Linkes Gehänge des Elster-Pleiſsenthales zwischen Zschocher und Plagwitz. 4) Rechtes Gehänge zwischen Gohlis und Wahren. 5) Linkes Gehänge zwischen Plagwitz und Gundorf. 6) Parthethal bis Thekla. 7) Rückmarsdorfer Hügel. 8) Breitenfeld-Bienitz. 9) Connewitz, Probstheida, Mölkau (Terrassenland). 10) Knauthain, Lauer, Gautzsch, Markkleeberg.

In gründlicher und allseitiger Weise führte der Herr Redner der Versammlung den ersten Ausflug vor. Die Fülle von mineralogisch-geologischem, geographisch-geschichtlichem, naturwissenschaftlichem und technischem Material lieſs jeden erkennen, daſs solche Ausflüge oft wiederholt werden müssen, auch in verschiedenen Klassen, und daſs die darauf verwendete Zeit bei richtiger Ausführung reichen Segen bringen muſs.

Reicher Beifall und herzlicher Dank seitens des Herrn Vorsitzenden wurde dem Herrn Vortragenden gespendet.

---

*) Obgleich diese Angaben nur ein Lokalinteresse (für Leipzig) haben, so lassen wir sie doch der Vollständigkeit halber stehen. Die Red.

Die Drucklegung dieses Führers für Schülerausflüge wird jedoch noch einige Zeit auf sich warten lassen, da der erfahrene Verfasser den Sommer zu benutzen gedenkt, zu nochmaliger Erprobung der verschiedenen Touren. Dann aber wird das Werk wesentlich beitragen, die Einrichtung solcher Schülerausflüge allgemein in den hiesigen Volksschulen zu ermöglichen und zu fördern, die Wanderungen selbst aber nutzbringend zu gestalten.

W.

Bemerkung des Herausgebers hierzu.

Wenn wir auch den Nutzen dieser Ausflüge nicht in Abrede stellen wollen, so möchten wir doch glauben, dafs für die Volksschule das über die Bodenverhältnisse Wissenswerte schon bei den botanischen Exkursionen, deren doch auch sind, mit abgemacht werden könne.*) Wir fürchten, man geht in der Volksschule zu sehr ins Spezielle. Denn, was möchte man nicht noch Alles in den Unterricht bringen! Man möchte seitens der Volksschullehrer gern „ein bischen Universität spielen". Was sollen denn erst die Realschulen und Gymnasien thun? Am Ende macht man gar noch Ausflüge zur Geschichte und Altertumskunde! Oder meint man, die Leipziger Bürgerschüler wollten alle Landbauer, Schachtmeister oder Bergleute werden? Es gilt auch hier „Mafs zu halten ist gut etc." Also: Anschlufs an die botanischen Ausflüge!

Weit eher wären den Leipziger Volksschülern Ausflüge ins Land der guten Sitte, des Anstandes und bescheidenen Betragens 'auf Strafsen und öffentlichen Plätzen von nöten. Hierüber liefse sich viel sagen; da aber diese Zeitschrift kein Moralblatt ist, so begnügen wir uns einstweilen mit der in der Anm. zu dem Artikel „Zur Schuldisciplin" in ds. Hefte gegebenen Andeutung.

Zur Schuldisziplin.

Wir entnehmen den Schulnachrichten der Bremer Realschule am Doventhor (Dir. Buchenau) vom Schuljahr 1886/87 einen Auszug aus der Schulordnung (S. 17), den wir den Herren Schuldirektoren und Schulinspektoren, besonders aber den Privatschul-Leitern dringend empfehlen möchten. Da, besonders in Grofsstädten und Fabrikorten die Verrohung der Schul- und Strafsenjugend**) in erschreckender Weise überhand nimmt, so dürfte es dringend notwendig sein, dafs wenigstens innerhalb der Schule die Saiten der Disziplin so straff als nur möglich angespannt werden, damit der zunehmenden Verrohung und Amerikanisierung ein Gegengewicht geschaffen werde.

Wir selbst haben auch innerhalb der Schulen, besonders der Privatschulen, disziplinlose Zustände gefunden, bei deren Mitteilung jedem Pädagogen die Haare zu Berge stehen würden.***) Es beweist dies aber, wie wenig die Schulaufsicht sich um das Innere der Privatschulen bekümmert, in denen z. B. auch der Mangel an Lehrmitteln eine äufserst wunde Stelle ist.

§ 11. Auszug aus der Schulordnung. Für die geehrten Eltern dürfte es wohl von einigem Interesse sein, von nachstehenden Anordnungen Kenntnis zu erhalten, welche wir durch Anschlag in den Klassen und häufige Erinnerung den Schülern zur Kenntnis bringen und von ihnen pünktlich beachtet sehen wollen.

---

*) Das Nöthige hierzu findet man auf der Gäblerschen Karte, die wir in XVII, 460 sub III. No. 5 angezeigt haben. D. H.

**) Siehe einen diesbezüglichen Artikel in den „Grenzboten" (1887, Nr. 10) und ein „Eingesandt" im „Leipziger Tageblatt" (1887, Nr. 119, III. B.). D. H.

***) Das „non plus ultra" hierin war eine der Hamburger Privatschulen, über die wir uns überhaupt in dieser Zeitschrift noch einmal verbreiten werden. D. H.

1. Jedem Schüler der Realschule wird ein gesittetes und höfliches Betragen in und außerhalb derselben, namentlich auf dem Schulwege, zur Pflicht gemacht. Er hat jeden Lehrer der Anstalt ehrerbietig zu grüßen.
2. Das Gebiet der Schule darf nicht eher betreten werden, als bis das hierzu bestimmte Zeichen mit der Glocke (in der Regel 5 Minuten vor dem Glockenschlage) gegeben ist.
3. Jeder Schüler hat beim Betreten des Gebäudes die Füße gehörig zu reinigen. Er hängt Mütze und Überrock an den dafür bestimmten Haken und begiebt sich hierauf unverzüglich an seinen Platz, den er ohne besondere Erlaubnis nicht verlassen darf. — Shawls, Gummischuhe und Pulswärmer werden ebenfalls abgelegt und die ersteren auf dem Hausgange untergebracht.
4. Jedes Heraufnehmen von Heften oder Federn vor Beginn des Unterrichts ist verboten.
5. Jeder Schüler hat auf Reinhaltung seines Platzes zu achten und ist dafür zunächst verantwortlich.
6. Jeder Schüler ist dafür verantwortlich, daß die Klappe über seinem Tintenfasse beim Schlusse des Unterrichts stets geschlossen wird. Das Öffnen der Klappen vor Beginn des Unterrichts ist verboten.
7. Das Einschneiden und Einritzen in die Tische und Bänke, sowie andere Beschädigungen des Schuleigentums sind verboten; der Thäter ist zum Schadenersatze verpflichtet; wird er nicht ermittelt, so ist die Klasse verantwortlich.
8. Vor jeder Stunde und während der Freizeiten führt ein von dem Herrn Klassenhauptlehrer ernannter Schüler die Aufsicht. Derselbe hat sich pünktlich mit dem ersten Glockenzeichen einzufinden, so daß er möglichst als Erster die Klasse betritt. Nach Schluß der Schule hat derselbe als Letzter die Klasse zu verlassen, darauf zu achten, daß in derselben alles in Ordnung ist und die Thüre in die Klinke zu drücken. Er ist vor und zwischen den Unterrichtsstunden, während der Abwesenheit eines Lehrers, für die Ordnung verantwortlich.*)
9. Zur Aufsicht über den Klassenschrank, die Wandtafel und die Schlüssel, sowie zum Vorlegen der Bücher und zur Besorgung des Nachsitzbuches in die Nachsitzklasse werden von dem Herrn Klassenhauptlehrer Schüler ernannt, von denen eine sorgfältige Wahrnehmung der ihnen übertragenen Ehrenämter erwartet wird.
10. Jedem Schüler, dem ein Ehrenamt übertragen ist, ist in allen darauf bezüglichen Anordnungen Folge zu leisten.
11. Während der dazu bestimmten Freizeiten gehen alle Schüler, mit Ausnahme des Klassenaufsehers und solcher, die Erlaubnis erhalten haben, in der Klasse zu bleiben, auf den Schulhof. Für diese Freizeiten wird ein Glockenzeichen mit der großen Glocke gegeben.
12. Bei schlechtem Wetter gehen die Schüler während der Freizeiten nicht auf den Schulhof, sondern bleiben in den Hausgängen. Das Zeichen dazu wird mit den elektrischen Läutewerken gegeben.
13. Organisierte Spiele, wildes Umherlaufen und lautes Schreien sind auf dem Schulhofe und in den Hausgängen verboten.
14. Erhält ein Schüler von einem Lehrer aus einem besonderen Grunde die Erlaubnis, in der Klasse zu bleiben, so gilt diese Erlaubnis stets nur für die betreffende Freizeit, wenn nicht vom Lehrer ausdrücklich das Gegenteil bemerkt worden ist.
15. Es ist den Schülern verboten, während der Freizeit den Schulhof ohne besondere Erlaubnis zu verlassen.
16. Alle Bücher und Hefte müssen sauber und gut gehalten werden

*) In den meisten Schulen ist das doch wohl die Pflicht des „Primus"? D. Red.

und unterliegen der Beaufsichtigung der Lehrer. Dies gilt namentlich auch von den Tagebüchern, welche aufserdem vor der Gebrauchnahme zusammen mit dem vollgeschriebenen Hefte und vorschriftsmäfsig eingerichtet (d. h. mit Namen versehen und im Aufgabenteile nach Tagen geordnet) dem Herrn Klassenhauptlehrer vorgelegt werden müssen.

17. Auch die Nachsitzscheine müssen gut und sauber gehalten werden. Sie sind im Tagebuche aufzubewahren und dürfen höchstens einmal geknickt werden. Ihre Rücklieferung hat spätestens am Tage nach dem Empfange zu erfolgen.
18. Kein Schüler darf unter irgend einem Vorwande eine Gasflamme auslöschen.

Ein Abenteuer eines grofsen Naturforschers bei den Trödlern Berlins.*)

Im Bezug auf den Mühlendamm in Berlin, dessen „nahes Ende" zu erwarten ist, wird vom „Kl. I." eine kleine Geschichte mitgeteilt, deren Held kein Geringerer als Alexander v. Humboldt gewesen ist. An einem rauhen Oktobernachmittag des Jahres 184 . spazierte derselbe, vom Spittelmarkt kommend, durch das Reich der alten Kleider und hatte sich dabei, wohl seines unscheinbaren Äufseren wegen, von seiten der geschäftslustigen Trödler ganz besonderer Aufmerksamkeit zu erfreuen. „Papachen, wie steht's mit 'nem Winterrock? Kommen Sie rein! Det reine Eisentuch", tönte es von der einen; „hier, alter Herr, ein schöner mottenfreier Pelz, erst einen Winter getragen, pafst Ihnen wie angegossen", von der anderen Seite. In Gedanken versunken, hatte er die Anpreisungen vollständig überhört. Da fühlte er sich plötzlich am Rocke festgehalten und sah sich, als er aufblickte, einem besonders eifrigen Geschäftsmann gegenüber, der ihm mit grofser Beredsamkeit eine grüne Sammetweste zum Kauf anbot. Kopfschüttelnd wollte er weiter gehen, als er unter dem im Schaufenster aufgestapelten Kram zwei lange, mit Perlmutter ausgelegte Reiterpistolen bemerkte, die bei näherer Besichtigung durch ihre altertümliche, kunstvolle Arbeit sein Interesse erregten. Willens, sie seiner Waffensammlung in Tegel einzuverleiben, fragte er nach ihrem Preise. „Was werden Se geben für die schöne Pistölchen?" war die Antwort. „Sagen wir 10 Thaler! Will ich mal ausnahmsweise nichts dran verdienen. 9 Thaler haben sie mir selbst gekostet; Reparaturkosten und Zinsen dazu gerechnet, machts gerade 10 Thaler." Humboldt legte zwei Friedrichs'dor auf den Ladentisch, liefs sich den Rest herausgeben, ergriff das in Papier eingeschlagene Päcktchen und entfernte sich in der Richtung nach der Spandauer Strafse, um durch dieselbe über den Haakschen Markt in seine in der Oranienburger Strafse liegende Wohnung zurückzukehren. Unterwegs warf er zufällig einen Blick auf das zum Einpacken benutzte Papier und machte dabei die interessante Entdeckung, dafs es ein Blatt aus einem alten „Kräuterbuche" war. Die in Gestalt grofser Folianten von Ärzten und Naturforschern im Mittelalter herausgegebenen sogenannten Kräuterbücher sind insofern von grofsem Werte, als sie über den damaligen Zustand der botanischen Wissenschaft, über die Anwendung der Pflanzen im menschlichen Haushalt, in der Technik, Medizin etc. Aufschlufs geben. Man wird es erklärlich finden, dafs der grofse Naturforscher und Gelehrte sofort umkehrte, um die Überreste des wertvollen Werkes vor dem Untergange zu bewahren. Bei der Ähnlichkeit der einzelnen Läden war er aber jetzt nicht mehr imstande, den richtigen herauszufinden. Wo er auch fragte, ob man ihm die Pistolen verkauft hätte, erhielt er ein kurzes

*) Abdruck aus dem Leipziger Tageblatt. Nr. 221 (1886).

„Nein“ zur Antwort. Sehr natürlich! Denn man hielt ihn für einen Reingefallenen, der den Kauf rückgängig machen wollte, und verriet den Verkäufer schon aus „Corpsgeist“ nicht. Schliefslich kam er auf einen listigen Ausweg und sagte zu dem ihm zunächst Stehenden: „Schade, dafs ich den Mann nicht finden kann. Ich wollte ihm nur einen Thaler zurückliefern, den er mir vorhin zu viel herausgegeben hat.“ — „Kommen Se 'rein, hier bei mir haben Sie gekauft“, erscholl es sofort von allen Seiten. Aus allen Läden stürtzten die Antiquare hervor, zwanzig Hände auf einmal fafsten und zerrten an seinem Rocke, ein wahrer Höllenlärm umtobte ihn. In dieser Bedrängnis erhob er drohend die Pistolen. Im Nu stob die Schar auseinander. Nur einer blieb verschmitzt lächelnd stehen und meinte: „Sind se doch nicht geladen, Papachen! Stecken Se die Donnerbüchsen ein und geben Sie mir meinen Thaler!“ Der wirkliche Verkäufer war gefunden. Humboldt folgte ihm in sein dunkles Gewölbe und verlangte hastig, das alte Buch zu sehen, aus welchem das Blatt herausgerissen sein mufste. Bei näherer Besichtigung stellte sich heraus, dafs der in Schweinsleder gebundene Foliant, den der Trödler mit anderm alten Kram auf einer Auktion gekauft hatte, mit Ausnahme weniger am Ende herausgerissener Blätter wohlerhalten war und zu den seltensten seiner Art gehörte. Gefragt, was er dafür haben wollte, dachte der Geschäftsmann eine Zeit lang nach, nahm dann eine Hose mit eingesetztem Boden vom Riegel und antwortete: „Geben Sie 4 Thaler und die schöne Hose kriegen Sie zu. Mit der können Sie noch Sonntags Staat machen!“ Das Geschäft kam auf dieser Basis zu stande, jedoch verzichtete Humboldt auf die Zugabe. Wenn der greise Gelehrte später einem vertrauten Freunde seine Bücherschätze zeigte, verfehlte er niemals die Ankaufsgeschichte des Kräuterbuches mitzuteilen, welche mit den Worten zu schliefsen pflegte: „Am meisten hat mich die Bemerkung amüsiert: „Mit der können Sie noch Sonntags Staat machen!“

Hohe Lebensalter.

Gelegentlich der Feier des 90. Geburtstages Sr. Majestät des deutschen Kaisers hat man auch statistische Zusammenstellungen der höchsten Lebensalter von 90 Jahren an gemacht. Eine solche der Stat. Korresp. entnommene Tabelle findet sich für das Königreich Preufsen in Nr. 88 des Leipz. Tagblattes Beil. IV (29. III. 1887) unter dem Titel „Personen im Alter von 90 Jahren und darüber in Preufsen“ und zwar nach Provinzen geordnet. Wir entnehmen dieser Zusammenstellung folgende Ergebnisse: Es wurden gezählt i. J. 1885 (1. Decbr.):

	90—95 J.	95—100 J.	über 100 J.
männliche Personen	1703	306	72 (davon 27 über 105 J.)
weibliche „	2766	641	160 (davon 45 „ „ „)
also in Summa:	4469	947	232 Personen.

Ein interessantes mathematisches Aufgabenbuch aus dem vorigen Jahrhundert nebst einem darauf bezüglichen neuen Preisausschreiben.

Der mathematische Verein „Mathesis“ in Valdivia (Chile) hatte schon längst beabsichtigt, ein Büchlein, welches im Jahre 1790 zuerst erschienen ist und durch die mit seltenem Scharfsinn ersonnenen sechs mathematischen Probleme unter dem Titel „Gerichte“ s. Z. in weiteren Kreisen Aufsehen

erregte — neu aufzulegen. Die Neuherausgabe des Büchleins sollte geschehen in Anlafs der für das Jahr 1888 bevorstehenden hundertjährigen Jubelfeier des Lehrerseminars in Tondern zu Ehren des Stifters Balthasar Petersen, wie auch zur Erinnerung an den Mathematiker Jakob Jakobsen, einen der ersten Zöglinge Petersens. — Es sollte klargestellt werden, wie in dem verfallenen Schulhause zu Tinnum auf Sylt ein mathematisches Genie vergraben gewesen ist, das am rechten Orte der Wissenschaft hätte erhebliche Dienste leisten können.

Das kleine Büchlein liegt jetzt im Neudruck vor im Verlage des Buchhändlers Aug. Westphalen in Flensburg, portofrei gegen Einsendung von 1 Mark. Der Reinertrag ist für das Denkmal B. Petersens bestimmt. —

Für Freunde und Liebhaber der Mathematik dürfte es von Interesse sein, zu erfahren, dafs die 6 mathematischen Probleme von dem Verein „Mathesis" als „Preisaufgaben" ausgeschrieben und ihre Lösungen mit nachstehenden Preisen bedacht werden:

Preisausschreiben.

1) Für die erste vollständige Lösung aller sechs Gerichte: ein Fafs besten in Chile gewachsenen Portweins.
2) Für die erste vollständige Lösung der einzelnen Gerichte:
   a. erstes Gericht: 1 Fafs Tischwein (*Chacolé*);
   b. zweites „ 3 Stück Fischotterfelle (*Huillin*);
   c. drittes „ 1 Fafs Rotwein (*Concepcion*);
   d. viertes „ 1 Fafs Weifswein (*Coyanco*);
   e. fünftes „ 1 Löwenfell (*Puma*);
   f. sechstes „ 1 Fafs Weifswein (*Muscatel*).

Obige Preise werden demjenigen Rechner frei bis Hamburg von den Unterzeichneten zugesendet, der die erste richtige Lösung eines oder mehrerer der sechs Gerichte liefert. Jedoch finden die Lösungen nur dann Berücksichtigung, wenn sie bis zum 1. September 1888 einlaufen. Es sind dieselben an einen der Unterzeichneten zu richten.

Valdivia, den 4. Februar 1887.

Johann Frey, Redakteur der „Deutschen Zeitung".
Adolf Heinze, Professor am Lyceum.
Peter Sönksen, Lehrer an der deutschen Schule.

NB. Wir haben dieser Mitteilung hinzuzufügen, dafs uns die Lektüre des Büchelchens wegen der Form, in welche die Aufgaben eingekleidet sind, viel Vergnügen gemacht hat. Ueber den Wert und die mögliche Verwendbarkeit der Aufgaben werden wir einen Berichterstatter sprechen lassen. D. Red.

Zur Programmschau.

Einladung zur Unterstützung und Aufrechthaltung einer nützlichen Abteilung dieser Zeitschrift.

Vom Herausgeber.

Bezüglich unserer Bekanntmachung über die Beibehaltung der Programmschau in Heft 3, S. 217 erhielten wir von einem Mitarbeiter folgende Zuschrift: „Ihren Äufserungen bezüglich der Fortsetzung der Programmschau kann ich nur beistimmen. Die Referenten haben den Weizen von der Spreu zu sondern; die gediegenen Arbeiten verdienen in der Zeitschrift als solche hervorgehoben zu werden, damit sie thatsächlich von denen gelesen werden, für die sie geschrieben sind. Dafs viele Programmabhand-

lungen ungelesen beiseite gelegt werden, ist wohl allgemein zugestanden; ja es ist so weit gekommen, dafs ein Verfasser eines solchen Programms nicht ansteht, diesen Gedanken an die Spitzē seiner Arbeit zu stellen. Die 1887 erschienene Programmarbeit eines Gymnasiums der Prov. Sachsen [Burg] beginnt: 'Bekanntlich ist es das Schicksal der Programmabhandlungen: nicht gelesen zu werden. Es steht nicht zu befürchten, dafs die vorliegende eine Ausnahme von der Regel machen wird. Sollte aber dennoch der eine oder andere diese Zeilen seiner Aufmerksamkeit würdigen, so bittet der Verfasser gütigst berücksichtigen zu wollen, dafs er mehr dem Zwang gehorchend als dem eignen Trieb die Feder in die Hand nahm .... (es folgt die Aufzählung der Schwierigkeiten in einer [kleinen] Provinzialstadt mit Bezug auf die geringfügigen Bibliotheken etc.) .... Alle diese Schwierigkeiten bittet der Verfasser bei Beurteilung seiner Arbeit freundlichst berücksichtigen zu wollen, falls überhaupt dieselbe einen Leser finden sollte.' Was sagen Sie dazu?"

Was wir dazu sagen? Je nun, der Verfasser des erwähnten Programms hat recht und wir haben uns herzlich gefreut, dafs ein Programmschreiber einmal den Mut gehabt hat, die Wahrheit gerade herauszusagen. Giebt es denn auf der Welt einen gebildeten Menschen, der seine Ideen dem Papier übergiebt, damit sie hinter Bibliotheks- oder Klostermauern verschimmeln? Oder werden etwa die Programme von den Schülern und den (oft überaus „gebildeten") Eltern gelesen? Wissenschaftliche Programmbeilagen zu den Schulnachrichten (die natürlich jährlich erscheinen müssen) sollten nur aller 5, höschstens aller 3 Jahre gegeben werden. Dann aber wären die Programmarbeiten wie Preisaufgaben zu behandeln (Preis mindestens 50 Thaler = 150 Mark aus der Kultusministerialkasse zu zahlen. Preisrichter 3 Fachleute: ein Universitätsprofessor, ein Schulrat und ein Rektor). Dann würden wir Arbeiten bekommen, die nicht ungelesen blieben, und es würden sich nicht so viele Makulaturstöfse in den Bibliotheken auftürmen! Aber auch schon die Besprechung in einer Zeitschrift wie die unsrige u. a. kann zur Beseitigung, wenigstens zur Milderung des schwer empfundenen Übelstandes beitragen und darum erlauben wir uns, die erneute Bitte an die Herren Fachgenossen zu richten: sie wollen sich in denjenigen Landesteilen Deutschlands, für die sich Programmberichter noch nicht gefunden haben, vereinigen, um einen solchen für ihr Land zu wählen.*) Die Arbeit liefse sich ja so teilen, dafs der eine die mathematischen, der andere die naturwissenschaftlichen, der dritte die rein pädagogischen Programme bespräche.

Wir machen daher im Folgenden die Landesteile mit Programmreferenten und ohne solche namhaft. Leider sind der letzteren nicht wenige und es ist zu bedauern, dafs in einem Zeitraum von ca. 18 Jahren, während dessen diese Zeitschrift besteht, sich nicht mehr Männer gefunden haben, welche aus Liebe zur Sache dieser zwar schwierigen und undankbaren, gleichwohl aber sehr verdienstlichen Arbeit sich unterzogen haben. Dies wundert uns um so mehr, als für eine andere Abteilung der Zeitschrift — das Aufgaben-Repertorium —, das doch gewifs auch nicht wenig Mühe macht, sich ein Eifer und ein Fleifs entwickelt hat, den wir sogar bisweilen mit der Arbeitslast des Lehrerberufs nicht in Einklang zu bringen vermögen. Um so mehr sind wir, und mit uns gewifs die Leser

*) Es hängt dies freilich zusammen mit einer andern sehr wünschenswerten Einrichtung: mit einer engeren Vereinigung der Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften, die sich bis jetzt an die Naturforscher oder an die Philologen angeschlossen haben, nun aber bei ihrem numerischen Wachstum für eigene Versammlungen oder Kongresse geeignet sein dürften — ein Projekt, das wir in dieser Zeitschrift schon einmal ausgesprochen haben, das aber, wie es scheint, noch lange ein „frommer Wunsch" bleiben soll.

dieser Zeitschrift, den Herren zu Danke verpflichtet, die schon so lange und so beständig diese schwierige Arbeit übernommen haben. Leider sind einige dieser Herren von der Übernahme der Arbeit zurückgetreten oder sind im Begriffe dies zu thun, nicht aus Abneigung oder Unlust, sondern weil sie entweder die Stellung oder den Wohnort oder beides wechselten; umsomehr bedürfen wir neuer Kräfte, damit diese nützliche Abteilung dieser Zeitschrift nicht brach liegen bleibe.

Übersicht der deutschen Landesteile nebst deren Programm-Referenten.

Landesteil	Referent
Königr. Preufsen Prov. Brandenburg	Rektor Dr. Weisker-Rathenow (zuletzt 1879). Im Falle des Rücktritts hat sich Hr. Stegemann-Prenzlau erboten.
- Pommern	. . . .
- Ostpreufsen - Westpreufsen - Posen - Schlesien	Rektor Dr. Meyer-Freiburg i/Schl.
- Sachsen	. . . .
- Schleswig-Holstein	. . . .
- Hannover mit Oldenburg und Bremen	sonst Dr. Wolkenhauer-Bremen (s. 1877 in IX).
- Westfalen	einmal in XIII von Prof. Reidt-Hamm besorgt. Erboten hat sich Hr. Oberl. Schlegel i. Hagen.
- Hessen-Nassau	Dr. Ackermann-Cassel.
Rheinprovinz	sonst Dir. Dr. Dronke (Trier).
Baiern	Dr. Schumacher-Schweinfurt (an Prof. Günthers Stelle).
Württemberg	Dr. Böklen in Reutlingen.
Baden	sonst Prof. Koch-Freiburg (s. Bd. X).
Rheinhessen	hierzu hat sich erboten für die mathematischen Dr. Hahn in Worms.
Reichslande	. . . .
Thüringische Staaten	Erboten hat sich ein Herr Dr. P. in Meiningen, jedoch nur für geogr. und naturgesch. Programme.
Mecklenburg	sonst von Dr. Schlegel besorgt. Derselbe will sie auch, so lange sich niemand findet, fortsetzen.
Königr. Sachsen	sonst von Prof. Dr. Meutzner-Meifsen besorgt.

Antwortkasten.

Heft 2. No. 39. (Archim. Prinz. betr.) Der Satz, dafs ein Gefäfs mit Wasser soviel an Gewicht zunimmt, als die durch einen eingetauchten Körper verdrängte Wassermenge wiegt, läfst eine sehr hübsche Anwendung auf die Bestimmung der spezifischen Gewichte von Körpern zu, welche leichter als Wasser sind, z. B. Kork, Bimstein etc. Zur Seite der Wagschale, auf welcher das Gefäfs mit Wasser tariert ist, befestigt man mittels

eines dünnen Messingdrahtes den Kork, so daſs er in die Flüssigkeit vollständig eingetaucht wird, ohne das Gefäſs zu berühren, und bestimmt die Gewichtszunahme. (Methode von Raimondi, Schlöm. Zeitschr. f. Math. u. Phys. II, S. 340). Matthiessen (Rostock).

Bei der Redaktion eingelaufen.

(Juni.)

Lauteschläger-Graefe, Beispiele und Aufgaben zur Algebra für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen und zum Selbstunterricht. 12. verb. Aufl. Darmstadt, Bergsträſser 1887.

Bardey, Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. 1. T. (Aufgaben mit einer Unbekannten). Leipzig, Teubner 1887.

Erler, Elemente der Kegelschnitte. 3. Aufl. Leipzig, Teubner 1887.

Jacobsen, Jacob (Schullehrer zu Tinnum auf Sylt) Freundschaftliche Bewirthung meiner mathematischen Brüder mit einem Traktement von sechs Gerichten oder: Curieuse mathematische Aufgaben. Schleswig 1790. Neu herausgegeben als Festgabe zum hundertjährigen Jubiläum des Seminars zu Tondern von dem mathematischen Verein „Mathesis" in Valdivia 1887. Flensburg, Westphalen 1887.

Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik mit einem Anhange: das absolute Maſs-System. Sechste vermehrte Aufl. Leipzig, Teubner 1887.

Münch, Die elektrodyn. und dynamoelektr. Maschine mit Ringanker behandelt für den Physikunterricht an h. Lehranst. (Progr.-Beil. R.-Sch. Wimpfen.)

Erdmann, Geschichte der Entwickelung und Methodik der biologischen Naturwissenschaften (Zoologie und Botanik). Cassel und Berlin 1887. Th. Fischer.

Leonhard, Die Einheitsschule. Ein Versuch, die Möglichkeit einer einheitlichen Gestaltung unserer höheren Lehranstalten darzulegen. Grünberg i. Schl., Weis Nachf. 1887.

Berichte des freien deutschen Hochstifts in Frankf. a/M. III, 2.

Zeitschriften: Paed. Archiv: XXIX, 4. C.-O. XV, 21—22. — Zeitschr. f. R.-W. XII, 5—6. — Zeitschr. f. Schul-Geogr. VIII, 8—9.

Briefkasten.

(Alphabetisch geordnet.)

Dr. i. Tr. Synthetischer Bew. zu einem Satze über d. E. — **L. i. A.** (O.-Pr.) Methode des algebr. Divisionsverfahrens. — **M. i. F.** Bildliche Darstellung arithm. Verhältnisse. — **M. i. H.** Für oder wider Sturm? (Da der Art. der vielbesprochenen Sache eine neue Seite abgewinnt, so soll er noch Aufnahme finden). — **M. i. L.** Bem. zu einer Lös. des A.-R. (ad 627). — **N. i. Z.** Ein Sophisma des Ital. M. — **P. i. A.** Über d. Vergl. von Verhältnissen etc. — **S. i. St.** Zur Ehrenrettung des Satzes vom Parallelogramm der Rotationen. — **V. i. B.** Elementare Herleitung des Newtonschen Anziehungsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen. — **W. i. Fr.** Erhalten. Danke! Einführung des Dec.-Syst. in England?

NB. Wir bitten diejenigen Herren, welche uns Beiträge einsenden, auch um Angabe ihrer Wohnungsadresse.

Über die Körper, deren Schnittflächen parallel zu einer Ebene quadratische Funktionen ihres Abstandes sind.

Ein Beitrag zu einem natürlichen System der stereometrischen Körper.

Von Prof. WEINMEISTER in Tharand.

(Schluß.)

Mit einer Tafel (Fig. 10—27).

E. Anwendung auf die ebenflächigen Körper.

Offenbar gehören die Prismen zu den $\mathfrak{K}_c$ und die Pyramiden zu den $\mathfrak{K}_k$. Der einfachste Körper der $\mathfrak{K}_p$ wird erhalten, wenn man die eine Seitenfläche eines dreiseitigen Prismas als Grundfläche betrachtet und die Gegenkante als Schneide, denn es verhält sich dann (Fig. 2, wenn man h fortläßt, x durch h, x' durch x und k durch f ersetzt) der Schnitt f zur Grundfläche g wie $x : h$, so daß $f = \frac{g}{h} \cdot x$. So aufgefaßt führe das Prisma den Namen Keil. Die Schnittflächen dieser drei Körper stellen sich daher in der Form $\alpha, \gamma x^2, \beta x$ dar. Setzt man nun einen Körper aus gleichhohen Prismen, Keilen und Pyramiden zusammen, so muß dessen Schnittfläche die Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ annehmen und er daher zu den $\mathfrak{K}_n$ gehören.

Man wähle z. B. als Kern eines solchen Körpers ein Prisma und lege um eine seiner Grundflächen in deren erweiterter Ebene ein Vieleck, dessen Seiten den Grundkanten parallel sind. (Fig. 10 Taf. II). Den so entstandenen Flächenring zerlege man zunächst in Trapeze und dann ein jedes Trapez in ein Parallelogramm und ein Dreieck. Man kann nun mit Vermeidung neuer Ecken über jedem Parallelogramm einen Keil und über jedem Dreieck eine Pyramide errichten. Auf diese Weise entsteht ein Obelisk, in welchem α die Grundfläche des Prismas, β die Summe der Parallelogramme dividiert durch die Höhe und γ die Summe der Dreiecke dividiert durch das Quadrat der Höhe ist.

Dieser Körper ist sonach ein $\mathfrak{R}_k$, $\mathfrak{R}_h$ oder $\mathfrak{R}_{hk}$. Geht man umgekehrt von einem Obelisk aus, so wird man ihn in derselben Weise zerlegen können, sobald eine Parallelprojektion der kleineren Grundfläche völlig in die gröfsere fällt. Ist dies nicht der Fall, so gebe man den ganz aufser der Grundfläche liegenden Keilen und Pyramiden negative Vorzeichen, wodurch auch β und γ das Zeichen ändern können. Sonach lassen sich von den Obelisken hinsichtlich des Grades, in welchem der Körper anschwillt oder einschrumpft, sechs verschiedene Arten unterscheiden. Man kann den Obelisk auch so entstehen lassen, dafs man statt des prismatischen einen pyramidalen Kern wählt (Fig. 11). Zeichnet man nämlich um die Grundfläche einer Pyramide in deren erweiterter Ebene ein Vieleck mit parallelen Seiten und zerlegt wieder den Flächenring in Dreiecke und Parallelogramme, so kann man über jedem Dreieck ein Prisma errichten, welches mit der Pyramide in einer Seitenkante und der Höhe übereinstimmt. Hierauf fülle man die vorhandenen Lücken mit Vermeidung neuer Ecken (und, wenn Parallelogramm und Dreieck immer abwechseln, auch neuer Kanten) durch über den Parallelogrammen stehende Keile aus. In den Figuren 12 und 13 sind die Schnittfiguren eines Obelisken so gezeichnet, wie sie diesen beiden Entstehungsweisen entsprechen. Wächst der Abstand x der Figur, so bleiben die punktierten Flächen a', b', c', d' ungeändert, die einfach gestrichelten wachsen im selben Verhältnis wie x, und die doppelt gestrichelten a, b, c, d im quadratischen Verhältnis. Die letztere Entstehungsweise hat den Vorzug, dafs die γ bestimmenden Flächenstücke im innern Vieleck vereinigt sind, so dafs der pyramidale Kern der oben mit E bezeichnete Ergänzungskörper ist.

Erweitert man den Obelisk durch Verlängerung seiner Seitenkanten, so tritt eine Veränderung seiner Gestalt ein, sobald sich zwei benachbarte Seitenkanten schneiden. Jede Schnittfigur, welche jenseit einer solchen Stelle liegt, hat einen sich selbst schneidenden Umfang, und es mufs bei der Bestimmung ihres Inhaltes zwischen positiven und negativen Flächenteilen unterschieden werden. Sind beide, absolut genommen, einander gleich, so erhält man eine Nullfläche, welche weder Punkt

noch Schneide ist. Als Beispiel wählen wir einen dreiseitigen Pyramidenstumpf $ABCDEF$ (Fig. 14) und legen die Anfangsebene durch das begrenzende Trapez $BCEF$. Der zwischen diesem und dem parallelen Dreieck AGH liegende Obelisk ist leicht als $\mathfrak{K}_p$ zu erkennen. (Siehe die punktierten Linien). Man verlängere nun die Seitenkanten und lege durch D den Parallelschnitt $DB'C'$. Derselbe ist kongruent dem Dreieck AGH, aber negativ. Zwischen beiden liegen Trapeze mit sich selbst schneidenden Umfängen, und zwar ist das durch die Mitte von AD die Nullfläche des Körpers.

Es kann der Fall eintreten, dafs sich die Schnittpunkte der Seitenkanten eines Obelisken auf zwei der Anfangsebene parallel gelegene Ebenen verteilen, so dafs in jeder Ecke der beiden Schnittfiguren wenigstens zwei Seitenkanten zusammentreffen. Dann hat die zwischen diesen Ebenen gelegene Schicht nur Dreiecke zu Seitenflächen und ist ein Prismatoid. Sonach ist das Prismatoid eine besondere Art Obelisk. Man kann auch umgekehrt vom Prismatoid ausgehen; da jede Schicht desselben ein Obelisk ist, und die Schicht immer allgemeiner, als der ganze Körper ist, so mufs auch der Obelisk allgemeiner, als das Prismatoid sein. Gewöhnlich nimmt man einen ganz anderen Standpunkt ein und fafst den Obelisk als eine besondere Art Prismatoid auf, so dafs zwischen beiden die bekannte Wechselbeziehung stattfindet.

Als Ergebnis läfst sich folgender Satz aussprechen:

(41) Obelisk und Prismatoid gehören zu den $\mathfrak{K}_n$.

Wir hatten oben die einfachsten ebenflächigen Körper $\mathfrak{K}_o$, $\mathfrak{K}_k$, $\mathfrak{K}_p$ besprochen und durch Zusammenfügen und Wegnehmen derselben einen Obelisk gebildet. Um einfache Körper der drei übrigen Arten zu erhalten, kann man ebenso verfahren. Wählt man z. B. (Fig. 15) eine Seitenfläche einer quadratischen Pyramide zur Anfangsebene, so hat man einen $\mathfrak{K}_e$. Vermindert man ferner einen Pyramidenstumpf um ein über der kleineren Grundfläche stehendes Prisma gleicher Höhe, so ist der Restkörper ein $\mathfrak{K}_{hh}$. Schneidet man endlich aus einem dreiseitigen Prisma die durch zwei windschiefe Grundkanten bestimmte dreiseitige Pyramide aus, so bleibt ein $\mathfrak{K}_h$ übrig.

Im Anschlufs hieran kann man den Inhalt und den Schwerpunkt von Schichten der Flächen zweiter Ordnung noch auf einem anderen, als dem oben eingeschlagenen Wege bestimmen, indem man sie mit den genannten ebenflächigen (oder auch mit bereits bekannten krummflächigen) Körpern derselben Art zusammenstellt und das Cavalierische Prinzip anwendet. So ergiebt sich beispielsweise die Höhe des Schwerpunktes der Halbkugel $= \frac{3}{8} r$ aus der soeben als $\mathfrak{K}_e$ erkannten quadratischen Pyramide. Siehe Fig. 15, in welcher der Einfachheit halber das Quadrat senkrecht auf der Grundfläche steht.

Im Folgenden sollen noch die Arten einiger ebenflächiger Körper angegeben werden. Man bestimmt sie in der Regel am einfachsten mittelst (34), (35), (36).

1) Ein abgeschrägtes dreiseitiges Prisma kann als Obelisk aufgefafst werden, welcher das eine der begrenzenden Trapeze zur Grundfläche und die gegenüberliegende Seitenkante zur Schneide hat. Das Prisma ist dann ein $\mathfrak{K}_e$, wenn die längste Seitenkante Schneide ist, und ein $\mathfrak{K}_{hh}$, wenn es die kürzeste ist; aufserdem ein $\mathfrak{K}_k$, wenn letztere zugleich Null ist. Ist die mittlere Seitenkante Schneide, so kommt es darauf an, ob sie der Mittelparallelen des gegenüberliegenden Trapezes gleich ist, oder ob länger oder kürzer, als dieselbe. Dem entsprechend ist das Prisma ein $\mathfrak{K}_p$, $\mathfrak{K}_e$ oder $\mathfrak{K}_{hh}$.

2) Sind die Grundflächen eines Obelisken Rechtecke, so hat man zwei an einander stofsende Seitenflächen zu beachten. Sind dieselben beide Parallelogramme, so ist der Obelisk ein $\mathfrak{K}_c$; ist nur eins der beiden ein Parallelogramm, ein $\mathfrak{K}_p$; sind sie Trapeze und stöfst die kürzere Parallelseite des einen an die längere des anderen, ein $\mathfrak{K}_e$; sind sie Trapeze und stofsen die kürzeren Parallelseiten beide aneinander (und ebenso die längeren), so ist er ein $\mathfrak{K}_{hh}$.

3) Eine dreiseitige Pyramide kann als Prismatoid aufgefafst werden, welche zwei Gegenkanten zu Schneiden hat. Sie ist dann ein $\mathfrak{K}_e$.

4) Hat ein Prismatoid zwei kongruente regelmäfsige n-Ecke zu Grundflächen, von welchem das eine gegen das andere um einen Winkel $\frac{\pi}{n}$ gedreht ist, so ist es ein $\mathfrak{K}_e$.

5) Von den regelmässigen Körpern kann das Tetraeder als $\mathfrak{K}_k$ und $\mathfrak{K}_e$, das Oktaeder nur als $\mathfrak{K}_e$ und das Hexaeder nur als $\mathfrak{K}_c$ aufgefafst werden. Ikosaeder und Dodekaeder können in je zwei Körper $\mathfrak{K}_k$ und einen Körper $\mathfrak{K}_e$ als Mittelschicht zerlegt werden.

6) Prismatoide mit ähnlichen Grundflächen, von welchen die eine gegen die andere um einen Winkel φ gedreht ist, und deren Seitenkanten jede Ecke der einen Grundfläche mit der entsprechenden der anderen und deren Nachbarecke verbinden, hat Heinze berechnet und ihren Inhalt von der Höhe, den Grundflächen, dem Drehungswinkel φ und einem Hilfswinkel ε abhängig gemacht. Dabei ergiebt sich $\tan \varepsilon$ aus einer der beiden Grundflächen als das Verhältnis der Quadratsumme der Seiten zur vierfachen Fläche. Dann ist

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{g+k}{2} + \frac{\cos(\varepsilon - \varphi)}{\cos \varepsilon}\sqrt{gk}\right),^{*)}$$

und sonach der Körper ein $\mathfrak{K}_k$, $\mathfrak{K}_p$ oder $\mathfrak{K}_e$, je nachdem

$$\sqrt{\frac{g}{k}} + \sqrt{\frac{k}{g}} \gtreqless \frac{2\cos(\varepsilon - \varphi)}{\cos \varepsilon}.$$

Für $g \simeq k$ gehen diese Bedingungen über in $\varphi \gtreqless 2\varepsilon$,**) wobei $\mathfrak{K}_c$ statt $\mathfrak{K}_p$ zu setzen ist. Endlich ist in beiden Fällen der Körper ein $\mathfrak{K}_k$, wenn $\varphi = \pi$.

Zum Schlufs sei noch auf einen von den bisherigen Entwickelungen ganz unabhängigen Beweis der Formel (14) über das statische Moment der Schicht in Beziehung auf den Mittelschnitt aufmerksam gemacht und zwar deshalb, weil die Begründung derselben nicht selten in den Lehrbüchern auf einem Umweg geschieht.

Man zerlege einen dreiseitigen Pyramidenstumpf $ABCA'B'C'$ (Fig. 16) durch die Diagonalen AB', AC', $B'C$ in Pyramiden, wie das üblich ist, um die Inhaltsformel ohne Rechnung zu beweisen. Bringt man nun nach den Mitten zweier Gegenkanten einer jeden Pyramide die Hälfte ihrer Masse, so entstehen sechs Massenpunkte, welche für jede Ebene dasselbe

*) Siehe: Heinze, Genetische Stereometrie, herausgegeben von Lucke. Leipzig 1886. S. 34.

**) Siehe dagegen Gusserow, Stereometrie. §. 24, 3.

statische Moment haben, wie der ganze Körper, da der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide mit dem ihrer Ecken zusammenfällt. Vier dieser Massenpunkte fallen in den Mittelschnitt, so dafs nur die beiden übrigen berücksichtigt zu werden brauchen, wenn man das statische Moment auf den Mittelschnitt bezieht. Von denselben liegt der eine mit der Masse $\frac{1}{6} hk$ in einem Punkt von k, und der andere mit $\frac{1}{6} hg$ in einem Punkt von g. Sonach ist das gesuchte Moment $= \frac{1}{12} h^2 (g - k)$.

Die Übertragung der Formel vom dreiseitigen Pyramidenstumpf auf den Obelisk geschieht in bekannter Weise, indem man durch eine Seitenkante des letzteren eine Ebene legt, die keiner Grundkante parallel sein darf, und dann durch Erweiterung der Seitenflächen den Obelisk als Differenz eines gröfseren dreiseitigen Pyramidenstumpfes und einer Summe kleinerer darstellt. Ihn aber „durch Diagonalebenen der Grundflächen in lauter dreiseitige Obelisken“ zu zerlegen ist unmöglich, und es ist auffällig, dafs sich dies in der sonst sehr gewissenhaft und vorzüglich durchgearbeiteten Elementar-Mathematik von Helmes (§. 200. Bew.) vorfindet. Ebenso wenig ist der in derselben (§. 201. Anm.) stehende Satz, dafs Obelisken mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleich seien, zuläfsig, sowie der Vorwurf (§. 128) gegründet, dafs Heis-Eschweiler die Inhaltsformel nicht allgemein genug bewiesen habe.

F. Anwendung auf die Schichten krummer geradliniger Flächen.

Bewegt sich eine Gerade so, dafs die entstandene Fläche in Verbindung mit zwei parallelen Ebenen eine Schicht vollständig begrenzt, so ist diese Schicht ein $\mathfrak{K}_n$. Um dies zu beweisen, unterscheiden wir nach bekannter Weise die von Geraden erzeugten Flächen in abwickelbare d. h. solche, bei welchen zwei auf einander folgende Lagen der Geraden stets einer Ebene angehören, und in windschiefe, bei denen dies nicht der Fall ist. Für die ersteren ergiebt sich die Behauptung unmittelbar dadurch, dafs man die Umfänge der

Grundflächen eines Obelisken in krummen Linien übergehen läfst.

(42) Die Schicht einer abwickelbaren Fläche ist ein $\mathfrak{K}_n$. Hat die erzeugende Gerade in allen Lagen dieselbe Richtung, so ist die Schicht ein $\mathfrak{K}_c$, geht sie stets durch denselben Punkt, ein $\mathfrak{K}_k$.

Hinsichtlich der windschiefen Flächen betrachten wir zunächst den besonderen Fall, dafs die bewegliche Gerade einer festen Ebene E parallel ist. Zur näheren Bestimmung der Fläche sind dann noch weitere Bedingungen hinzuzufügen, so z. B. dafs die Gerade über zwei feste krumme oder gerade Linien gleitet, oder dafs sie zwei Kugeln oder irgend welche anderen Flächen berührt oder auch über eine Linie gleitet und eine Fläche berührt. In allen diesen Fällen entsteht ein $\mathfrak{K}_p$. Entnimmt man nämlich der Schicht $GLNRMOFH$ (Fig. 17) einen gleichhohen Cylinder $GKNQMPFJ$, welcher $k = FGNM$ zur Grundfläche hat, und dessen Seitenkanten parallel E liegen, so läfst sich beweisen, dafs der zweiteilige Restkörper ein $\mathfrak{K}_p$ ist, welcher den Rand von k zur Schneide hat; oder, was dasselbe ist, dafs seine Schnittfigur parallel k im Abstand x zu seiner Grundfläche im Verhältnis $x : h$ steht. [Um die Figur nicht zu überladen, ist nur ein kleiner Teil der Schnittfigur, nämlich $\alpha\beta\gamma\delta$ mit Erweiterung, gezeichnet worden.]

Zu diesem Zweck schneide man den Restkörper durch zwei parallel E gelegene Ebenen in den Dreiecken UAB mit der Parallelen $\alpha\beta$ und VCD mit der Parallelen $\gamma\delta$; und zwar sei angenommen, dafs sie so nahe an einander liegen, dafs $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ als Trapeze gelten können. Durch Vergleich beider Trapeze findet man, dafs sie in den Höhen übereinstimmen, während sich ihre Grundlinien $\alpha\beta : AB$ und $\gamma\delta : CD = x : h$ verhalten. Sonach stehen die Trapeze selbst in diesem Verhältnis, und ebenso die Schnittfigur und die Grundfläche, weil sie aus unendlich vielen derartigen Trapezen zusammengesetzt werden können.

(43) Die Schicht einer windschiefen Fläche ist ein $\mathfrak{K}_p$, wenn die erzeugenden Geraden ein und derselben Ebene parallel liegen.

Um die Schicht einer allgemeinen windschiefen Fläche zu untersuchen, bewege man um einen beliebigen Punkt S im Innern von k (Fig. 18) eine bis g reichende Gerade so, dafs sie der Erzeugenden der Fläche immer parallel bleibt. Wird der so entstandene Kegel von der Schicht weggenommen, so bleibt, wie jetzt bewiesen werden soll, ein $\mathfrak{K}_p$ übrig. AE und BF seien zwei Lagen der Erzeugenden in einer solchen Nähe, dafs man die Bogen AB und EF durch ihre Sehnen ersetzen kann. Ferner seien SC und SD die ihnen parallelen Kegelkanten. Dann kann die Seitenfläche des Körpers $SEFABCD$ durch eine Gerade erzeugt werden, welche stets parallel dem Dreieck SCD liegt. Mithin ist dieser Körper ein $\mathfrak{K}_p$ (43). Folglich gilt, da die ganze Schicht in unendlich viele derartige Körper und den Kegel zerlegt werden kann, der Satz:

(44) Die Schicht einer windschiefen Fläche ist ein $\mathfrak{K}_n$.

(42) und (44) enthalten die zu Eingang dieses Abschnittes aufgestellte Behauptung. Es sei noch bemerkt, dafs sich der Satz (43) nicht umkehren läfst. Soll nämlich die Schicht der windschiefen Fläche ein $\mathfrak{K}_p$ sein, so mufs der Kegel verschwinden. Dies kann allerdings so geschehen, dafs er in eine Ebene ausartet, er kann aber auch sich selbst so durchdringen, dafs die positiven Teile der Grundfläche den negativen gleich sind.

Wird die Grundfläche des Kegels mit i bezeichnet, so ist der Inhalt der Schicht

$$= \frac{1}{3} ih + \frac{1}{2} h \left[k + (g - i)\right] = \frac{1}{2} h \left[g + k - \frac{1}{3} i\right];$$

das Flächengesetz ergiebt sich aus $\alpha = k$, $\gamma = i : h^2$ und $\beta = (g - k - i) : h$.*) Als Beispiel sei ein von Heinze**) „Wanne" genannter Körper gewählt. Derselbe hat zwei Ellipsen mit parallelen Halbachsen a, b, a_1, b_1 (Fig. 19) zu Grundflächen, und es sind die Geraden der Seitenfläche den Kanten eines Hilfskegels parallel, welcher den Mittelpunkt der einen Ellipse zur Spitze und eine dritte Ellipse zur Grundfläche hat, deren Halbachsen $a - a_1$ und $b - b_1$ in den Halbachsen der zweiten Ellipse

*) Baltzer, Elemente der Mathematik. V. Buch. §. 9, 7.

**) Heinze hat a. a. O. S. 70 die Wanne mit Berücksichtigung des besonderen Falles der Glocke ($b_1 = 0$) sehr eingehend behandelt.

liegen. Aus den aufgestellten Formeln findet man durch Einsetzen von $g = \pi ab$, $k = \pi a_1 b_1$ und $i = \pi (a - a_1)(b - b_1)$ das Flächengesetz, den Inhalt sowie die verschiedenen Arten, welche, je nachdem $a \gtreqless a_1$ und $b \gtreqless b_1$, vorkommen können.

Häufig sind die Nullflächen einer windschiefen Fläche schon durch das Gesetz ihrer Entstehung gegeben, und ist dadurch natürlich auch sofort die Art der Schicht bestimmt. Z. B: (Fig. 20).

(45) Gleitet eine Gerade über zwei in parallelen Ebenen liegenden, nicht geschlossenen Linien hinweg, und erfüllt sie dabei noch irgend eine weitere Bedingung, so ist die zwischen den Ebenen gelegene und denselben parallele Schicht ein $\mathfrak{K}_e$, und die aufserhalb gelegene ein $\mathfrak{K}_{hh}$.

Ist der Abstand beider Ebenen $= 2r$ gegeben, so bedarf es zur vollständigen Bestimmung der Gröfse der Schnittfiguren und des körperlichen Inhaltes nur noch des Mittelschnittes $M = \gamma r^2$ (18). Um diesen zu finden, empfiehlt es sich, den beim Beweis von (44) benutzten Hilfskegel heranzuziehen. Schneidet man denselben im Abstand x von der Spitze, so ist die Schnittfigur $= \gamma x^2$ und demnach $= M$ für $x = r$. Läfst man also von einem Punkt S der einen Ebene aus nach der mittelparallelen Ebene eine gerade Linie gehen und diese sich so bewegen, dafs sie der Geraden, welche die windschiefe Fläche erzeugt, immer parallel ist, so ist die Grundfläche des entstandenen Kegels $= M$. Um einen möglichst einfachen Fall zu wählen, wollen wir annehmen, der Hilfskegel sei ein Umdrehungskegel mit der Kante l. Alsdann haben wir als weitere Bedingung (S. 45) hinzuzufügen, dafs die erzeugende Gerade stets gegen die beiden Ebenen gleich geneigt sein müsse, oder, was dasselbe sagt, dafs die Länge des zwischen den Ebenen gelegenen Stückes immer gleich $2l$ sein müsse. Dann ist $M = \pi (l^2 - r^2)$, und der zwischen den Ebenen gelegene Körper gleich $\frac{4}{3} Mr = \frac{4}{3} \pi r (l^2 - r^2)$, so dafs man den Satz erhält:

(46) Liegen in zwei unter dem Abstand $2r$ parallelen Ebenen zwei beliebige gerade oder krumme, nicht geschlossene Linien, und werden dieselben von den Endpunkten einer Strecke, deren Länge unveränderlich $= 2l$, so durchlaufen, dafs eine geschlossene krumme Fläche entsteht, so ist der von dieser begrenzte Körper $= \frac{4}{3}\pi r(l^2 - r^2)$.

Für den Fall, dafs die Linien gerade sind, wurde der Satz bereits von Steiner*) aufgestellt. Wenn aber Steiner das Resultat deshalb merkwürdig findet, weil es von dem Winkel der beiden Geraden unabhängig sei, sodafs das Volumen des Körpers konstant bleibe, welche Gröfse dieser Winkel auch haben mag, so sehen wir jetzt, dafs es auch davon unabhängig ist, ob die Bahnen der Endpunkte gerade Linien sind oder irgend welche krumme.

Für die Zahl γ erhält man $\gamma = \pi\frac{l^2 - r^2}{r^2} = \pi \cdot \cot^2\omega$, wenn ω die unveränderliche Neigung der Geraden gegen die Ebenen ist. Für $\omega = \frac{\pi}{4}$ wird $\gamma = \pi$, $M = \pi r^2$ und $K = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Es liege nun ein Punkt P auf der Geraden so, dafs er von ihren Endpunkten immer die Entfernungen a und $b = 2l - a$ hat. Dann ist der Abstand desselben von der einen Ebene $x = a \cdot \sin\omega$, also unveränderlich. P beschreibt daher eine ebene Linie und zwar eine solche, welche die zu x gehörige Schnittfigur eingrenzt, und somit ergiebt sich für dieselbe der Wert $f = \gamma x(2r - x) = \pi \cdot \cot^2\omega \cdot a \cdot \sin\omega(2r - a\sin\omega)$ $= \pi ab \cdot \cos^2\omega$. D. h.

(47) Durchlaufen die Endpunkte einer Strecke von unveränderlicher Länge zwei in parallelen Ebenen liegende, beliebige, gerade oder krumme Linien, so bewegt sich ein Punkt derselben, welcher von den Endpunkten die unveränderlichen Abstände a und b hat, längs des Randes eines parallelen ebenen Flächenstückes von der Gröfse $\pi ab\cos^2\omega$, wobei ω die Neigung der Strecke gegen die Ebene bedeutet.

---

*) Steiners gesammelte Werke. II. Bd. S. 318.

Für $\omega = 0$ oder durch Projektion auf eine parallele Ebene geht der Satz in den folgenden über:

(48) Durchlaufen die Endpunkte einer Strecke von unveränderlicher Länge zwei in ihrer Ebene liegende, beliebige, gerade oder krumme Linien, und bewegt sich ein Punkt derselben, welcher von den Endpunkten die unveränderlichen Abstände a und b hat, auf einer in sich zurückkehrenden Bahn, so ist das von dieser Bahn umschlossene Flächenstück $= \pi ab$. (Fig. 21).

Der zuletzt angegebene Satz wurde bereits im Jahre 1880 vom jüngeren Herrn Amsler im Anschlufs an den Polarplanimeter seines Vaters gefunden.

Bewegen sich die Endpunkte der Strecke auf zwei Geraden einer Ebene, so beschreibt P nach dem bekannten Satz vom Ellipsenzirkel eine Ellipse, und zwar hat dieselbe die Halbachsen a, b, wenn die Geraden auf einander senkrecht stehen; andernfalls ist das Produkt der Halbachsen gleich ab. Sind die Geraden windschief, so beschreibt P auch dann noch eine Ellipse, wie sich ergiebt, wenn man das ganze Gebilde auf eine parallele Ebene projiziert, da in diesem Fall die Projektionen von a und b, nämlich $a \cos \omega$ und $b \cos \omega$, unveränderlich sind.

Unter den bisher betrachteten Schichten krummer geradliniger Flächen finden sich sämtliche Körperarten vor, mit Ausnahme der $\mathfrak{K}_k$. Wir gehen daher darauf aus, auch für diese Körpergattung ein Beispiel zu suchen. Da sich dieselbe vor den übrigen, abgesehen von den $\mathfrak{K}_c$, dadurch auszeichnet, dafs sie keine Nullfläche besitzt, so mufs hierauf vor allem das Augenmerk gerichtet sein. Zu diesem Zweck sei ein Cylinder in der Weise erzeugt, dafs zwei Punkte A und B einer an Gröfse, Gestalt und Lage unveränderlichen ebenen Figur zwei parallele Gerade durchlaufen. Stellt man nun letztere windschief, so ist die Bewegung unmöglich, weil dann AB fortwährend seine Länge ändern mufs. Daher wird man von der Unveränderlichkeit der Gröfse absehen und nur die der Gestalt und Lage beibehalten. Auch dann können keine Nullflächen vorkommen; denn, da AB niemals Null werden kann, so kann

auch die an AB gelegene Figur nicht verschwinden.*) Wir stehen somit vor der Frage: Auf welchen Bahnen bewegen sich die Punkte einer der Gestalt nach unveränderlichen, ebenen, parallel verschiebbaren Figur, wenn zwei ihrer Punkte gerade Linien durchlaufen? Sind diese Bahnen ebenfalls gerade, so ist das Beispiel zu brauchen, wenn nicht, zu verwerfen.

1) (Fig. 22.) Es seien A_1B_1 und A_2B_2 als zwei bestimmte Lagen von AB gegeben, und sonach auch die windschiefen Linien A_1A_2 und B_1B_2, und aufserdem die Ebenen E_1 und E_2, in welchen die Figuren liegen. Ist ferner X ein beliebiger Punkt von AB, so wird die geteilte Strecke AXB ihre Gestalt nicht ändern, wenn das Verhältnis $AX:XB$ erhalten bleibt. Welches ist nun der Ort X_1XX_2? Um diese Frage zu beantworten, projiziere man das windschiefe Viereck $A_1B_1A_2B_2$ auf eine beliebige Ebene mittelst Strahlen in E_1 und E_2, die aber sonst irgend welche Richtung haben können. Hierdurch entsteht das Trapez $A_1'B_1'A_2'B_2'$, dessen Fläche von $A'B' \| A_1'B_1'$ überstrichen wird. Da das Verhältnis $A'X':X'B' = AX:XB$ seinen Wert nicht ändert, so ist der Ort des Punktes X' eine Gerade. Berücksichtigt man nun, dafs unendlich viele Richtungen der Projektionsstrahlen zu Gebote stehen, und dafs in allen Fällen der Ort des Punktes X eine gerade Linie zur Projektion hat, so überzeugt man sich davon, dafs jener Ort selbst eine Gerade sein mufs. Hiermit ist zugleich der bekannte Satz bewiesen:

(49) Gleitet eine Gerade zwei Gegenseiten eines windschiefen Viereckes entlang, sodafs sie beide immer im selben Verhältnis teilt, und gleitet eine andere Gerade in gleicher Weise über die beiden anderen Seiten, so füllen sie dieselbe Fläche aus. (Hyperbolisches Paraboloid.)

2) (Fig. 23.) Wir setzen nunmehr voraus, dafs in der parallel verschiebbaren Ebene durch AB das Dreieck ABC liege, und dafs seine Gestalt unveränderlich sei. Es soll der Ort des Punktes C gesucht werden, wenn A und B die Geraden

*) Gugler nennt in seiner deskriptiven Geometrie (300) eine Fläche, deren parallele ebene Schnittfiguren ähnlich sind: Rückungsfläche.

AA_2 und BB_2 durchlaufen. Projiziert man das Dreieck zum kongruenten Dreieck $A_2B'C'$ durch Strahlen parallel AA_2 auf die Ebene $A_2B_2C_2$, so bewegt sich während der Verschiebung B' auf der Geraden $B'B_2$. Trägt man nun auf A_2C' die Strecke $A_2X = A_2B'$ ab, so ist der Ort von X ebenfalls eine Gerade, die mit der $B'B_2$ zur Deckung gebracht werden kann, wenn man A_2X um den unveränderlichen Winkel XA_2B' um den Punkt A_2 dreht. Da sich ferner das Verhältnis $A_2X : A_2C'$ nicht ändert, so mufs der Ort des Punktes C' eine Gerade $C'C_2$ parallel der Bahn des Punktes X sein.

Man kann nun das Dreieck ABC durch Strahlen parallel BB_2, oder, wenn man will, auch parallel einem Strahl, welcher zwei andere entsprechende Punkte von AB und A_2B_2 verbindet, projizieren, stets wird sich der Weg des Punktes C zu einer Geraden projizieren, derselbe mufs also selbst eine gerade Linie sein.

3) Wird endlich eine an Gestalt unveränderliche, parallel verschiebbare, beliebig eingegrenzte, ebene Figur so bewegt, dafs zwei ihrer Punkte A, B gerade Linien durchlaufen, so gilt dies von allen Punkten ihres Umfanges; denn, wenn man einen beliebigen Punkt C desselben mit A und B verbindet, so erhält man ein sich immer ähnlich bleibendes Dreieck, und damit ist die Behauptung auf die in 2) bewiesene zurückgeführt. Hieraus geht hervor, dafs die vom Umfang der beweglichen Figur beschriebene Fläche auch durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann, wenn dieselbe über die Umfänge zweier parallelen ähnlichen Figuren so hingleitet, dafs sie stets zwei entsprechende Punkte verbindet; und, da auf diese Weise, wie bereits erwähnt, niemals eine Nullfläche entstehen kann, so gilt der Satz:

(50) Die Schicht einer windschiefen Fläche mit ähnlichen, aber nicht ähnlich gelegenen, Grundflächen ist ein $\mathfrak{K}_h$, wenn die Seitenkanten entsprechende Punktpaare verbinden. Jeder ebene Schnitt, parallel den Grundflächen, ist eine denselben ähnliche Figur.

Die für einen allgemeinen $\mathfrak{K}_h$ oben aufgestellten Formeln (37) und (38) haben für den vorliegenden Fall eine besondere

Bedeutung. Sind nämlich (Fig. 24)*) O_1P_1, O_2P_2 und O_3P_3 drei entsprechende Strecken der ähnlichen Figuren f_1, f_2, f_3 mit den Abständen x, y, so kann man dieselben durch Strahlen parallel O_1O_3 auf die Grundfläche projizieren und erhält in derselben die Figur 6. Ω und ω geben die Winkel an, um welche man f_1 und f_2 drehen mufs bis sie in ähnliche Lage mit f_3 kommen. Nimmt man f_1, f_3 und Ω als gegeben an, so zeigt (38) die gegenseitige Abhängigkeit des Drehungswinkels ω und des zugehörigen Teilverhältnisses der Höhe, während (37) das Flächengesetz darstellt. Um letzteres in der bisher üblichen Form erscheinen zu lassen, setze man $y = h - x$, wodurch sich ergiebt

$$(51)\quad \begin{cases} f = k + 2\left[\cos\Omega \cdot \sqrt{gk} - k\right] \cdot \frac{x}{h} + \frac{g + k - 2\cos\Omega\sqrt{gk}}{h^2} \cdot x^2 \\ \text{und sonach der Inhalt} = \frac{1}{3}h\left(g + k + \sqrt{gk} \cdot \cos\Omega\right).^{**)} \end{cases}$$

Bemerkenswerte Fälle: $\Omega = 0$ (Kegelstumpf) und $\Omega = \frac{\pi}{2}$.

Weiter sei noch erwähnt, dafs man den Schwerpunkt leicht bestimmen kann, da die Schwerpunkte aller Schnittflächen auf einer Geraden liegen, dafs man durch das Lot $O_3P'_0$ und die Parallele P'_0P_0 den kleinsten Schnitt M erhält, und dafs sich die Grundfläche des zugehörigen Kegels $i = g + k - 2\cos\Omega\sqrt{gk}$ am einfachsten ergiebt, wenn man über $P_1'P_3$ eine der Schnittfigur ähnliche Figur errichtet. Ist ferner die Grundfläche der Schicht ein Vieleck, um welches sich ein Kreis beschreiben läfst, so kann man die windschiefe Fläche einem einschaligen Hyperboloid einbeschreiben, und sie ist selbst ein einschaliges Hyperboloid, wenn die Grundfläche ein Kreis (aber nicht etwa eine Ellipse) ist. Endlich kann man alle Punkte der durch f gehenden Ebene zu einem sogenannten ähnlich-veränderlichen ebenen System vereinigt denken. Wird dieses dann im Raum parallel verschoben, und bewegen sich zwei seiner Punkte auf geraden Linien, so findet die Bewegung aller übrigen Punkte in derselben Weise statt, und zwar, je nachdem jene beiden Geraden sich in einem Punkt schneiden, parallel oder windschief sind, ist dies bei sämtlichen Geraden der Fall. Der zugehörige Kegel wird zu einem Strahlenbündel, und es ist sonach unter

*) In Fig. 24 lese man P'_1 statt P'_2 und gleich daneben P'_2 statt P_2.

**) Heinze a. a. O. S. 38.

den geradlinigen Bahnen eine jede, die Ebene schneidende, Richtung immer und nur einmal vertreten. Projiziert man nun das ganze Gebilde auf eine Ebene, so werden sich die Projektionen aller Punkte auf geraden Linien bewegen mit einziger Ausnahme des Punktes, dessen geradlinige Bahn den Projektionsstrahlen parallel ist. D. h.:

(52) Erzeugen zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems auf geraden Linien der zugehörigen Ebene ähnliche Punktreihen, so bleibt ein Punkt fest, alle übrigen erzeugen ebenfalls auf geraden Linien ähnliche Punktreihen.*)

G. Anwendung auf die Schichten gewisser Flächen, welche durch Bewegung eines Kegelschnittes entstehen.)**

1) (Fig. 25) In der einen von zwei parallelen Ebenen E_1 liege ein Punkt S und in der anderen E_2 ein geschlossenes Flächenstück g. Aufserdem gehe von S nach einem Punkt F in E_2 eine gerade Linie. Es gleite nun eine veränderliche Parabel so über den Umfang von g hin, dafs sie stets E_1 in S berührt und SF zum Durchmesser hat. Alsdann erzeugt der von S bis zum Umfang reichende Parabelbogen eine krumme Fläche, welche einen Körper $\mathfrak{K}_p$ begrenzt.

Beweis: Es seien SA und SB zwei benachbarte parabolische Seitenkanten des Körpers, und es treffe die Schnittebene f, welche parallel E_1 im Abstand x ist, die Linien SA, SB, SF in bezw. A', B', F'. Dann verhält sich $B'F'^2 : BF^2 = SF' : SF = A'F'^2 : AF^2$; da aufserdem $\sphericalangle A'F'B' = \sphericalangle AFB$, so ist $\triangle A'F'B' \sim \triangle AFB$, und zwar stehen ihren Flächen im Verhältnis $B'F'^2 : BF^2 = SF' : SF$. Teilt man nun f und g in unendlich viele derartiger Dreiecke, so ergiebt sich $f : g = SF' : SF = x : h$, womit der Satz bewiesen ist.

Zusatz 1. Zwei beliebige, den Ebenen parallele, Schnittfiguren sind ähnlich und ähnlich gelegen.

---

*) Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen etc. Zeitschrift f. Math. u. Ph. XIX. S. 156.

**) Martus, Kegelschnittkantige Pyramiden und kurvenkantige Prismen. Berlin 1863.

Zusatz 2. Ist g ein n-eck, so besteht der Mantel des Körpers aus n Ausschnitten parabolischer Cylinder.

Zusatz 3. Der Mantel ist eine Verallgemeinerung des elliptischen Paraboloides und geht in dasselbe über, wenn g eine Ellipse, und F ihr Mittelpunkt ist.

Entsprechende Zusätze lassen sich auch den folgenden Sätzen beifügen.

2) (Fig. 26.) In der Ebene E liege ein geschlossenes Flächenstück g. Ferner liegen zu beiden Seiten von E die ihr parallelen Ebenen E_1 mit einem Punkt S_1 und E_2 mit einem Punkt S_2. Es gleite nun eine veränderliche Halbellipse so über den Umfang von g, dafs sie stets E_1 in S_1 und E_2 in S_2 berührt. Alsdann erzeugt die von S_1 durch den Umfang bis S_2 gehende Halbellipse eine krumme Fläche, welche einen Körper $\mathfrak{K}_e$ begrenzt.

Beweis: Wählt man die Bezeichnung gerade so, wie in 1) und fügt nur noch den Abstand $2r$ der Ebenen $E_1 E_2$ hinzu, so ergiebt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke aus $F'B'^2 : FB^2 = S_1F'. F'S_2 : S_1F. FS_2 = F'A'^2 : FA^2$, und alsdann die Behauptung aus $f : g = x(2r - x) : h(2r - h)$. — Durch die andere Halbellipse entsteht ebenfalls ein $\mathfrak{K}_e$.

3) Liegen in 2) E_1 und E_2 auf derselben Seite von E, und sind Hyperbeln statt Ellipsen gegeben, so gelten dieselben Schlüsse, nur ist $f : g = x(2r + x) : h(2r + h)$. Folglich ist der zwischen E und E_1 oder E_2 gelegene Körper ein $\mathfrak{K}_{hh}$.

4) (Fig. 27.) Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Figuren k und g ($> k$) seien in parallelen Ebenen gegeben, und es sei aufserdem von einem Punkt O*) in der Ebene durch k nach dem entsprechenden Punkt O' der Ebene durch g ein Ähnlichkeitsstrahl gezogen. Gleitet nun ein Hyperbelast so über die Umfänge der Figuren hinweg, dafs er stets entsprechende Punktpaare verbindet, dafs er O zum Mittelpunkt hat und dafs seine Tangente an dem Schnittpunkt mit k parallel OO' liegt, so umschliefst die erzeugte krumme Fläche einen Körper $\mathfrak{K}_h$.

5) Zwei kongruente und ähnlich gelegene Figuren seien in parallelen Ebenen gegeben, und es seien aufserdem zwei ent-

---

*) In Fig. 27 steht O zu hoch.

sprechende Punkte durch den Bogen eines Kegelschnittes (oder einer beliebigen krummen Linie) verbunden.

Gleitet nun derselbe über die Umfänge der Figuren so hinweg, daſs er seine Gestalt und Gröſse nicht ändert, und daſs seine Ebene (oder er selbst) sich immer parallel bleibt, so umschlieſst die entstandene Fläche einen $\mathfrak{K}_c$.

6) Um einen $\mathfrak{K}_k$ zu erhalten, kann man in 3) oder 4) die Hyperbeln in ihre Asymptoten ausarten lassen, wodurch allerdings kein neues Gebilde entsteht.

Kleinere Mitteilungen.

Ermittlung aller einem bestimmten Zahlengebiet angehörenden Lösungen der Pythagoreischen Gleichung.*)

Von G. WERTHEIM in Frankfurt a. M.

Um die Gleichung

(1) $$x^2 + y^2 = z^2$$

in ganzen Zahlen aufzulösen, setze man

$$x^2 + y^2 = (x + ky)^2,$$

wo k eine vorläufig unbestimmte rationale Zahl bezeichnet. Es ergiebt sich

$$y = \frac{2kx}{1-k^2}, \quad z = x + ky = \frac{x(1+k^2)}{1-k^2}.$$

Die Gleichung (1) wird also durch die Werte

$$x, \quad \frac{2kx}{1-k^2}, \quad \frac{x(1+k^2)}{1-k^2}$$

und daher auch durch

$$x(1-k^2), \quad 2kx, \quad x(1+k^2)$$

identisch befriedigt. Will man nur ganze Lösungen zulassen, so setze man $k = \frac{n}{m}$, wo m, n als relative Primzahlen vorausgesetzt werden dürfen. Durch Unterdrückung des Nenners m^2 ergeben sich dann

$$x = \xi(m^2 - n^2), \quad y = 2mn\xi, \quad z = \xi(m^2 + n^2)$$

als allgemeinste**) Lösung der Gleichung (1), und darin bezeichnen m, n relative Primzahlen, während über ξ so zu verfügen ist, daſs sich für x, y, z ganze Werte ergeben. ξ muſs daher eine

---

*) Dieser Artikel steht in Beziehung zu dem Artikel von Tiebe in Heft 3, S. 178 u. f. Die Red.

**) Die in meinen „Elementen der Zahlentheorie" gegebene Lösung ist in Folge eines Versehens meinerseits nicht allgemein genug. Der Verf.

ganze Zahl sein, aufser wenn m, n beide ungerade sind, in welchem Falle nur $\frac{1}{2}\xi$ eine ganze Zahl zu sein hat.

Um nun alle Lösungen zu finden, die einem bestimmten Zahlengebiet angehören, etwa alle diejenigen, bei denen $z < 100$ ist, nehmen wir zunächst $\xi = 1$ an und schreiben die Quadratzahlen bis zu dieser Grenze hin

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81;$$

darauf addieren wir die erste dieser Zahlen zu jeder folgenden, dann die zweite zu jeder folgenden u. s. w., wobei wir jedesmal an der gewählten Grenze innehalten. Auf diese Weise erhalten wir die Reihen der Zahlen

$$(2)\quad \begin{cases} 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ 50,\ 65,\ 82; & [1+4,\cdots] \\ 13,\ 20,\ 29,\ 40,\ 53,\ 68,\ 85; & [4+9,\cdots] \\ 25,\ 34,\ 45,\ 58,\ 73,\ 90; & [9+16,\cdots] \\ 41,\ 52,\ 65,\ 80,\ 97; & [16+25,\cdots] \\ 61,\ 74,\ 89; & [25+36,\cdots] \\ 85. & [36+49] \end{cases}$$

Jede in den Reihen (2) stehende Zahl a ist ein passender Wert von z, und es entsprechen ihr, wenn sie sich nur einmal in (2) vorfindet, ein Paar Werte von x, y. Ist nämlich a nur auf eine Weise in zwei Quadrate zu zerfällen, $a = m^2 + n^2$, so ist $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$. Für $z = 45 = 9 + 36$ z. B. ergiebt sich $x = 36 - 9 = 27$, $y = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.

Jede dagegen in den Reihen (2) wiederholt, etwa i mal, auftretende Zahl a kann auf i verschiedene Arten in zwei Quadrate zerfällt werden, liefert also i Lösungen der Gleichung (1). So ist z. B. $85 = 4 + 81 = 36 + 49$; die erste Zerlegung liefert $x = 77$, $y = 36$, $z = 85$, die zweite $x = 13$, $y = 84$, $z = 85$.

Zu den so ermittelten Lösungen der Gleichung (1) treten noch diejenigen, welche den Werten $\xi = 2, 3, \cdots$ entsprechen, insoweit sie die gewählte Grenze nicht überschreiten. Hierbei ist jedoch Folgendes zu beachten:

1. Da $2b^2 + 2c^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2$ ist, so befindet sich $2a$ stets unter den Zahlen (2), wenn sich a unter denselben befindet, und der Zerlegung $2a = (b+c)^2 + (b-c)^2$ entspricht die Lösung der Gleichung (1)
$(b+c)^2 - (b-c)^2 = 4bc$; $2(b+c)(b-c) = 2(b^2 - c^2)$; $2a$. Andererseits liefert $a = b^2 + c^2$ die Lösung $b^2 - c^2$; $2bc$; a, und so erkennen wir, dafs die Multiplikation der gefundenen Lösungen mit 2 zu keinen neuen Lösungen führt.

2. Die Identität

$$(b^2 + c^2)(\beta^2 + \gamma^2) = (b\beta \pm c\gamma)^2 + (b\gamma \mp c\beta)^2$$

lehrt, dafs ein Produkt je zweier der Zahlen (2) sich ebenfalls unter

diesen Zahlen vorfindet. Wenn aber $a = (b^2 + c^2)(\beta^2 + \gamma^2)$ ist, so ist jede der beiden direkt erhaltenen Lösungen

$$(b\beta \pm c\gamma)^2 - (b\gamma \mp c\beta)^2,\ 2(b\beta \pm c\gamma)(b\gamma \mp c\beta),\ a$$

sowohl von der Lösung

$$(b^2 + c^2)(\beta^2 - \gamma^2),\ (b^2 + c^2)\, 2\beta\gamma,\ a,$$

als auch von

$$(\beta^2 + \gamma^2)(b^2 - c^2),\ (\beta^2 + \gamma^2)\, 2bc,\ a$$

verschieden. So z. B. liefert die Zahl 5 die Lösung $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, und durch Multiplikation mit 17 erhält man hieraus für 85 die Lösung $x = 51$, $y = 68$, $z = 85$; andererseits liefert 17 die Lösung $x = 15$, $y = 8$, $z = 17$, und durch Multiplikation mit 5 folgt hieraus für 85 die Lösung $x = 75$, $y = 40$, $z = 85$, so dafs sich für 85 im Ganzen vier verschiedene Lösungen ergeben.

Zu dem Aufsatz des Herrn Dr. Tiebe in Heft 3.

(Anonym eingesandt.*)

Ein einfacheres Verfahren, die Gleichung $a^2 = c^2 - b^2$ in ganzen Zahlen aufzulösen, wenn a gegeben ist, dürfte folgendes sein.

Man zerlege a^2 in zwei gerade oder in zwei ungerade Faktoren und bilde die halbe Summe und die halbe Differenz derselben. Der Beweis liegt in der Formel $c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$.

Beispiele.

$$a^2 = 10^2 = 50 \cdot 2;\ \text{halbe Summe} = c = \frac{52}{2} = 26$$

$$\text{halbe Differenz} = b = \frac{48}{2} = 24;$$

$$10^2 = 26^2 - 24^2;$$

$$a^2 = 7^2 = 49 \cdot 1;\ \text{halbe Summe} = c = \frac{50}{2} = 25,$$

$$\text{halbe Differenz} = b = \frac{48}{2} = 24;$$

$$7^2 = 25^2 - 24^2.$$

Bemerkung der Redaktion hierzu. Der Verf. legt eine Kathete zu Grunde und bestimmt die dazu passende andere K. und die Hypotenuse. Vielleicht liefse sich die Operation deutlicher so darstellen:

Man zerlegt das Quadrat der gegebenen Zahl a auf alle möglichen Arten in zwei gerade oder in zwei ungerade Faktoren

*) Der Brief trug den Poststempel Friedrichsroda.

(jenachdem a gerade oder ungerade ist) und bildet für jede Zerlegung die halbe Summe und die halbe Differenz der Faktoren.

Beispiele:

$$\text{I.}\quad 15^2 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25,$$

$$\frac{75+3}{2} = 39, \qquad \frac{75-3}{2} = 36;$$

$$\frac{45+5}{2} = 25, \qquad \frac{45-5}{2} = 20;$$

$$\frac{25+9}{2} = 17, \qquad \frac{25-9}{2} = 8;$$

also

$$15^2 = 39^2 - 36^2 = 25^2 - 20^2 = 17^2 - 8^2.$$

$$\text{II.}\quad 8^2 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16.$$

$$\frac{32+2}{2} = 17, \qquad \frac{32-2}{2} = 15;$$

$$\frac{16+4}{2} = 10, \qquad \frac{16-4}{2} = 6;$$

also

$$8^2 = 17^2 - 15^2 = 10^2 - 6^2.$$

Elementar-stereometrische Quadratur der Ellipse.*)

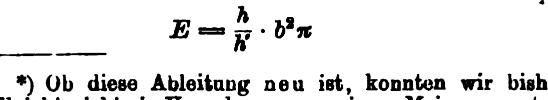
Von Dr. Heinrich Simon in Berlin.

(Mit 1 Fig. i. T.)

Ein Rechteck mit der Grundlinie $AB = 2b$ und der Höhe $AC = h$ sei ein Axenschnitt durch einen geraden Kreiscylinder. Der Inhalt des letzteren ist dann $b^2\pi h$.

Legt man nun durch A eine Ebene, die mit dem Grundkreise einen beliebigen (spitzen) Winkel α bildet, so schneidet dieselbe den Cylinder in einer Ellipse E, deren grofse Axe $AD = 2a$ sei.

Denkt man ferner den Huf ABD bis auf die obere Grundfläche des Cylinders verschoben und von C auf AD das Lot $CF = h'$ gefällt, so verwandelt sich der gerade Cylinder in einen schiefen elliptischen, dessen Inhalt offenbar $E \cdot h'$ ist. Demnach hat man



$$b^2\pi h = Eh'$$

$$E = \frac{h}{h'} \cdot b^2\pi$$

*) Ob diese Ableitung neu ist, konnten wir bisher nicht erfahren, vielleicht giebt sie Veranlassung zu einem Meinungsaustausch. D. Red.

oder, da h mit h' ebenfalls den $\sphericalangle\, \alpha$ einschliefst, so dafs

$$h : h' = AD : AB = a : b$$

ist,

$$E = ab\pi.$$

Dafs der auf AD senkrechte Halbmesser der Ellipse parallel den Grundflächen des Kreiscylinders, also gleich b ist, sieht man leicht.

Drei Fragen des naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Von Dr. H. Thieme in Posen.

I.

Herr Direktor Dr. W. Krumme verteilt in seinem „Lehrbuch der Physik“ den physikalischen Lehrstoff in zwei Kurse. Für Realgymnasien scheint mir eine Stoffverteilung, wie sie Krumme giebt, geradezu geboten. Die schwierigeren Teile der Lehre von dem Magnetismus, der Elektricität und der Wärme sind für die Schüler der Sekunda nicht verständlich, sind aber zu wichtig, um ganz aus dem Unterricht weggelassen zu werden; die leichteren Abschnitte der Mechanik, Akustik und Optik sind dagegen auf der Unterstufe sehr wohl zum Verständnis zu bringen, es ist nicht notwendig, ihre Behandlung in die Prima zu verlegen. Eine schädliche Zersplitterung des Lehrstoffs läfst sich auch bei der Verteilung auf zwei Stufen vermeiden.

Da die Praxis der meisten Realgymnasien und die Mehrzahl der an ihnen gebrauchten Lehrbücher die Anordnung des Stoffes in zwei Kursen nicht kennt*), so scheinen die Lehrer der Physik vielfach die Ansichten Krumme's nicht zu teilen. Sollte es nicht wünschenswert sein, durch Erörterung dieser Frage unter den Lehrern der Physik eine gröfsere Einigung zu schaffen, als jetzt besteht?

II.

Durch die „Lehrpläne für die höheren Schulen“ Preufsens ist der chemische Unterricht auf Obersekunda und Prima beschränkt worden. Es ist namentlich von dem Apothekerstande, aber auch sonst als Mangel empfunden worden, dafs die Schüler, die mit dem Zeugnis für Obersekunda das Realgymnasium verlassen, jeder chemischen Vorbildung ermangeln. Andererseits fehlen für einen Unterricht in der Anatomie und Physiologie, der jetzt in Untersekunda erteilt werden soll, auf dieser Stufe die chemischen und physikalischen Vor-

---

*) Ähnliche Bücher — mit zwei getrennten Kursen — sind bereits erschienen von Sumpf, Hildesheim 1885 und viel früher von Heussi, sogar in drei Kursen. D. Red.

kenntnisse. Ist es nun nicht zweckmäfsiger, den Unterricht in der Chemie in Untersekunda beginnen zu lassen, dafür in Prima ein bis zwei Semester hindurch die für die Chemie angesetzte Unterrichtszeit der Anatomie und Physiologie der Pflanzen und Tiere zu überweisen? Vorstehender Vorschlag wurde gelegentlich in etwas anderer Form von meinem Kollegen Herrn Dr. Mendelsohn gemacht.

III.

Der zoologische Unterricht wird gewöhnlich zu dem botanischen in Parallele gesetzt. Die Verschiedenheit des Anschauungsmaterials bedingt indes wesentliche Unterschiede. Namentlich auf den unteren Stufen wird man den Schülern das Anschauungsmaterial nie so vollkommen bieten können, die Anleitung zum Beobachten und Vergleichen, die Schulung des Auges wird in der Zoologie nie eine so gute sein können, wie in der Botanik. Die ausgestopften Tiere, die Skelette und Wandtafeln, die man benutzt, können nicht gleichzeitig von allen Schülern gesehen werden, wenigstens nicht in all den Einzelheiten, denen der Unterricht seine Aufmerksamkeit zuwenden mufs. Die Abbildungen in den Lehrbüchern eignen sich auch nicht recht während des Unterrichts zur Benutzung, weil die Schüler die Antworten auf die Fragen des Lehrers ablesen und sich der Mühe überheben, selbst zu sehen. Der zoologische Unterricht ist zum Teil in derselben Lage wie der geographische. Man begnügt sich im geographischen Unterricht nicht mit der Wandkarte allein. Ist es nun nicht auch im zoologischen Unterricht wünschenswert, den Schülern einen Atlas in die Hand zu geben, einen Atlas, der die durchzunehmenden Tiere resp. Teile derselben enthält? Ein solcher Atlas würde die ausgestopften Tiere nicht entbehrlich machen, da diese doch viel lebhafter auf die Anschauung wirken als Abbildungen.*)

*) So viel wir wissen, giebt es derartige Atlanten schon; wir nennen nur den (uns gerade zur Hand liegenden) von Arendts, naturhist. Schulatlas mit 56 Tafeln, 3. Aufl. — bes. von Dr. Traumüller. Leipzig, Brockhaus 1880. s. ds. Z. XI, 467. (1885 bereits in 5. Aufl. mit 69 Tafeln erschienen.) Aber es giebt gewifs noch mehrere. D. Red.

Sprech- und Diskussions-Saal.

Entgegnung auf Prof. Dr. Haucks Kritik der Heinzeschen Stereometrie.

Von L. Liebetruth, Gymnasiallehrer zu Zerbst.

Die Kritik, welche Prof. Hauck über die Heinzesche Stereometrie im 2. Heft d. lauf. Jahrg. ds. Zeitschrift veröffentlicht hat, ist ohne Zweifel nach eingehender Beschäftigung mit dem genannten Werke und mit vieler Sachkenntnis geschrieben; und ebenso zweifellos mufs ihm der Herausgeber für Vieles Dank wissen. Ich hebe nur hervor, dafs Hauck mit Recht den Giltigkeitsbeweis der Simpsonschen Formel für Wanne und Glocke vermifst, dafs seine Bemerkungen über die willkürlichen Definitionen dieser Körper zutreffen, und dafs er mit gutem Grunde für die gleichflächig-halbregulären Körper dasselbe Interesse hegt und fordert, wie für die gleicheckig-halbregulären.

Dennoch mufs ich der Hauckschen Kritik den Vorwurf machen, dafs sie die Heinzesche Stereometrie von einem falschen Standpunkt aus beurteilt.

Hauck sagt selber, dafs die Klassifizierung der Körper, die er bei Heinze für einen Rückschritt hinter Monge erklärt, unmöglich anders ausfallen kann, sobald die Inhaltsbestimmung als die wichtigste Aufgabe der Stereometrie angesehen, und das ganze System darauf zugeschnitten wird. So, als Körpermessungslehre, fafst aber Heinze seine Stereometrie auf, und mir scheint, er hat zu dieser Beschränkung des Begriffes seine volle Berechtigung. Ich gebe Hauck ohne Weiteres den hieraus folgenden einseitigen Charakter der Heinzeschen Stereometrie zu; aber soll diese nicht auf der Schule gelehrt werden, und kann eine Schul-Stereometrie, wenn anders sie System in die Menge der Körper bringen will, dieselben besser und durchgreifender als nach dem Inhalt einteilen? Hat man das Recht, einem solchen Schulbuch gegenüber, welches mit seiner reichen und geordneten Körperwelt einen nicht kleinen Fortschritt gegen früher darstellt, sich auf den Standpunkt der modernen Flächentheorie zu stellen? Gewifs knüpfen sich an die Körper wichtigere und interessantere Fragen, als die ewige Frage nach

dem Inhalt. Sind aber z. B. Fragen nach den Krümmungsverhältnissen, der Abwickelbarkeit, der Gröfse der Oberfläche „systematisch" auf der Schule zu behandeln?

Gewifs nenne auch ich das Körpersystem Heinzes ein künstliches und halte die Einteilung nach dem Charakter der Mantelfläche für die natürliche! Ist aber diese Teilung auf der Schule durchführbar? Ich glaube nicht. Sie würde sogleich auf die Stellung von Fragen führen, auf Fragen nach den ebenen Schnittkurven, nach den geraden Linien auf der Fläche etc., deren Beantwortung nur bei dieser und jener Körperform möglich wäre. Denn wer Flächentheorie treiben will, mufs die Differential- und Integralrechnung und die höhere Algebra beherrschen. Zudem darf eine künstliche Einteilung didaktisch der natürlichen sehr wohl vorausgehen, wie noch heute das Linnésche System neben dem natürlichen sein didaktisches und praktisches Recht behauptet.

Demnach wird überall da, wo man den Schüler im stereometrischen Unterricht nicht mit wenigen zusammenhangslosen Körperformen abspeisen will, und wo zugleich dieser Zweig der Schul-Mathematik auf den geometrischen und algebraischen Kenntnissen des heutigen Primaners wachsen mufs, das Heinzesche Lehrbuch eine willkommene Gabe sein. Ob vielleicht später, wenn die Euclidische Geometrie auf der Schule durch die neueren geometrischen Methoden ersetzt ist, die endgültige Reform der Stereometrie im Sinne Haucks eintreten wird und kann, soll hier unerörtert bleiben. Hervorgehoben sei noch, dafs die unvermeidliche Einteilung der Körper nach den Grundflächen bei Heinze ebenso einfach als klar ist, weil sie sich auf die Begriffe stützt, welche dem Schüler aus der Planimetrie geläufig sind, auf Begriffe wie Kongruenz und Ähnlichkeit. Die Einteilung ist so durchsichtig, dafs ein begabter Schüler die Gruppe der Körper mit krummlinigen Grundflächen und geradlinigen Seitenkanten selber vollständig aufstellen kann, wenn er die entsprechende Gruppe mit geradlinigen Grundflächen mit dem Lehrer absolviert hat. —

Aus der Einteilung der Körper folgt überall notwendig die Terminologie. Hauck findet die Heinzesche Terminologie schwerfällig und tadelt die abweichende Bedeutung mancher schon in die Körperlehre eingeführter Ausdrücke wie Sphäroid, Conoid etc. Hierin stimme ich ihm vollkommen bei, mufs jedoch auch bekennen, dafs ich mich ohne jede Schwierigkeit in die Terminologie des Buches hineingefunden habe, was jedenfalls ein Zeugnis für ihre Korrektheit ist. Vielleicht gelingt es dem Herausgeber, den gerügten Mängeln der Terminologie später zum Teil abzuhelfen. —

Hauck fürchtet weiterhin, dafs die Heinzesche Stereometrie bei dem „Mangel an Gedankenfortschritt" den Schüler eher abstumpfen und ermüden, als zur Selbstthätigkeit anspornen wird. Der Schüler, sagt er, mufs hier stets dasselbe Gericht aus verschiedenen Schüsseln

essen, denn bei keinem Körper darf er sich für etwas Anderes interessieren als für den Inhalt. Indessen, stimmt der Vergleich wirklich? Verrichtet der Schüler wirklich nur eine geistlose Schablonen-Arbeit, wenn er die Simpsonsche Formel auf die verschiedenen Körper anwendet? Gewifs nicht! Bei der Anwendung hat er bekanntlich stets die mittlere Durchschnittsfläche zu ermitteln, und diese Untersuchung giebt der Formel bei jedem neuen Körper neuen Reiz. In der analytischen Geometrie kann man auch nicht von einem Gedankenfortschritt reden; und doch verfolgen wir den grofsartig einfachen Grundgedanken dieser Wissenschaft: „Geometrische Verhältnisse algebraisch auszudrücken“ mit ungeschwächtem Interesse durch zahllose Beispiele. Und warum soll man nicht mit demselben Vergnügen zwanzig Körper der Simpsonschen Formel unterwerfen, als zwanzig Funktionen differenzieren? Die Methode zur Entwickelung des Differentials ist bei den verschiedenen Funktionen fast immer dieselbe; man hat herzlich wenig Abwechselung dabei, geschweige einen Gedankenfortschritt. Das Wesen jeder Aufgabe aus der Regel *de tri*, um ein drittes Beispiel anzuführen, besteht im Schlufs von der Vielheit auf die Einheit und umgekehrt. Man kann sagen, dafs eine Anfgabe alle andern enthält, und dennoch ist die Regel *de tri* ein ganzes Jahr eine gesunde Nahrung für den Quartaner, deren er so leicht nicht überdrüssig wird. Was aber bei Heinze ganz besonders geeignet ist, das Einerlei der Simpsonschen Formel zu beleben und dem Schüler ein recht unmittelbares Interesse für die Körperwelt zu erwecken, das sind die Drehungskörper. Sie sind nicht nur eine „hübsche Einzelentwickelung“, sondern besitzen einen grofsen didaktischen Wert, besonders beim Vorhandensein von Modellen, worüber freilich die Hauckscke Kritik kein Wort verloren hat. Endlich liegt es in der Natur der Sache, dafs nicht alle Körper mit der gleichen Ausführlichkeit behandelt und „in den Schnürleib der Formel eingespannt“ werden; ja manche minder wichtige wird der Lehrer nur eben erwähnen, wie er in der Geometrie z. B. den Schüler auch nicht mit „sämtlichen“ Konstruktionsaufgaben des Lehrbuches plagt. Und wenn die Heinzesche Körperwelt in einer verständigen Auswahl dem Schüler vorgeführt wird, fürchte ich nicht, dafs er am Ende, ermüdet und abgespannt, an jedem Körper die fürchterliche Etiquette erblickt:

$$J = \frac{1}{6} h (G + 4f + g).$$

Zuletzt möchte ich auch noch den „genetischen“ Charakter der Heinzeschen Stereometrie verteidigen, den Hauck durch mancherlei antigenetische Koncessionen vollkommen zerstört glaubt; vornehmlich durch die, dafs der Inhalt des Centralkörpers mit Hilfe von Prisma und Pyramide, also auf dem Wege vom Besondern zum Allgemeinen, also antigenetisch gefunden wird. — Indessen auf die Methode der Inhaltsbestimmung bezieht sich der Ausdruck

„genetisch" durchaus nicht. In der Vorrede sagt der Herausgeber nur, dafs die gemeinsame Volumformel ein Band sei, welches die Körper des Systems umschlingt; genetisch aber nennt er die Heinzesche Stereometrie hauptsächlich darum, weil „alle elementargeometrischen Körper aus einem allgemeinen Körper hervorgehen", nämlich durch Spezialisierung desselben; demnach finde ich, könnte sich die Heinzesche Stereometrie genetisch nennen, selbst wenn der Inhalt eines jeden Körpers nach einer besondern Methode berechnet würde. Indessen kann hier sehr wohl eingewendet werden: die Inhaltsberechnung steht einmal im Vordergrunde des ganzen Werkes und was nutzt uns nun das Genetische, wenn wir die wichtigste Eigenschaft des Centralkörpers, den Inhalt, antigenetisch in Kauf nehmen müssen? Wir gehen den Berg hinauf und wieder hinunter! Diesem Einwand läfst sich nur mit didaktischen Gründen begegnen. Ich will im letzten Bilde bleiben. Jeder Spaziergänger weifs, dafs man den Berg auf andere Weise hinunter gehen kann, als man hinaufgestiegen ist. Und wie ist der Weg bei Heinze? Heinze führt uns in kurzem, geradem Zuge auf die Höhe des Centralkörpers; von da öffnet sich uns plötzlich die Aussicht auf eine reiche Körperwelt, und nun beginnt eine verhältnismäfsig mühelose und überaus lohnende Thalwanderung. Ich könnte das noch weiter ausmalen, will jedoch nur bemerken, dafs ich diesen Weg als Lehrer mit dem Schüler lieber gehen möchte, als den von Anfang bis zu Ende gerade ansteigenden. —

Sehr bedauert habe ich es, dafs Hauck in seiner sonst so sachlichen und eingehenden Kritik einmal gegen Windmühlen kämpft, indem er Heinze die Vorstellung unterschiebt, aus dem Centralkörper die Gesamtheit, oder besser die Unendlichkeit der Körperformen ableiten zu wollen, wie alle Planeten ihren Ursprung von ihrem Centralkörper, der Sonne, haben.

Dafs das fragliche Lehrbuch in diesem groben Irrtum nicht befangen ist, ergiebt sich aus der Betrachtung der halbregulären Körper, die ja nicht direkt vom Centralkörper abgeleitet, sondern erst durch Zerlegungen auf Spezialformen desselben zurückgeführt werden. —

Ganz richtig aber betont Hauck, dafs der Centralkörper nicht einmal den allgemeinen Simpsonschen Körper darstellt, und wie er, halte auch ich es für einen wesentlichen Mangel des Heinzeschen Lehrbuches, dafs der allgemeine Giltigkeitsbereich der Simpsonschen Formel nicht festgestellt ist.

Indem ich noch erwähne, dafs das von Hauck vermifste hyperbolische Paraboloid unter dem Namen Halbtetraeder auf S. 58 als Drehungskörper erscheint, will ich nochmals die eingehende Sachlichkeit seiner Kritik anerkennend hervorheben. —

Der Umstand, dafs ich durch persönliche Beziehungen zu dem Herausgeber mit den Absichten der Heinzeschen Stereometrie bekannt und befreundet geworden bin, gab mir den Mut zu dieser Entgegnung.

Bemerkung hiezu von Prof. G. Hauck.

Indem ich mich freue, Herrn Liebetruth Veranlassung gegeben zu haben, die Frage, welche den Gegenstand unseres gemeinsamen Interesses bildet, von einem Standpunkt zu beleuchten, der zwar von dem meinigen verschieden ist, dem ich aber gewifs volle Achtung zolle, möchte ich nur ein Mifsverständnis aufklären, zu dem eine Stelle meines Aufsatzes Veranlassung gegeben zu haben scheint.

Wenn ich den Unterschied des Flächencharakters als ein ausschlaggebendes Moment für die Systematisierung der krummflächigen Körper bezeichnet habe, so meinte ich damit nicht, dafs die Stereometrie sich mit moderner Flächentheorie befassen solle. Das Mifsverständnis ist vielleicht dadurch entstanden, dafs ich sagte, die Stereometrie müsse vom Geiste Monges durchweht sein, und dann ausdrücklich auf die flächentheoretischen Arbeiten von Monge hinwies. Letzteres geschah jedoch lediglich aus dem Grunde, um den Analytikern, die ja leider häufig mit einer gewissen Geringschätzung auf die synthetische Geometrie herabsehen, in Erinnerung zu bringen, dafs der Vater der synthetischen Richtung der Geometrie identisch ist mit dem Vater der neueren analytischen Richtung.

Was die Sache selbst anlangt, so geht meine Ansicht zunächst dahin, dafs die allgemeinen Flächen 2. Ordnung und die höheren windschiefen Regelflächen entschieden aufserhalb des Gebietes der elementaren Stereometrie fallen. Der Umstand, dafs ihr Rauminhalt ohne Integralrechnung bestimmt werden kann, erwirbt ihnen ebensowenig ein Anrecht auf die elementare Stereometrie, als z. B. die Ellipse oder die Cycloide noch in das Bereich der elementaren Planimetrie fallen, weil sie ohne Hilfe der Integralrechnung quadriert werden können. Die Stereometrie scheint mir ebenso wie die Planimetrie höhere Aufgaben zu haben als die blofse Inhaltsberechnung.*) Gerade bei den Flächen 2. Ordnung scheint mir unter

*) Wenn man sagt, „Stereometrie“ heifse zu deutsch: Körpermessungslehre, so ist daran zu erinnern, dafs ebenso „Geometrie“, „Planimetrie“: Erdmessungslehre, Flächenmessungslehre heifst, dafs aber trotzdem die Bestimmung des Flächeninhalts nur ein Kapitel der Planimetrie bildet, das den übrigen Kapiteln coordiniert — und weit entfernt ist, auf das ganze Lehrgebäude der Planimetrie bestimmend zu wirken. Die Stereometrie steht zur Planimetrie in der engsten Analogieenbeziehung. Ganz ebenso wie in der Planimetrie ist auch in der Stereometrie der konstruktive Inhalt ein unverhältnismäfsig reicherer als der rechnerische Inhalt. (Hinsichtlich des ersteren vgl. man die Sammlung von konstruktiven Aufgaben in Kommerell-Hauck, Lehrbuch der Stereometrie. 6. Aufl. Tübingen 1887.) Diese Thatsache, welche in Widerspruch mit der Annahme einer dominierenden Stellung der Körperberechnung tritt, mag es vielleicht erklären, dafs sich so vielfach das Bestreben zeigt, durch Hereinziehung von Körperformen, die aufserhalb des Gebietes der elementaren Stereometrie liegen, den rechnerischen Inhalt derselben zu vergröfsern.

allen geometrischen Betrachtungen, die sich an dieselben knüpfen, die Inhaltsbestimmung eine der untergeordnetsten zu sein.

Wenn man indessen einmal sich entschliefst, die Flächen 2. Ordnung noch in das System aufzunehmen, wie es von Heinze geschehen ist, so mufs man auch die erforderlichen Konsequenzen ziehen und wenigstens die sich von selbst darbietenden primitivsten Betrachtungen über die Unterschiede des Flächencharakters aufnehmen. Dazu bedarf es ebenso wenig der höheren Mathematik, als es zur Inhaltsbestimmung der Integralrechnung bedarf. Die bezüglichen Fragen drängen sich vielmehr dem Schüler ganz von selbst auf.

Die Erörterung darüber, dafs der Cylindermantel und der Kegelmantel abwickelbar ist, oder dafs umgekehrt ein Modell von Cylindermantel und Kegelmantel aus Papier hergestellt werden kann, führt den Schüler ganz von selbst zu der Frage, ob dies bei der Kugel nicht ebenfalls möglich sei. — Dafs die Kugelkalotte nicht abwickelbar sein könne, sieht er wohl leicht ein. Aber da steht ja der Schulglobus, auf welchem er die Oberfläche thatsächlich mit einzelnen Papierstreifen überklebt sieht. Also möchte doch vielleicht das Kugelzweieck abwickelbar sein? — Diese Frage darf nach meiner Ansicht vom Lehrer unter keinen Umständen abgewiesen werden, weil sie, wie gesagt, vom Schüler (wenigstens dem aufgeweckteren) selbst gestellt wird, ganz abgesehen von den vielen praktischen Anwendungen im täglichen Leben.

Ein weiterer Schritt im Gedankengang des Schülers dürfte dann wohl sein, dafs bei Kegel und Cylinder die Entwickelbarkeit wohl mit den geradlinigen Mantellinien zusammenhängen werde, welche der Kugel abgehen. Er wird also auf die Vermutung kommen, dafs alle Flächen mit geradlinigen Mantellinien — also auch das einschalige Hyperboloid — entwickelbar seien. Auch die Erörterung dieser Frage kann vom Lehrer unmöglich unterdrückt werden. Es mufs also der Unterschied zwischen entwickelbaren und windschiefen Regelflächen unter allen Umständen besprochen werden (NB immer unter der Voraussetzung, dafs die letzteren Flächen in das System wirklich aufgenommen werden).

Welchen Gefahren man ausgesetzt ist, wenn man die Betrachtung der windschiefen Flächenelemente einer Regelfläche umgeht, habe ich in meinem Aufsatze gezeigt. Zum Verständnis dieses Gegenstandes ist aber nichts weiter erforderlich als einfache direkte Raumanschauung. Dafs dabei das Unendlich-kleine hereinspielt, darf nicht scheu machen. Denn ohne Unendlich-kleines kommt man in der Stereometrie überhaupt nicht aus. Dafs zwei unendlich nahe Mantellinien sich nicht schneiden, sondern windschief sind, kann man am Rotationshyperboloid leicht dadurch nachweisen, dafs im Falle des Schneidens die Tangenten irgend zweier Parallelkreise in den Schnittpunkten einer Mantellinie parallel sein müfsten. Die

richtige Vorstellung von der Natur des windschiefen Flächenelements kann man leicht gewinnen, indem man eine Gerade an zwei unendlich nahen Mantellinien so hingleiten läfst, dafs sie beständig Parallelkreis-Tangente ist.

Auch der Unterschied zwischen elliptischem und hyperbolischem Krümmungscharakter oder — um weniger flächentheoretisch zu sprechen — zwischen kuppenförmiger und sattelförmiger Krümmung kann dem Schüler leicht durch direkte räumliche Anschauung klar gemacht werden. Man zeige ihm, wie bei einer entwickelbaren Fläche die Tangentialebene längs einer ganzen Mantellinie berührt, während bei kuppenförmiger Krümmung die Tangentialebene einen isolierten Punkt mit der Fläche gemein hat, und bei sattelförmiger Krümmung die Tangentialebene die Fläche nach einer Kurve schneidet, die im Berührungspunkt einen Selbstdurchschnitt hat. Um letzteres zur Anschauung zu bringen, genügt es (falls kein zerlegbares Modell aus festem Material zur Verfügung steht), an einem frischen Bohnenkern mit dem Messer einen tangentialen Schnitt durch die Keimgrube zu führen. Auch gewisse Rübenformen oder eine gebogene Wurst kann dazu verwendet werden.*) Wenn man einmal das einschalige Hyperboloid in den Kreis der Betrachtung zieht, so mufs man meines Erachtens nothwendigerweise auch auf den Begriff der sattelförmigen Krümmung eingehen und dem Schüler zeigen, wie die zwei im Berührungspunkt sich durchschneidenden Zweige der Schnittkurve einer Tangentialebene beim Hyperboloid durch zwei geradlinige Mantellinien vorgestellt werden.

Das Gesagte ist aber auch alles, was gegeben zu werden braucht. Wenn ein anderer sagt, das überschreite die Grenzen der elementaren Stereometrie, so hat derselbe gewifs Recht. Er wird aber dann das einschalige Hyperboloid besser ganz aufser Betracht lassen. Entweder innerhalb bescheidener Grenzen recht, oder gar nicht! Was hat es für einen Wert, den Rauminhalt eines Körpers berechnen zu lassen, dessen äufsere Gestalt in ihren primitivsten Beziehungen nicht verstanden wird?

Zur Ehrenrettung des Satzes vom Parallelogramm der Rotationen.

Von Dr. A. Schmidt am Realgymnasium in Stuttgart.

(Mit 1 Fig.)

Im 3. Hefte des laufenden Jahrgangs dieser Zeitschrift**) nimmt Herr Dr. Hefs Veranlassung, den Satz vom Parallelogramm der Rotationen zu bemängeln, als nur für unendlich kleine Zeitabschnitte dt, nicht für endliche Zeitabschnitte t giltig. Dieselbe Bemängelung

*) Beiläufig mag auch auf die rohe Kartoffel als ein vorzügliches Material zum Schneiden von stereometrischen Modellen hingewiesen werden.

**) S. 183—187 d. B. D. Red.

findet sich auch in kürzerer Ausführung in Wiedemanns Beiblättern, 3. Stück 1887. Bei der fundamentalen Bedeutung, welche der Satz nicht nur speciell für die Kreiselbewegung, sondern allgemein wegen seiner reciproken Beziehung zum Satz vom Parallelogramm der Kräfte besitzt*), sei es mir gestattet, für die Würdigung der Allgemeingiltigkeit des Satzes hier einzutreten.

Im 2. Heft des Jahrgangs 1886 dieser Zeitschrift hat Herr G.-R. Hauck die Analogie der Kreiselbewegung mit der Centralbewegung behauptet, und zwar wie Herr Dr. Francke nachgewiesen hat, unter Vernachlässigung der Nutationsbewegung**). Dafs diese Analogie auch ohne die gemachte Vernachlässigung zu Recht besteht, glaube ich in meinem von Herrn Dr. Hefs lobend erwähnten Aufsatz in den „mathematisch-naturwissenschaftlichen Mitteilungen" bewiesen zu haben. Es wurde als tieferer Grund der Analogie der beiden Bewegungen die Analogie, bezw. Reciprocität der zwei Gesetze vom Parallelogramm der linearen und dem der angularen Geschwindigkeiten nachgewiesen, eine Reciprocität, welche sich auf alle aus beiden Gesetzen abgeleiteten Sätze mit erstreckt. Da ich die Kreiselbewegung selbst, dem Vorgang von Airy***) entsprechend, rein kinematisch behandelt habe, unter Vernachlässigung, nicht des ganzen Nutationsausschlags, sondern der höheren Potenzen desselben, so enthüllte sich sowohl die Präcessionsbewegung, als die Rotationsbewegung als Analogon der Centralbewegung. Hätte nun Herr Dr. Hefs Recht, würde der Satz vom Parallelogramm der Rotationen nur beschränkte Geltung haben, während dessen Analogon, der Satz vom Parallelogramm der linearen Geschwindigkeiten, anerkannt allgemeine Geltung besitzt, so wäre die behauptete vollkommene Reciprocität eitel Geflunker, die ganze von Herrn G.-R. Hauck angeregte Gedankenreihe hinfällig, die Frage in rückläufiger Bewegung. Dafs auch Herr G.-R. Hauck in seiner kurzen Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Dr. Hefs im 3. Heft dieser Zeitschrift auf die Allgemeingiltigkeit des Satzes so kurzweg verzichtet, hat auf mich den Eindruck gemacht, wie wenn eine Mutter ihres Kindes vergifst.

Von Seiten des Herrn Dr. Hefs mufs ein Mifsverständnis vorliegen, über dessen Ursprung ich mir aus den von ihm gebrauchten Ausdrücken: „Geschwindigkeit, die nur für die Zeit dt als geradlinig angesehen werden darf" — als ob es auch krummlinige Geschwindigkeit gäbe — „alte Axen" und „Reihenfolge der successiven Drehungen", eine schwache Vorstellung bilden zu können glaube.

Eine Gröfse oder ein Gesetz können für verschwindendes t nur dann einen anderen Wert, eine andere Form, annehmen als für

*) Moebius in Crelle's Journal. Bd. XVIII. S. 189 u. f.
**) S. XVII. (1886), 81—90 und 422—424. D. Red.
***) G. B. Airy, mathematical tracts. Cambridge 1831.

endliche Werte von t, wenn die Gröſse, wenn das Gesetz mit t veränderlich ist. Die Lage der resultierenden Rotationsaxe ist aber nur von der Lage der Axen der komponierenden Rotationen und von der Gröſse der komponierenden Rotationsgeschwindigkeiten abhängig, nicht von der Zeit t, also muſs die Gröſse und Lage der Resultante ebensolang konstant bleiben, als die Lage und Gröſse der Komponenten. Daſs veränderliche Komponenten auch eine veränderliche Resultante erzeugen werden, ist selbstverständlich, aber auch die veränderliche Resultante entspricht zu jeder Zeit und während jeder Zeitdauer demselben Gesetz, das die nämliche Allgemeingiltigkeit besitzt wie das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte. Wem ist je eingefallen, bei dessen Aufstellung „markant hervorzuheben" daſs es nur für unendlich kleine Zeitabschnitte dt giltig sei? Ich erlaube mir also, den angefochtenen Satz aus meiner von Herrn Dr. Hess citierten Arbeit zu wiederholen und auf seiner Allgemeingiltigkeit zu beharren:

„Wenn OA und OB zwei Axen sind, um welche ein starrer Körper mit den ang. Geschwindigkeiten a und b rotiert, so lassen sich diese beiden gleichzeitigen Rotationen durch eine Resultante ersetzen, nehmlich durch eine Rotation um eine Axe A mit einer ang. Geschwindigkeit c, wobei a, b, c in den Richtungen OA, OB, OC, die Längenzahlen der Seiten und der Diagonale eines Parallelogramms sind."

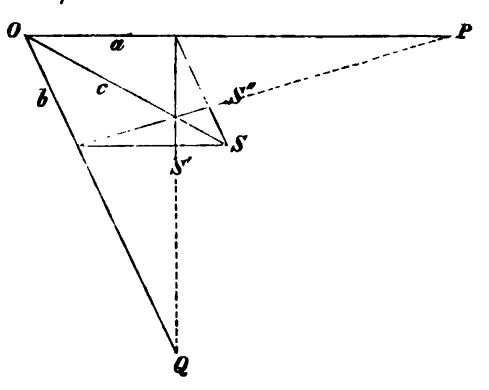
Der Beweis beruht auf dem Satze, daſs gleiche entgegengesetzte lineare Geschwindigkeiten eines Punktes sich aufheben. Auch diesem Satz klebt keine Beschränkung auf die Zeit dt an. Wie fruchtbar für die Wissenschaft könnte dieser Satz vom Parallelogramm der Rotationen noch werden, würde man alle Konsequenzen seiner Reciprocität mit dem Satze vom Parallelogramm der linearen Geschwindigkeiten ziehen! Wie den linearen die angularen Geschwindigkeiten, so sind den linearen Beschleunigungen (Kräften bei Masse 1) die angularen reciprok; der Theorie der Kräftepaare entspricht eine Theorie der angul. Beschleunigungspaare; wie ein Kräftepaar eine Rotation erzeugt, so erzeugt ein angul. Beschleunigungspaar eine lineare Geschwindigkeit. Wie würde sich die analytische Mechanik gestalten, wenn man statt der Kräfte angulare Beschleunigungspaare und statt der Kräftepaare Rotationen einführen würde? Wie einfach z. B. die Theorie des nutationslosen Kreisels (Kreisel, dessen Schwerpunktsaxe einen Kreiskegel beschreibt), sich mit dem Begriff der Rotationen entwickeln läſst, im Vergleich mit der Behandlung deſſelben Problems mittelst Kräftepaaren, glaube ich in meiner oben erwähnten Arbeit gezeigt zu haben, wenn man dieselbe mit der Behandlung von Poinsot*) vergleichen will. Wie schwerfällig und anfechtbar ist der landesübliche Beweis des Foucaultschen Pendel-

*) Liouville, journal etc. Bd. XVIII. S. 41.

gesetzes mittelst Vergleichung der Richtungen linearer Geschwindigkeiten, wie schlagend und kurz die Erklärung mittelst des Satzes vom Parallelogramm der Rotationen!*)

Eines gebe ich dem Herrn Dr. Hefs zu, nemlich dafs „succesive“ Rotationen um die Axen OA und OB nicht vertauschbar sind, da sie bei vertauschter Reihenfolge zu verschiedenem Resultate führen, zu umso verschiedenerem, je länger die Zeit t ist, während welcher jede derselben stattfindet, so dafs nur bei verschwindend kleinem t die Reihenfolge vertauschbar wird. Was beweifst das aber gegen die Allgemeingiltigkeit unseres Satzes, bei welchem es sich nicht um successive Rotationen handelt, auch nicht einmal um solche, die nach der Zeit dt alternieren, sondern um gleichzeitige? Nehmen wir das lineare Analogon:

Punkt O habe gegen P die lineare Geschwindigkeit a, gegen Q die lineare Geschwindigkeit b, dann ist seine resultierende Geschwindigkeit die Diagonale $OS = c$. Bleiben a und b nach Richtung und Gröfse ungeändert, (wenn etwa P und Q im Unendlichen liegen), so bleibt auch c constant während jeglicher Zeitdauer. Aber auch wenn Richtung und Gröfse von a, b und c sich ändern, so bleibt doch zwischen ihnen das Parallelogrammgesetz bestehen während jeder beliebigen Zeit t. Bei (nach Richtung und Gröfse) constanten Werten von a, b und c gilt das Gesetz aufser für die Geschwindigkeiten auch für die Wege in den 3 Richtungen für jede Zeit t; bei veränderlichen Werten von a, b und c, wobei der Weg von O im allgemeinen krummlinig wird (nie aber seine Geschwindigkeit), gilt das Gesetz immer noch voll für die Geschwindigkeiten, für die Wege aber nur bei verschwindend kleinem t. Lasse ich Punkt O zuerst mit der Geschwindigkeit a gegen P sich bewegen, alsdann mit der Geschwindigkeit b gegen Q, etwa beidemal während der Zeiteinheit, so gelangt er nach S', vertausche ich die Reihenfolge der successiven Bewegungen, so gelangt er noch S'', in keinem Falle nach S, und doch stellt OS nach Richtung und Gröfse die resultierende Geschwindigkeit dar und der Punkt O wird während seiner gleichzeitigen Annäherung an die Punkte P und Q stets eine resultierende Geschwindigkeit c besitzen, welche sich nach dem Gesetz des



*) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. S. 59.

Parallelogramms der Geschwindigkeiten aus den Komponenten a und b und deren Richtungen bestimmt. Also, wenn Herr Dr. Heſs das Wort Rotation im Sinne von Weg während gegebener Zeit auffassend, das Gesetz auf den Weg des rotierenden Punktes und die Komponenten dieses Weges bezieht, so hat er mit der Beschränkung auf die Zeit dt Recht; von einer resultierenden Axe zu reden, hätte dann für die endliche Zeit t keinen Sinn. Ich aber habe unter der Überschrift: „Das Parallelogramm der Rotationen" den oben wörtlich citierten Lehrsatz bewiesen, in welchem ich mich absichtlich des deutlichen Begriffs „angulare Geschwindigkeit" bedient habe, und in dieser Form verdient der Satz keine Bemängelung.

Bemerkungen zur vorstehenden Entgegnung.

Von Dr. W. Hess in München.

In den vorstehenden Zeilen sind einige gegen mich gerichtete Bemerkungen enthalten, auf die es mir gestattet sei, in Kürze zu antworten. Anlaſs zu denselben bietet eine im 3. Hefte des laufenden Jahrgangs ds. Z. erschienene Note von mir, in welcher ich mich mit einer Abhandlung des Herrn Prof. Hauck, betreffend die elementare Darstellung des Kreiselproblems, beschäftigte. Trotz der Anerkennung, die ich letzterer im allgemeinen gezollt, konnte ich doch nicht unterlassen, einzuschalten, daſs ich darin den Hinweis auf die Giltigkeit des „Parallelogramms der Rotationen" innerhalb unendlich kleiner Zeitelemente dt nur ungern vermisse; auch der Abhandlung des Herrn Prof. Schmidt „wollte ich diese notwendige Beschränkung zugefügt wissen".

Unter dem „Parallelogramm der Rotationen" verstand ich dabei, wie es in der Mechanik wohl üblich ist, das Parallelogramm der durch Drehung um zwei sich schneidende Axen veranlaſsten unendlich kleinen Drehungsamplituden, jede derselben vom Schnittpunkte aus auf der ihr zugehörigen Drehungsaxe aufgetragen: nicht nur sprach ich a. a. O. durchweg von der notwendigen Kleinheit der „Drehungen", von „Drehungen, die dem Zeitelemente dt proportional sein müssen" — ich wies auch ausdrücklich darauf hin, daſs bei „Rotationen von endlicher Gröſse" die resultierende Rotationsaxe mit den zwei ursprünglichen Axen nicht mehr in eine Ebene zu liegen komme und also nicht mehr zur Vorstellung eines Parallelogramms der Rotationen Anlaſs geben könne.

Ich hielt und ich halte die Hervorhebung der soeben bedeuteten beschränkten Giltigkeit in einem für pädagogische Zwecke geschriebenen Artikel über Kreiselprobleme für unerläſslich, da ich der Überzeugung bin, daſs vom Schüler die Idee der Konfiguration, in welcher die Rotationsaxen Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms bedingen, möglicherweise ohne Änderung auf jenen Fall

übertragen werde, in welchem die Rotationsamplituden, während endlicher Zeit t beschrieben, endliche Werte besitzen.

Trotzdem ich nun mit keinem Worte von dem „Parallelogramm der Rotationsgeschwindigkeiten", sondern nur von jenem der „Rotationen" gesprochen, schreibt Herr Prof Schmidt eine „Ehrenrettung" — nicht etwa des „Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten", sondern des „Parallelogramms der Rotationen", obgleich ich letzères selbst betont, ersteres gar nicht erwähnt habe. Ich könnte mich deshalb damit begnügen, die gegen mich geführte Replik als gegenstandslos zu bezeichnen, wenn nicht eine formale Inexaktheit meiner Note Herrn Prof. Schmidt Anlafs gegeben hätte, eine gewisse moralische Entrüstung an den Tag zu legen. Der Herr Verfasser citiert nämlich als mein Produkt den Ausdruck „Geschwindigkeit, die nur für die Zeit dt als geradlinig angesehen werden darf", und fragt sich, ob es auch krummlinige Geschwindigkeiten gäbe.

Ich mufs entschieden dagegen Protest erheben, dafs man einen aus dem Zusammenhange gerissenen Satz in dieser Weise zu verwerten trachtet. Im Originale heifst es nämlich wörtlich: „es darf nicht vergessen werden, zu bemerken, dafs die daselbst (nämlich in der Hauckschen Abhandlung) verwendeten Geschwindigkeiten cw und $c'w'$ sich eigentlich auf je einem Kreise um die zugehörige Rotationsaxe vollziehen und demgemäfs nur bei sehr kleiner Drehungsamplitude als geradlinig angenommen werden können". Ich glaube, es unterliegt keinem Zweifel, dafs in Verbindung mit dem dort Vorausgehenden und Nachfolgenden dieser Satz graphische Repräsentationen von Geschwindigkeiten meint, Wegelängen oder Rotationsamplituden, die sich in einer endlich angenommenen Zeit (gewöhnlich der Zeiteinheit) erst als solche „vollziehen", und dafs die an fraglicher Stelle stehen gebliebene Bezeichnungsweise „Geschwindigkeit" auf ein Versehen bei der Korrektur zurückzuführen ist. Gewifs dürfte die Belassung dieses Wortes die Allerwenigsten dazu verleitet haben, sich von meiner a. a. O. niedergelegten Ansicht nur „eine schwache Vorstellung" gebildet zu haben.

Zum Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Prof. Dr. LIEBER-Stettin und C. MÜSEBECK-Waren.

A. Auflösungen.

648. (Gestellt von Fleischhauer XVIII_1, 36.) Welche mittlere lineare Geschwindigkeit v besitzt ein bestimmter Punkt in der Peripherie eines kreisrunden, gleichmäfsig schnell in gerader Richtung auf einer Ebene fortrollenden Rades von da ab, wo dieser Punkt die Ebene berührt bis dahin, wo das Rad die erste Viertel-, die zweite Viertel- und die volle Umdrehung gemacht hat, wenn die Radhöhe gleich h und die Zeit einer Umdrehung t ist?

1. Auflösung. Der Punkt P beschreibt eine Cykloide. Er berühre die Ebene in A, befinde sich nach einer Viertelumdrehung in B, nach einer halben in C, dem Scheitel der Cykloide. Nimmt man diesen als Koordinatenanfang und die Senkrechte CD zur Basis als XAchse, so ist die Länge des Cykloidenbogens, vom Scheitel an gerechnet, gleich $2\sqrt{hx}$, also $\widehat{AC} = 2h$, $\widehat{BC} = h\sqrt{2}$, $\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC} = h(2 - \sqrt{2})$. Die mittlere Geschwindigkeit in den einzelnen Teilen einer Umdrehung ist demnach $v_1 = \frac{4h(2-\sqrt{2})}{t}$; $v_2 = v_3 = \frac{4h}{t}$.

FLEISCHHAUER (Gotha). SCHMIDT (Spremberg). STEGEMANN (Prenzlau).

2. Auflösung. Der Punkt P habe nach Drehung des Rades um den Winkel α in Folge der Rotation die Tangentialgeschwindigkeit $PN = \frac{\pi h}{t}$ und wegen des Weiterrollens des Rades die translatorische Geschwindigkeit $PR = \frac{\pi h}{t}$, so dafs die Diagonale PQ des aus PN und PR konstruierten Parallelogramms die lineare Geschwindigkeit darstellt. Da $\sphericalangle PNQ = \alpha$ ist, mufs $PQ = \frac{2\pi h}{t} \sin\frac{\alpha}{2}$ sein, so dafs also die mittlere Geschwindigkeit für die erste Viertelumdrehung $\lim_{n=\infty} \frac{2\pi h}{t} \sum_1^n{}_k \frac{\sin k\frac{\pi}{4n}}{n}$ wird. Nun ist $\sum_1^n{}_k \frac{\sin k\vartheta}{n}$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\vartheta \sin\frac{n\vartheta}{2}}{n \sin\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{n}\left(\sin\frac{n\vartheta}{2}\cot\frac{\vartheta}{2} + \cos\frac{n\vartheta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left((1-\cos n\vartheta)\cot\frac{\vartheta}{2} + \sin n\vartheta\right), \quad \text{also} \quad \sum_{1}^{n}{}_{k} \frac{\sin k\frac{\pi}{4n}}{n}$$

$$= \frac{\cot\frac{\pi}{8n}(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2n} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\cot\frac{\pi}{8n}}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{8}{\pi},$$

da $\lim \frac{\cot\frac{\pi}{8n}}{n} = \frac{8}{\pi}$ ist. Mithin wird $v_1 = \frac{4h(2-\sqrt{2})}{t}$. Analog die Ableitung für die anderen Geschwindigkeiten.

Bermann (Liegnitz). Hodum (Staßfurt). Lengauer (München). Schmidt (Spremberg). Stoll (Bensheim).

649. (Gestellt von Weinmeister XVIII$_1$, 36.) Es soll der Inhalt V eines Prismatoids aus seiner Höhe h und zwei näher zu bestimmenden ebenen Schnittfiguren D_1 und D_2 angegeben werden, wenn letztere auf verschiedenen Seiten des Mittelschnitts und ihm im gleichen Abstande y von letzterem parallel gelegen sind.

Auflösung. Ist $F = a + bx + cx^2$ der Inhalt einer Schnittfläche im Abstande x von der Basis, so ist bekanntlich das Volumen des Prismatoids mit der Höhe $h : V = ah + \frac{1}{2}bh^2 + \frac{1}{3}ch^3$ (vergl. u. a. Baltzer, Elemente II, Stereometrie § 9, 7 und Sinram, Grunerts Archiv 1879). Nun ist der Mittelschnitt $M = a + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{4}ch^2$ (1); ferner $D_1 = a + b\left(\frac{1}{2}h - y\right) + c\left(\frac{1}{2}h - y\right)^2$ oder $D_1 = a + \frac{1}{2}b(h-2y) + \frac{1}{4}c(h-2y)^2$ (2) und $D_2 = a + \frac{1}{2}b(h+2y) + \frac{1}{4}c(h+2y)^2$ (3). Aus (1), (2) und (3) ergiebt sich nun

$$c = \frac{D_1 + D_2 - 2M}{2y^2}, \quad b = \frac{2hM - h(D_1 + D_2) - y(D_1 - D_2)}{2y^2} \quad \text{und}$$

$$a = \frac{2M(4y^2 - h^2) + h^2(D_1 + D_2) + 2hy(D_1 - D_2)}{8y^2}; \text{ mithin}$$

$V = \frac{2Mh(12y^2 - h^2) + h^3(D_1 + D_2)}{24y^2}$. Wählt man nun y so, daſs $12y^2 - h^2 = 0$, also $y = \frac{1}{6}h\sqrt{3}$ ist, so ist $V = \frac{1}{2}h(D_1 + D_2)$.

Emmerich (Mülheim a. d. Ruhr). End (Würzburg). v. Jettmar (Wien). Lengauer. Lucke (Zerbst). Stammer (Düsseldorf). Stoll. Weinmeister (Tharand).

650. (Gestellt von Weinmeister XVIII$_1$ 36.) Gegeben ist ein Prismatoid mit den Grundflächen k und g, dem Mittelschnitt m und der Höhe h; man soll eine den Grundflächen parallele Ebene

legen, a) so dafs dieselbe eine Schicht abschneidet, welche so grofs ist wie das über der Schnittfigur stehende gleich hohe Prisma; b) welche den Körper und die Höhe in demselben Verhältnis teilt.

Auflösung. a) Ist die in der Höhe x gelegte Schnittfläche $= a + bx + cx^2$, so ist das Volumen der Schicht $= ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3$ und das Volumen des Prismas $= ax + bx^2 + cx^3$; da nun beide gleich sein sollen, so ist $x = -\frac{3b}{4c}$. Aus $k = a$, $g = a + bh + ch^2$ und $m = a + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{4}ch^2$ ergiebt sich

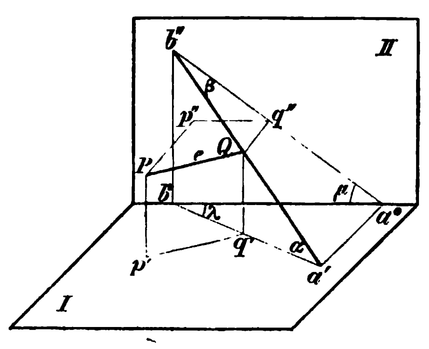
$$x = \frac{3(3k + g - 4m)}{8(k + g - 2)}h.$$

b) Es soll $ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 : ah + \frac{1}{2}bh^2 + \frac{1}{3}ch^3 = x : h$ sein; mithin $x = -\frac{3b}{2c} - h$ und wenn man hier wieder die aus $k = a$, $g = a + bh + ch^2$ und $M = a + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{4}ch^2$ für b und c gefundenen Werte einsetzt, so ergiebt sich $x = \frac{5k - g - 4M}{4(k + g - 2M)}h.$

Emmerich. End. Lengauer. Lucke. Stammer. Stoll. Weinmeister.

651. (Gestellt von Piepgras XVIII$_1$, 36.) a) Die Projektionen einer geraden Linie zu bestimmen, welche mit den Projektionsebenen die Winkel α und β bildet und von einem durch seine Projektionen gegebenen Punkt P den Abstand e hat. b) Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, welche mit den Projektionsebenen I und II die Winkel α und β bildet und von einem gegebenen Punkt P den Abstand e hat. Siehe beistehende Figur.

a) Analysis. Die Projektionen der gesuchten Geraden seien $a'b^0$ und a^0b'', mit der Projektionsachse bilden sie die Winkel λ und μ, so ist $\sin\lambda = \frac{a^0a'}{b^0a'} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ und $\sin\mu = \frac{b^0b''}{a^0b''} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$. Die Gerade ist nicht vollständig, sondern als Seite eines Cylinders bestimmt, dessen Achse durch P geht. Unter den Seiten des Cylinders befinden sich zwei von der Lage, dafs die Lote von P auf dieselbe parallel I sind. Eine solche Gerade ist aber dadurch bestimmt, dafs die Horizontalprojektion des Lotes von P auf dieselbe gleich e und die Projektion desselben auf II parallel zur Achse ist.



Konstruktion. Auf der Peripherie eines Halbkreises über der beliebigen Strecke mn bestimme man die Punkte r und s so, daſs $\sphericalangle rmn = \alpha$ und $\sphericalangle smn = \beta$ ist. In dem beliebigen Punkte a^0 der Achse errichte man in I das Lot $a^0a' = ns$; der Kreis um a' mit mr schneide die Achse in b^0; in b^0 errichte man in II das Lot $b^0b'' = nr$ und ziehe $b''a^0$. Die Projektionen des Punktes P seien p', p''; auf dem Lote von p' auf b^0a' trage man $p'q' = e$ ab, das Lot von q' auf die Achse schneide die durch p'' zur Achse gezogene Parallele in q''. Dann sind die durch q' und q'' zu b^0a' resp. a^0b'' gezogenen Parallelen die gesuchten Projektionen.

b) Analysis. Die Winkel, welche eine Ebene E mit den Projektionsebenen I und II bildet, sind die Complemente der Neigungswinkel der Normale der Ebene E gegen I und II. Setzt man $90^0 - \alpha = \alpha_1$, $90^0 - \beta = \beta_1$, so kann man die Aufgabe in die vier folgenden zerlegen: 1) Die Projektionen einer Geraden zu konstruieren; 2) Die Parallele zu dieser Geraden durch den Punkt P zu ziehen; 3) auf dieser Geraden den Punkt F so zu bestimmen, daſs $PF = e$; 4) durch F eine Ebene senkrecht zu PF zu legen.

Konstruktion. Zuerst wie in a), nur ist $\sphericalangle rmn = \alpha_1$, $\sphericalangle smn = \beta_1$. Auf mn trage man $m\nu = e$ ab, der Halbkreis über $m\nu$ treffe mr in ϱ und ms in σ. Auf den durch p' und p'' zu resp. b^0a' und $b''a^0$ gezogenen Parallelen trage man $p'q' = m\varrho$ und $p''q'' = m\sigma$ nach derselben Seite hin ab, das Lot von q' auf b^0a' treffe die Achse in t^0, die Senkrechte in t^0 auf der Achse treffe die durch q'' zur Achse gezogene Parallele in u''; ferner ziehe man $u''v^0 \perp a^0b''$ und $v^0w' \parallel t^0q'$, so sind v^0u'' und v^0w' die gesuchten Geraden.

Beyel (Zürich). Emmerich. End. Hodum. Lengauer. v. Miorini (Bielitz). Piepgras (Mülheim a. d. R.). Sauter (Ulm). Stammer.

652. (Gestellt von Schlömilch XVIII_1, 36.) a) In eine gegebene Ellipse soll ein gleichseitiges Sehnensechseck konstruiert werden, wovon zwei Gegenseiten parallel zur groſsen (oder zur kleinen) Achse liegen. b) Um eine gegebene Ellipse soll ein gleichseitiges Tangentensechseck konstruiert werden, wovon zwei Gegenseiten parallel zur groſsen (oder zur kleinen) Achse liegen.

a) 1. Auflösung. Die Halbmesser der gegebenen Ellipse seien $OA = a$ und $OB = b$, die vom Scheitel A ausgehende Seite des Sechsecks, welche im positiven Quadranten liegt, sei AC; die Koordinaten von C seien x und y. Dann ist $AC = 2x$, mithin $4x^2 = (a - x)^2 + y^2$; mit Rücksicht auf die Gleichung der Ellipse ergiebt sich hieraus $(3a^2 + b^2)x^2 + 2a^3x - a^2(a^2 + b^2) = 0$. Da die Wurzel $-a$ zu verwerfen ist, so ergiebt sich

$$x = \frac{a(a^2 + b^2)}{3a^2 + b^2}.$$

Bermann. Beyel. Emmerich. Fuhrmann (Königsberg i. Pr.) von Jettmar. von Miorini. Nisetbo (Zara). Schmidt. Stammer. Stegemann. Stoll. Tauberth (Dresden.)

Konstruktion. Bezeichnet man $\sphericalangle CAO$ mit φ, so ist $\cos\varphi = \frac{a-x}{2x} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$. Man fälle $OD \perp AB$, schlage mit AD um A einen Kreis, welcher AO in E trifft, die Senkrechte auf AO in E treffe den Kreis mit AB um A in F, dann schneidet AF die Ellipse in C. Fällt man noch $CQ \perp OA$, so ist

$$\cos\varphi = \frac{AQ}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AB} = \frac{AO^2}{AB^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

von Jettmar. von Miorini. Nisetro. Schmidt. Stegemann. Stoll.

Sollen zwei Gegenseiten parallel der kleinen Achse sein, so ist a mit b zu vertauschen.

2. Auflösung. Wie vorher sei AC eine Seite des Sechsecks, die nächste von C ausgehende Seite, welche parallel OA ist, treffe OB in G; dann ist $AC = 2CG$. Nun ist aber der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkte A und von einer festen Geraden OB in einem gegebenen Verhältnis $\varepsilon = \frac{2}{1}$ $(\varepsilon > 1)$ stehen, eine Hyperbel, deren einer Brennpunkt A, deren zugehörige Leitlinie OB, und deren Excentrizität $\varepsilon = \frac{2}{1}$ ist. Der zugehörige Scheitel A' dieser Hyperbel liegt daher so, dafs $AA' : A'O = 2:1$, d. h. dafs $OA' = \frac{1}{3}OA$ ist. Ist O' der Mittelpunkt dieser Hyperbel, so ist $\frac{O'A}{O'A'} = \varepsilon = \frac{2}{1}$, d. h. es ist $O'A = 2O'A'$ oder $O'A' = O'A$, woraus sich die Hyperbel ergiebt.

Sauter.

b) Diejenige Seite des Sechsecks, deren einer Endpunkt L in der Verlängerung der grofsen Achse liegt, sei LM mit dem Berührungspunkte $H(x_1, y_1)$; ihre Verlängerung treffe die Verlängerung der kleinen Achse in G; die Koordinaten von M seien x und b; $\sphericalangle OLM$ werde mit φ bezeichnet; dann ist $OL = \frac{a^2}{x_1}$ und $OG = \frac{b^2}{y_1}$. Man erhält daher folgende vier Gleichungen $2x\sin\varphi = b$; $x\operatorname{tg}\varphi + b = \frac{b^2}{y_1}$; $2x\cos\varphi + x = \frac{a^2}{x_1}$, $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$, aus welchen φ durch Elimination von x, x_1 und y_1 zu bestimmen ist; es ergiebt sich $4a^2\cos\varphi^2 + 4b^2\cos\varphi - (4a^2 - b^2) = 0$, mithin $\cos\varphi = \frac{-b^2+\sqrt{4a^4-a^2b^2+b^4}}{2a^2} = \frac{-b+\sqrt{2a^2+b\sqrt{a^2-b^2}}\sqrt{2a^2-b\sqrt{a^2-b^2}}}{2a^2}$, von denen sich die letztere besser zur Konstruktion eignet. — Zur Berechnung einer Seite $2x$ dienen die Gleichungen $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ (1), $b^2xx_1 + a^2by_1 = a^2b^2$ (2) und $x_1(x + \sqrt{4x^2 - b^2}) = a^2$ (3). Aus (1) und (2) ergiebt sich durch Elimination von $y_1 : x_1 = \frac{2a^2x}{a^2+x^2}$ und dies in (3) substituirt:

$$x = \sqrt{\frac{2b^2 - a^2 + 2\sqrt{4a^4 - a^2b^2 + b^4}}{15}}$$

Sind zwei Seiten parallel der kleinen Achse, so ist a mit b zu vertauschen; die Form des Sechsecks ist eine eingeknickte; es mufs $a > 2b$ sein.

Dieselben.

653. (Gestellt von Kukujay XVIII_1, 37.) Durch die rechtwinkligen Koordinaten $OA = a$ und $AB = b$ ist ein Punkt B bestimmt und über OB als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben; wird nun diejenige gleichseitige Hyperbel konstruiert, welche durch B geht und die Koordinatenachsen zu Asymptoten hat, so schneiden sich Kreis und Hyperbel noch in einem Punkte D, dessen Koordinaten $OC = \sqrt[3]{ab^2}$ und $CD = \sqrt[3]{a^2b}$ sind.

Beweis. Die Gleichung des Kreises ist $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ und die der Hyperbel $xy = ab$. Durch Elimination von y erhält man zur Bestimmung der Abscisse des Durchschnittspunktes die Gleichung $x^4 - ax^3 - ab^2x + a^2b^2 = 0$ oder $(x - a)(x^3 - ab^2) = 0$. Also entweder $x = a$, dies gilt für Punkt B oder $x = \sqrt[3]{ab^2}$ und $\sqrt[3]{a^2b}$.

Bermann. Beyens (Cadiz). Emmerich. Fuhrmann. Hodum. v. Jettmar. Kukujay (Mikolcz). Lengauer. v. Miorini. Nisteo. Sauter. Stammer. Stegemann. Stoll. Tauberth.

654. (Gestellt von Sporer XVIII_1, 37.) Sind irgend zwei aufeinander senkrecht stehende Strecken AC und BD gegeben und konstruieren wir ein Rechteck $XYZU$ so, dafs das eine Parallelenpaar XY und UZ durch resp. A und C, das andere YZ und XU durch resp. B und D geht, so hat das Rechteck eine feste Form, indem sich dessen Seiten wie $AC : BD$ verhalten, seine Mittelpunkte auf einem Kreise liegen und seine Diagonalen durch zwei feste Punkte P und Q dieses Kreises gehen. Sind E und F Halbierungspunkte von AC und BD, so ist EF Durchmesser dieses Kreises und $PQ \perp EF$. — Ist insbesondere D Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so wird der Kreis zum Feuerbachschen Kreise des Dreiecks und die Umkreise der Rechtecke gehen durch den Schnittpunkt O von AC und BD, und die Punkte P und Q werden zu Höhenfufspunkten.

1. Beweis. Zieht man $XX' \parallel AC$ (X' auf ZU) und $UU' \parallel BD$ (U' auf YZ), so ist $\triangle XX'U \sim UU'Z$, also $XU : UZ = XX' : UU' = AC : BD$. Ist nun M der Mittelpunkt des Rechtecks, so ist $MF \parallel XU$ und $ME \parallel XY$, also $\sphericalangle EMF = 90^0$ und M liegt daher auf dem über EF als Durchmesser beschriebenen Kreise, welcher XZ in P und YU in Q treffe. Da $\sphericalangle PME = QME$, so ist $EP = EQ$, also $FE \perp PQ$; da ferner $\sphericalangle PEQ = UMZ$ ($PMQE$ ein Sehnenviereck) und die Gröfse des Diagonalenwinkels aller Rechtecke konstant ist, so mufs die Länge und Lage der Sehne PQ unveränderlich sein, d. h. die eine Diagonale geht durch P, die andere durch Q. — Ist D der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so geht der Kreis durch den Fufspunkt O der Höhe BO, den Mittel-

punkt F des oberen Abschnittes derselben und den Mittelpunkt E von AC, er ist also der Feuerbachsche Kreis. Fällt nun eine Seite des Rechtecks mit AD zusammen, so liegt die andere auf BC und AB wird Diagonale. Der eine Schnittpunkt derselben mit dem Feuerbachschen Kreise ist der Mittelpunkt M des Rechtecks, der andere der Fufspunkt P der Höhe von C. Dafs die Umkreise der Rechtecke in diesem Falle durch O gehen, folgt daraus, dafs $\sphericalangle AOX = ADX$ und $\sphericalangle AOY = ABY = AKX$ ist, wo K der Schnittpunkt von AB und XU ist. Mithin $\sphericalangle XOY = AKX - ADX = KAD$. Da $AYBQ$ ein Sehnenviereck ist, so ist $\sphericalangle KAD = BYQ = YZX$, also $\sphericalangle YZX = XOY$, d. h. Z, O, X, Y liegen auf einem Kreise.

Emmerich. Fuhrmann. Helm (Liegnitz). Hodum. Lengauer. Sporer (Weingarten). Stegemann. Stoll.

2. Beweis. Die Strecken AC und BD können folgende Lagen haben: 1) sie schneiden sich in O; 2) D fällt mit O zusammen; 3) die Verlängerung von BD schneidet AC in O. Die Kreise über AB, BC, CD, DA als Durchmesser schneiden sich in O und bilden geometrische Örter für die Ecken der Rechtecke. Diese vier Kreise bilden 6 Paare, 4 Nachbarpaare und 2 Gegenpaare. Die 4 Nachbarpaare schneiden sich in B, C, D, A; die beiden Gegenpaare und zwar die Kreise um AB und CD in Q, die um BC und DA in P. Nach dem Satze: „Zieht man durch einen Schnittpunkt zweier Kreise eine gemeinsame Sekante und von den Schnittpunkten derselben mit den Kreisen parallele Sehnen, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch den anderen Schnittpunkt der Kreise“ mufs YU durch Q gehen. Da ferner $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (YU, XZ) = AC : BD$, so liegen die Mittelpunkte M aller Rechtecke auf dem Kreisbogen über PQ, welcher diesen konstanten Winkel fafst. Dafs dieser Kreis auch durch O geht, folgt daraus, dafs $\sphericalangle POQ$ diesen Winkel zu 180^0 ergänzt. Die übrigen Teile des Satzes ergeben sich durch analoge Betrachtung der Fälle 2 und 3. Schmidt (Spremberg).

Bermann beweist den Satz mit Hülfe der analytischen Geometrie.

655. (Gestellt von Fuhrmann XVIII_1, 37; im Anschlufs an No. 399—407 XV, 359.) Man konstruiere über den Seiten eines Dreiecks ABC die gleichseitigen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1, deren Mittelpunkte A_2, B_2, C_2 seien. Dann schneiden sich bekanntlich AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkte P_1 und AA_2, BB_2, CC_2 in einem Punkte P_2. Nun ergeben sich noch folgende Eigenschaften: a) MP_1P_2 liegen in einer Geraden (M Mittelpunkt des Umkreises) b) ABC und $A_1B_1C_1$ haben dieselbe Kollineationsachse wie ABC und $A_2B_2C_2$. c) Diese Kollineationsachse ist senkrecht zu MP_1P_2. d) P_2 ist der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises zu $A_1B_1C_1$. e) Der Winkelgegenpunkt von P_1 im Dreieck $A_2B_2C_2$ ist M.

1. Beweis. a) Betrachtet man die Büschel $A\,(B_1B_2MB)$ und $B\,(A_1A_2MA)$ oder $A\,(B_1MB_2B)$ und $B\,(A_1MA_2A)$, so findet

man dafür den Wert $\frac{\cos 60^0 \cos \gamma}{\cos(\beta - 30^0) \cos(\alpha - 30^0)}$, so dafs beide Büschel dasselbe anharmonische Verhältnis haben. Schneiden sich nun AB und MB_1 in Z, AB und MA_2 in Z', so ist $(A_1MA_2Z') = (B_1MB_2Z)$, also $A\ (A_1A_2MZ') = B\ (B_1B_2MZ)$. AZ und BZ' entsprechen sich selbst, mithin liegen die Schnittpunkte M, P_1, P_2 der anderen Strahlen in einer Geraden. b) Hieraus folgt sofort, dafs AA_1A_2 und BB_1B_2 kollinear sind; da nämlich die Schnittpunkte P_1, M und P_2 von AA_1 und BB_1, A_1A_2 und B_1B_2, A_2A und B_2B in einer Geraden liegen, so schneiden sich AB, A_1B_1 und A_2B_2 in einem Punkte $\mathfrak{C}$, ebenso BC, B_1C_1 und B_2C_2 in $\mathfrak{A}$ u. s. w., so dafs $\mathfrak{ABC}$ die gemeinsame Kollineationsachse der Dreiecke ist. c) Folgt aus No. 407 XV, 359 (Arzt Progr. des Gymnasiums in Recklinghausen, Seite 14); auch aus einem von Steiner aufgestellten Satz (Crelle's Journ. Bd. 2, S. 287). d) A_0 sei die Mitte von BC, A_3 und A_4 seien Spiegelpunkte von A_1 resp. A_2 in Bezug auf BC. Dann ist $B_1A_3 = AC_1$ und $B_1A_3 \parallel AC_1$, also $B_1A_3C_1A$ ein Parallelogramm und B_1C_1 wird durch A_3A_1 in A_0' halbiert. Ferner ist $A_3A_4 = A_4A_2$, also $A_4A_0' \parallel A_2A$ und $A_4A_0' \perp B_1C_1$; aufserdem ist $A_1A_2 = A_2A_4$. Die Lote von A_2, A_1 und A_4 auf B_1C_1 haben also die Eigenschaft, dafs der Fufspunkt des ersten Lotes die Mitte zwischen den Fufspunkten der beiden anderen Lote sein mufs. Das Lot von A_1 auf B_1C_1 trifft den Höhenfufspunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$, das Lot von A_4 den Mittelpunkt von B_1C_1. Diese beiden Punkte bilden aber eine Sehne des Feuerbachschen Kreises von $A_1B_1C_1$, mithin geht das Lot von A_2 durch den Mittelpunkt dieses Kreises. Da dasselbe von den Loten von B_2 auf C_1A_1 und von C_2 auf A_1B_1 gilt und diese drei Lote sich in P_2 schneiden, so ist P_2 der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises. e) $\sphericalangle AC_2M = 60^0$, $\sphericalangle B_2C_2A_2 = 60^0$, also $\sphericalangle AC_2B_2 = MC_2A_2$; da aber auch $AC_2B_2 = P_1C_2B_2$ ist, so ist $\sphericalangle P_1C_2B_2 = MC_2A_2$.

FUHRMANN. LENGAUER.

2. Beweis. a) Im $\triangle P_1MA$ schneide die Transversale AA_2 die Seite MP_1 in P_2, dann ist $AA_1 \cdot P_1P_2 \cdot MA_2 = A_1A_2 \cdot P_2M \cdot P_1A$ oder $\frac{P_1P_2}{P_2M} = \frac{A_1A_2 \cdot P_1A}{AA_1 \cdot A_2M}$. Nach einem bekannten Satz ist $AA_1 = \text{const.}$, d. h. für alle Ecken von gleicher Gröfse. Sind λ, μ, ν gewisse Konstanten, so ist $A_1A_2 = \lambda\ a$; AP_1 ist Diagonale in $AC_2P_1B_2$, wo $\sphericalangle C_2AB_2 = 60^0 + \alpha$ ist. Da nun $AC_2 : AB_2 = c : b$ und $\triangle A_2B_2C_2$ gleichseitig ist, so kann man $AP_1 = \mu bc \sin(60^0 + \alpha)$ setzen und $MA_2 = r \cos\alpha + r \sin\alpha \cot 60^0 = \nu \sin(60^0 + \alpha)$. Mithin ist $\frac{P_1P_2}{P_2M} = \tau\, abc$, wo τ eine Zahl ist, die symmetrisch von a, b, c abhängt. Das Verhältnis ist also selbst eine symmetrische Funktion von a, b, c, d. h. AA_2, BB_2, CC_2 schneiden P_1M in demselben Punkte.

Die Richtigkeit der Behauptung a, c und d läfst sich auch mit Hülfe trimetrischer Koordinaten beweisen. EMMERICH.

Anmerkung. Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks je zwei gleichschenklige Dreiecke, bei denen sich die Basiswinkel zu 90^0 ergänzen und deren Spitzen resp. A', A'', B', B'', C', C'' sind, so schneiden sich AA', BB', CC' in einem Punkte P' und AA'', BB'', CC'' in einem Punkte P''; $MP'P''$ liegen auf einer Geraden und die Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ haben dieselbe Kollineationsachse. FUHRMANN.

656. (Gestellt von Kober XVIII_1, 37.) Die Fufspunkte der Lote, welche von zwei Ecken A und B eines Dreiecks ABC auf die Halbierungslinien ihrer Winkel gefällt sind, liegen in der der dritten Ecke C entsprechenden Berührungssehne FG (F auf AC, G auf BC) des Inkreises (Mittelpunkt M).

1. Beweis. FG und AM mögen sich in E schneiden; dann ist in den Dreiecken AFE und AMB, $\sphericalangle AFE = AMB = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle FAE = MAB = \frac{\alpha}{2}$, folglich ist auch $\sphericalangle FEA = MBA = MBG = \frac{\beta}{2}$; mithin ist $BMGE$ ein Sehnenviereck, also $\sphericalangle MEB = MGB$; und da $\sphericalangle MGB = 90^0$, so ist auch $\sphericalangle MEB = 90^0$.
EMMERICH. FUHRMANN. HODUM. LENGAUER. WACHTER (Schaarbeek bei Brüssel).

2. Beweis. Fällt man $AD \perp BM$ und $BE \perp AM$, so ist $ABED$ ein Sehnenviereck, also $\sphericalangle AED = ABD = \frac{\beta}{2}$, mithin auch $BMGE$ ein Sehnenviereck und $\sphericalangle MGB = MEB$; da $MEB = 90^0$, so ist auch $MGB = 90^0$, also BC Tangente.
HELM. NIESTEO. SAUTER. STOLL.

3. Beweis. Es sei wieder $AD \perp BM$, $BE \perp AM$ und AM schneide BC in H. Da $BMGE$ ein Sehnenviereck ist, so ist $HE \cdot HM = HG \cdot HB$; ferner ist $CG = CF$, und da $\triangle FAM \sim EAB$, so ist $AF \cdot AB = AE \cdot AM$. Multipliziert man diese drei Gleichungen und beachtet, dafs $MH \cdot AB = HB \cdot AM$ ist, so folgt $HE \cdot CG \cdot AF = HG \cdot CF \cdot AE$. Daher liegen nach der Umkehrung des Menelaus, angewandt auf $\triangle AHC$, die drei Punkte E, F und G in gerader Linie. SCHMIDT.

4. Beweis. Im $\triangle AEF$ ist $AE = \dfrac{(s-a)\sin\left(90^0 + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(90^0 - \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$

$$= \frac{(s-a)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2r\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = c\cos\frac{\alpha}{2},$$ also

$\sphericalangle AEB = 90^0$. BEYENS. SCHULER (Hamburg.)

5. Beweis. Die Halbierungslinien der Winkel A und B seien resp. AH und BI. Die Gleichung von BI ist $x_3 - x_1 = 0$, die von AD ist $x_3\left(\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \cos\frac{1}{2}\gamma^2\right) + x_1\cos\frac{1}{2}\beta^2 = 0$ und die von FG ist $x_3\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - x_1\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - x_2\cos\frac{1}{2}\beta^2 = 0$. Addiert man die beiden letzten Gleichungen und subtrahiert die mit $\cos\frac{1}{2}\alpha^2$ multiplizierte erste, so erhält man identisch Null, folglich liegt Punkt D auf FG.

Emmerich. Stegemann.

v. Miorini beweist die Behauptung mit Hülfe des Pascalschen Satzes, indem er die drei Berührungspunkte F, G, K des Inkreises und den Schnittpunkt des Inkreises mit KE betrachtet, wobei G und K koincidierende Punktepaare des Sechsecks sind. Kober benutzt projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel.

Zusatz. Fällt man von den Ecken eines Dreiecks auf die Halbierungslinien der Innen- und Aufsenwinkel die Senkrechten, so liegen von den zwölf Punkten viermal je sechs auf einem Kreise (nämlich auf dem Orthogonalkreise zu je drei der vier Berührungskreise).

657. (Gestellt von Emmerich XVIII$_1$, 37.) Einen Kreis M zu zeichnen, so dafs die Tangenten von zwei gegebenen Punkten P Q ein Viereck $ABCD$ umschliefsen, dessen Winkel denen eines gegebenen Vierecks $abcd$ gleich sind.

1. Anal. Zieht man an einen beliebigen Kreis Tangenten, welche den Seiten des gegebenen Vierecks parallel sind, so ist das entstandene Tangentenviereck ähnlich $ABCD$. Zur Bestimmung der Gröfse dient PQ.

Emmerich. Helm. Lengauer. v. Miorini. Sauter. Schmidt. Stegemann. Stoll.

2. Anal. Da $\sphericalangle PMQ$ bekannt ist, so hat man einen Ort für M. Ferner verhält sich $PM : MA = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $QM : MA = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\alpha+\delta}{2}$, also $PM : QM = \sin\frac{\alpha+\delta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. Daher ist ein zweiter Ort für M der Apollonische Kreis, welcher PQ im Verhältnis $PM : QM$ teilt.

Beyens. Emmerich. Fuhrmann. Hodum. Wächter.

B. Neue Aufgaben.

702. Folgende Reihen zu summieren: a) $1 + 2^3 a + 3^3 a^2 + \cdots + n^3 a^{n-1}$; b) $1 + 2^4 a + 3^4 a^2 + \cdots + n^4 a^{n-1}$.

Nisetro (Zara).

703. In einem Dreieck ABC, dessen Fläche $= \Delta$ ist, hat man die Höhen AD, BE, CF verlängert bis sie die über BC, CA, AB konstruierten Halbkreise in den Punkten G, H, I schneiden,

wobei $DG = a_1$, $EH = b_1$, $FI = c_1$ sein möge; werden nun über den Dreiecksseiten nach aufsen hin die gleichschenkligen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1 mit den Höhen $\frac{\Delta}{a_1}$, $\frac{\Delta}{b_1}$, $\frac{\Delta}{c_1}$ konstruiert, so gehen die Transversalen AA_1, BB_1, CC_1, durch einen Punkt O, dessen Lage weiter zu untersuchen ist. SCHLÖMILCH.

704. Wenn man in einem Dreieck vom Mittelpunkt des Inkreises aus die Entfernung zwischen dem Höhenschnittpunkt und dem Mittelpunkt des Umkreises unter einem rechten Winkel sieht, so ist $a^2 + b^2 + c^2 = 4(2r - \varrho)(r + \varrho)$, wo r der Radius des Umkreises, ϱ der des Inkreises ist. BEYENS (Cadix).

705. Fällt man von den Ecken B und C eines Dreiecks auf irgend eine durch die Ecke A gehende Transversale die Lote BE und CF, so erscheint das Stück EF der Transversale von dem Höhenfufspunkt D der Höhe AD aus gesehen unter einem konstanten Winkel. SPORER (Weingarten).

706. Kreuzen sich in einem Viereck die Diagonalen senkrecht, so liegen bekanntlich 1) die Halbierungspunkte der Seiten und 2) die Fufspunkte der Lote von dem Diagonalenschnitt auf die Seiten je auf einem Kreise. Ist das Viereck nun ein Kreisviereck, so fallen die beiden Kreise zusammen. SPORER (Weingarten).

707. Zwei Ellipsen E_1, E_2 berühren sich in einem Punkte A und schneiden sich in den Punkten B und C. Legt man nun durch ABC eine beliebige Ellipse E, welche E_1 in M, E_2 noch in N trifft, verbindet man ferner einen beliebigen Punkt P der Ellipse E mit M und N, so liegen die zweiten Schnittpunkte der PM mit E_1 (M_1) und der PN mit E_2 (N_1) mit dem Berührungspunkt A auf einer Geraden. KOKOTT (Ratibor).

708. Schneiden sich in einem (durch vier von einem Punkte ausgehenden Geraden und deren Verbindungsebenen gebildeten) Vierkant zwei Gegenebenen rechtwinklig, so liegen die Fufspunkte der Lote, welche man von einem Punkte der Schnittlinie auf die vier übrigen Vierkantsebenen fällen kann, auf einem Kreise. THIEME (Posen).

709. Schneiden sich drei Diagonalen eines Polyeders von oktaedrischer Form in einem Punkte D und unter rechten Winkeln, so liegen die Fufspunkte der aus jenem Punkte D auf die Seitenflächen gefällten Perpendikel stets alle acht in irgend einer Kugelfläche (Steiner). THIEME (Posen).

710. a) Die in den Seitenflächen eines abgeschrägten d r e i s e i t i g e n Prismas liegenden Mittelparallelen haben denselben Schwerpunkt wie der Körper. b) In jedem abgeschrägten d r e i s e i t i g e n Prisma liegt der Köperschwerpunkt mit dem der Seitenkanten und dem der Ecken in einer Geraden und zwar teilt er die Verbindungslinie beider

im Verhältnis 3 : 1. c) Um den Schwerpunkt S eines abgeschrägten vierseitigen Prismas zu erhalten, bestimme man zunächst das Viereck, dessen Ecken die Seitenkanten halbieren. In demselben sei F der Schwerpunkt der Fläche, E der der Ecken und K der der Seitenkanten. Aufserdem sei f die durch F und e die durch E gehende, von den Grundflächen begrenzte Parallele zu den Seitenkanten. Teilt man nun KF in I im Verhältnis 3 : 1, so liegt S auf der Verlängerung der Linien EI über I hinaus, so dafs $SE:IE = 4e:3f$.

Weinmeister (Tharand).

711. Zwei schiefe Ebenen AC und BC von gleicher Neigung α ($< 45^0$) gegen den Horizont und gleicher Länge b stofsen mit ihren Fufsenden zusammen. Wann werden zwei unelastische Kugeln, welche gleichzeitig von den oberen Enden A und B in einer zur Grenzkante senkrechten Ebene mit den Geschwindigkeiten v, w ($v < w$) abwärts gestofsen werden, zusammentreffen?

Emmerich (Mülheim a. d. R.).

712. Zwei schiefe Ebenen AC und BC von gleicher Steigung α stofsen mit ihren Kopfenden zusammen. In dem Momente nun, in welchem eine Kugel von C aus ihre Fallbewegung nach A hin beginnt, wird in dem um b von C entfernten Punkte B einer zweiten Kugel die Geschwindigkeit v in der Richtung BC erteilt. Unter welcher Bedingung wird diese zweite Kugel im Momente ihres Niederfallens auf die Ebene AC die erste Kugel treffen?

Emmerich (Mülheim a. d. R.).

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Auflösungen sind eingegangen von Artzt 678; Bermann 679. 680. 684. 686. 687; Brockmann 659; Drees 679. 684. 690; Fuhrmann 667; Glaser 675. 676; Meinel 669—671. 673—678; v. Miorini 685. 689; Moroff 627; Nibeteo 671. 674. 679. 680; Raschig 673; Rulf 685; Schmidt 660. 662. 667; Stegemann 679. 681—686; Tauberth 664. 666. 687; Wachter 646 (zu spät). 669. 671. 673. 679. 685; Züge 669. 671.

Neue Aufgaben: Artzt (4); v. Miorini (1); Rulf (1); Wachter (4); Züge (2).

Die Herren Einsender von Beiträgen werden dringend ersucht immer nur eine Seite des Blattes zu beschreiben.

Litterarische Berichte.

A. Rezensionen.

BLATER (JOSEPH). Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzer Zahlen von 1 bis 200000, welche die Ausführung von Multiplikationen, Quadrierungen und das Ausziehen der Quadratwurzel bedeutend erleichtert und durch vorzügliche Korrektheit fehlerlose Resultate verbürgt. Wien 1887. Kommissionsverlag von Alfred Hölder. 16 S. Text; 205 S. Zahlentabellen. gr. 4°.

In einem der letzten Hefte dieser Zeitschrift*) ward der verdienstliche Versuch des Herrn Blater in Wörrstadt besprochen, die „Rhabdologie" Napiers in neuer, vervollkommneter Form wieder aufleben zu lassen, und schon haben wir aufs neue zu berichten von einem Tabellenwerke grofsen Stils, mit welchem derselbe Autor das rechnende Publikum beschenkt hat. Dasselbe ist dem bekannten Mathematiker und Geographen, Regierungsrat Dr. A. Steinhauser in Wien, gewidmet, der ihm denn auch ein über den Zweck und über die Vorgeschichte solcher Tafeln sich verbreitendes Vorwort beigegeben hat. Es sind Tafeln, welche in erster Linie der Erleichterung des Multiplikationsgeschäftes dienen sollen, allein während man dies früher durch direkte Zusammenstellung der Produkte aller n zifferigen Faktoren möglich zu machen suchte, mufste man sich später entschliefsen, andere Wege einzuschlagen. In der ältern Art vorzugehen, verbot sich von selbst wegen der Masse der zusammenzustellenden Zahlen: brauchte Herwart v. Hohenburg, der bekannte Korrespondent Keplers, doch für $n = 1$ einen Folioband und Crelle in Berlin (1820) für $n = 5$ gleich zwei dicke Oktavbände. Den Gedanken, die Multiplikation auf eine Subtraktion von Quadratzahlen zu begründen, scheint zuerst J. H. Ludolff (nicht Ludolph) in seiner „Tetragoniometria tabularia" (Frankfurt und Leipzig 1690) ausgesprochen zu haben, und späterhin sah man ein, dafs eine Tafel der Viertel-Quadrate für den erwähnten Zweck noch bequemer sein müsse als eine solche der ganzen Qua-

*) Heft 3, S. 208 u. f. D. Red.

drate. Solche Tafeln liefsen denn auch der Franzose Voisin (Paris 1816), der Deutsche Bürger (Karlsruhe 1817) und der Engländer Laundy (London 1856) wirklich erscheinen, allein dieselben besitzen lange nicht die Ausdehnung, die Blater seinem Werke gegeben hat, und auch hinsichtlich der Korrektheit dürfte letzteres unerreicht dastehen.*)

Um zwei Zahlen a und b mit einander zu multiplizieren, erinnere man sich der schon bei Euklid (lib. II, prop. 5) vorkommenden Identität

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} - \frac{d^2}{4}.$$

Wie in der Praxis mittelst dieser Formel verfahren wird, wollen wir gleich an einem der von Blater gegebenen Musterbeispiele zeigen. Sei $a = 93319$, $b = 33674$, dann ist $s = 126693$, $d = 59645$. Für diese Argumente ist nun in der Tabelle das Viertelquadrat enthalten. Auf je zwei (beim Aufschlagen des Buches) gemeinsamen Seiten stehen links die Zahlen von 1—99, rechts die Zahlen von 100—199, und unter diesen schlägt man diejenige Zahl auf, welche von s und d übrig bleibt, nachdem die letzten drei Ziffern abgeschnitten sind. In unserm Falle wäre für s mithin 126 zu nehmen. Oben an der Seite sind fortlaufend alle Zahlen von der Form $10n$ angegeben ($n \geq 0 \lesseqgtr 99$), und man nimmt nun jenes n, durch welches $10n$ gerade kleiner wird als die durch die obigen drei letzten Ziffern gebildete Zahl. Für unser s ist diese Zahl $= 993$, also mufs $n = 99$ gewählt werden; gehen wir mit $10.99 = 990$ in unsere Tafel ein, so finden wir die richtige Überschrift auf Seite 201. Horizontal neben einander stehen am Kopfe der Seite alle Zahlen von $10n$ bis $(10n + 9)$, wir nehmen im vorliegenden Falle 993 heraus und gehen vertikal abwärts, bis wir die durch 126 gelegte Horizontale erreicht haben. Die direkt neben 126 unter der Rubrik A stehende Zahl 4031 liefert den ersten dekadischen Bestandteil des gesuchten Quadratviertels; die nächst erhaltene, unter der Rubrik B befindliche, ergiebt den zweiten Bestandteil, hier 805, und schreitet man schliefslich von diesem letztern Werte vertikal abwärts fort, soweit es möglich ist, so stöfst man in der Rubrik C auf den dritten und letzten Bestandteil, der diesmal 512 ist. Man hat also $\frac{1}{4}s^2 = 4031|805|512$. Ähnlich ist für d das obige $A = 889$, $B = 381$, $C = 506$, $\frac{1}{4}d^2 = 889|381|506$,

$$ab = 4031805512 - 889381506 = 3142424006.$$

Wenn man sich auch nur ein wenig auf den Gebrauch der Tafel eingeübt hat, so ist der Nutzen und die Zeitersparnis augenfällig, wie denn die Ausrechnung unsers Exempels auf gewöhnlichem Wege das Anschreiben von 50 Ziffern erfordert hätte, während es,

---

*) In Kuliks kleiner Tafel, die einen ähnlichen Zweck verfolgt, fand Herr Blater 30 Fehler auf.

wenn nur das Notwendige geschrieben wird, hier mit einer weit geringeren Zahl sein Bewenden hat.

Dafs die Blatersche Tafel sich auch zum Erheben ins Quadrat sehr gut eignet, liegt auf der Hand, und ebenso kann sie, wie die Einleitung darthut, für die Quadratwurzelausziehung nutzbar gemacht werden. Den Logarithmen gegenüber bietet sie den Vorteil, dafs durch sie die Verbindung grofser Zahlen mit vollster Genauigkeit bewerkstelligt werden kann. Wir hoffen also mit Zuversicht, dafs Zahlenrechner sich diese wertvolle Hilfe nicht entgehen lassen werden, und dafs sowohl der Autor, der die Kosten der Herausgabe selbst bestritt, als auch die Falksche Druckerei in Mainz, die einen geübten Setzer ein Jahr hindurch in den ausschliefslichen Dienst des Unternehmens stellte, durch die Anerkennung des Publikums ihre Belohnung erhalten möchten. Die Ausstattung ist eine mustergiltige.

München. Dr. S. Günther.

Zängerle (Prof. am kgl. Realgymnasium zu München), Lehrbuch der Chemie. Nach den neuesten Ansichten der Wissenschaft für den Unterricht an technischen Lehranstalten bearbeitet. I. Band: Anorganische Chemie, II. Band: organische Chemie. 3. vermehrte Auflage. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1885. Preis 9 *M*.

Die erste Auflage des vorliegenden Schulbuches erschien bereits 1868 und wurde nicht blos in bayrischen Mittelschulen sondern, wie ich mich bestimmt erinnere, auch von Studenten vielfach benutzt. Diese Verschiedenartigkeit des Gebrauches mag den Verfasser auch bewogen haben zu einer Zweiteilung seines Werkes insofern zu greifen, als er später auch einen Grundrifs der Chemie und Mineralogie herausgab, welcher speziell den Bedürfnissen der Realschulen und Realgymnasien entsprechen sollte. Das ursprüngliche Lehrbuch aber wurde seinen höheren Zielen zuliebe etwas erweitert. Wenn ich nun auch gerne zugestehe, dafs die Thatsache einer dritten Auflage die Vorzüge, welche ein solches Buch bieten mufs, genügend ins Licht stellt, so darf deswegen doch der Rezensent sich dadurch nicht verleiten lassen, bestehende Mängel zu rügen.

Um mich zunächst der unorganischen Chemie als dem ersten Teile zuzuwenden, so müsste ich eigentlich schon meine Bedenken gegen die viel zu ausführliche Einleitung äufsern; da aber der Verfasser in seiner Vorrede selber zugesteht, dafs es sich empfehlen wird, von derselben beim Unterrichte wie beim Privatstudium möglichst viel wegzulassen und das Versäumte dann gelegentlich nachzuholen, so kann man, wenn trotzdem Lehrer der Chemie sich und ihre Schüler vom 1. Oktober bis nach Weihnachten, wie mir selbst ein Kollege vorgejammert hat, mit der Zängerleschen Einleitung abquälen, sich der Tadel nur gegen diese wenden.

Eine sehr eigenartige Einteilung der Metalle, welche seinerzeit beim Erscheinen des Grundrisses 1882 manches Kopfschütteln erregt hat, indem damals in die „Natriumgruppe“ die Metalle Natrium, Kalium, Rubidium, Cäsium, Lithium, Kupfer, Quecksilber, Silber und Gold eingereiht worden sind, ist zwar im Lehrbuche verschwunden, aber dennoch lässt auch die jetzt gewählte Gruppierung noch manches zu wünschen übrig. Wieweit dieselbe etwa mit den im Anhang gegebenen Ideen des Verfassers „über die Natur der Elemente und die Beziehungen der Atomgewichte derselben zu den physikalischen und chemischen Eigenschaften“ im Zusammenhang steht, kann ich nicht entscheiden; denn ich mufs gestehen, dafs ich trotz zweimaligen Beginnens mich durch diese Ideen nicht hindurcharbeiten konnte. Ich will damit das Verdienst einer solchen Arbeit, welche Verfasser vor einigen Jahren als Programmarbeit erscheinen liefs, nicht bestreiten; aber das wage ich ruhig zu behaupten, dafs derartige Spekulationen eines Einzelnen nicht in ein Lehrbuch gehören.

Seite 159 ist eine Erklärung für das Schwefeln der Weinfässer gegeben, welche entschieden in dieser Form zu falschen Auffassungen führen mufs. „. . . „Nach Ansicht mancher Chemiker beruht auch das Schwefeln des Weins auf dieser Eigenschaft des Schwefligsäureanhydrids. Eine sehr geringe Menge Luft ist hinreichend, um die Essiggährung des Weins . . . . einzuleiten.“ Da ich später in der organischen Chemie ähnlichen Auffassungen noch entgegentreten mufs, so sei dieselbe hier zunächst *ad acta* genommen.

Seite 159: „Salpetersäure oder Königswasser heifst eine Mischung von 1 Teil HNO_3 mit 3—4 Teilen ClH.

Seite 196 ist für Darstellung des Phosphorwasserstoffgases die gewöhnliche Form der Gewinnung beschrieben. Da doch Analogien bei verwandten Elementen stets im Auge behalten werden sollen, so habe ich mich schon oft gewundert, dafs meines Wissens in keinem für den Unterricht bestimmten Lehrbuche der Chemie die einfachste aller Methoden erwähnt ist, den Phosphorwasserstoff genau so wie den Arsen- und Antimonwasserstoff zu gewinnen: durch Einwerfen von Phosphorstückchen in Zink und Schwefelsäure. Ich gebe zu, dafs damit das bekannte Experiment mit den schönen Ringen verloren geht, aber höher als diese „Spielerei“ setze ich eben, dafs der Schüler denken und vergleichen lernt.

Seite 218 möchte ich in einem Lehrbuche, das sich selbst auf seiner Titelüberschrift das Lob spendet „nach den neuesten Ansichten der Wissenschaft“ bearbeitet zu sein, erwähnt wissen, dafs flüssige Kohlensäure seit 3—5 Jahren eine ganz andere Bedeutung erhalten hat, als sie früher hatte.

Seite 228 ist in der Angabe über die Höhe der Luftschicht, welche den Erdball umgiebt, ein sinnstörender Druckfehler enthalten.

Zur Seite 257 möchte ich, obwohl ich in der Beleuchtungs-

frage gerne mein beschränktes Wissen zugestehe gegenüber dem Autor, der als der Vater der bekannten Zängerleschen Patent-Petroleumlampe diese Theorie wohl gründlicher studiert hat, nur bemerken, dafs ich doch nicht glaube, dafs der in der Flamme enthaltene bezw. ausgeschiedene Kohlenstoff stets früher verbrenne als der Wasserstoff.

Seite 285 heifst es: Natriumlauge oder Natronlauge! Ich möchte dem gegenüber doch betonen, dafs Natronlauge der sonst allein gebräuchliche Ausdruck ist.

Seite 286 ist Natriumsulfid beschrieben. Da doch einer der Vorzüge des Zängerleschen Lehrbuches gerade darin besteht, dafs die praktische Verwendung der verschiedenen Körper stets mit Geschick hervorgehoben ist, so vermisse ich hier die Angabe, dafs diese Verbindung zu Gerbereizwecken vielfach empfohlen wird.

Seite 293. Die Angabe, dafs beim Sodaprozefs sich Calciumoxysulfid bilde, ist falsch und seit etwa 20 Jahren widerlegt. Ich betone dies, weil ich schon einmal in der Notlage mich befunden habe, die Zersetzungsformel, wie sie meine Schüler gebrauchen, zu verteidigen. Der betreffende Examinator hat sich damals auch auf die Lehrbücher von Lorscheid und Zängerle berufen, wo wie eben konstatiert, der Sodaprozefs nicht „nach den neuesten Ansichten der Wissenschaft“ in seinen Formeln dargestellt ist.

Seite 296 sind Eigenschaften der Soda besprochen, welche, was ihren Gehalt an Natriumhydroxyd betrifft, für Leblancsche Soda aber nicht für Soda gelten, welche nach dem Ammoniakverfahren gewonnen worden ist.

Eine Reihe sonstiger Notizen mufs ich hier aber übergehen, um mich noch kurz der organischen Chemie als dem zweiten Bande des Zängerleschen Lehrbuches zuwenden zu können.

Seite 27 ist zu korrigieren, dafs Äthylalkohol bei — 130° erstarrt.

Seite 47 steht, dafs der Essig häufig einem Gehalte an nichtoxydiertem Alkohole den angenehmen Geschmack verdanke. Die Ursache davon dürften aber vielmehr Ester sein; vergleiche z. B. die Untersuchungen von Heinzelmann!

Seite 88. Dafs Glycerin als Schmiermittel bei Maschinen und Uhren verwendet werden soll, war mir neu; dagegen möchte ich hervorgehoben haben die Verwendung desselben in Verbindung mit Leim zur Hektographenmasse und zu den Buchdruckerwalzen, seine Verwendung zu Kitt in Verbindung mit Mennige oder Bleiglätte, der Zusatz desselben zu Gummi und Dextrin, um nach dem Trocknen das Aufrollen der gummierten Papiere zu verhindern.

Seite 109 heifst es, dafs der Milchzucker unter dem Einflufs von Käsestoff in Milchsäure übergehe. Da sich also hier zum zweitenmale eine ganz eigenartige Darstellung eines Gärungsvorganges findet, so war ich doppelt begierig, wie etwa unter Kasein

der Säurungsvorgang der Milch besprochen sein werde. Ich mufs nun gestehen, dafs ich auf Seite 209 eine Reihe von mehr oder weniger falschen Angaben vorfinde, welche sich mit den „neuesten Ansichten der Wissenschaft“ absolut nicht mehr vertragen. Hier sei, um mich nicht auf Weitläufigkeiten einzulassen, nur konstatiert, dafs das spezifische Gewicht von normaler Kuhmilch — und nur um solche kann es sich doch handeln — 1,029 bis 1,033 ist und nicht 1,026 bis 1,033; ferner dafs frische Milch nicht neutral oder schwach sauer sondern amphoter reagiert, d. h. blaues Lackmuspapier rötet und rotes blau färbt. „Bei längerem Stehenlassen der Milch erleidet der Käsestoff eine freiwillige Zersetzung, wobei (!) sich ein Ferment entwickelt, das die Umwandlung des Milchzuckers in Milchsäure veranlafst.“ Was ist nach dieser Erklärung Ursache und was Wirkung? Das Gerinnen lafse sich durch Kochen deshalb verhindern, weil dadurch die Luft, welche auf den Käsestoff zersetzend einwirkt (vergleiche oben über Schwefeln des Weines) ausgetrieben wird! Solche Ansichten dürfen doch heutzutage in unseren Schulbüchern nicht mehr vorgetragen werden! Und merkwürdigerweise kehren dieselben immer wieder, so dafs man nicht an einen zufälligen *lapsus calami* denken kann. So heifst es z. B. Seite 210: „Bleibt Butter längere Zeit an der Luft stehen, so geht der Käsestoff der eingeschlossenen Buttermilch in Fäulnis über und werden kleine Mengen von den flüchtigen Fettsäuren in Freiheit gesetzt!“

Von sonstigen technischen fehlerhaften Angaben will ich ganz schweigen, aber soviel mufs ausgesprochen werden, dafs die Anschauungen des Verfassers, wie sie hier und später in einem noch bunterem Durcheinander (Seite 232—233) unter dem Kapitel: „Fäulnis und Gärung“ zum Ausdruck kommen, heutzutage keinem Schüler mehr gelehrt werden dürfen.

Nun nur noch einige Worte über die vom Verfasser beliebte Nomenklatur der organischen Verbindungen. Es ist unbestritten, dafs die neue Bezeichnungsweise, welche sich bemüht, durch ihren Namen uns ohne weiteres schon ein Bild von der Konstitution eines organischen Körpers zu geben, sehr viel vorteilhaftes mit sich bringt. Dennoch dürfte es auch hier wieder eine „gewisse Grenze“ geben, die uns z. B. es sonderbar erscheinen läfst, dafs man statt Nitroglycerin die Bezeichnung Propylennitrat einführen will. Aber zugegeben, dafs eine gewisse Konsequenz dies noch als gerechtfertigt kann erscheinen lassen, so verlange ich auch, die Gesetze der Nomenklatur „den neuesten Ansichten der Wissenschaft“ entsprechend überall durchgeführt. Dann darf man Seite 135 nicht mehr sagen, dafs ein prinzipieller Unterschied zwischen der Bezeichnung Amidobenzol oder Phenylamin für das bekannte Anilin nicht existiere. Es ist freilich richtig, dafs Anilin, Toluidin und ihre Homologen früher zu den Aminen gerechnet wurden. Sie unterscheiden sich aber

von denselben ebenso bestimmt wie die Phenole von den Alkoholen und deshalb hat Griefs für diese Körper die Bezeichnung Amidoverbindungen eingeführt.

Doch damit genug des Tadels!

Es wäre nun auch noch meine Aufgabe, die Lichtseiten des Zängerleschen Lehrbuches hervorzuheben — und ich möchte diesem angenehmeren Teil eine noch viel detailliertere Schilderung um so lieber widmen, als ich dankbar gestehe, dafs ich einen Teil meiner ersten chemisch-frommen Denkungsart einem mir von Freundeshand geliehenen „Zängerle“ verdanke. Aber ich fürchte die Geduld des Lesers durch eine entsprechende Ausführlichkeit zu erschöpfen und begnüge mich damit, zu konstatieren, dafs der „Zängerle“ an unseren bayrischen Realschulen eines der meist verbreitetsten Lehrbücher ist und dies wohl nur deshalb, weil der Verfasser in seinem Grundrifs und in seinem Lehrbuche eine Fülle von Wissenswertem in einer dem Fassungsvermögen der Schüler entsprechenden Form zu geben verstanden hat, namentlich da, wo es sich um die praktische Anwendung des Gelernten aufs tägliche Leben und seine Vorkommnisse handelt.

Memmingen. VOGEL.

MEYER, Dr. LUDW., Schulbotanik für Hannover. Flora der in den Regierungsbezirken Hannover, Hildesheim, Lüneburg sowie den angrenzenden Landesteilen von Braunschweig, Lippe, Nordhessen, Westfalen im Freien wachsenden Pflanzen nebst einem kurzen Abrifs der allgemeinen Botanik. Mit 26 Abb. Hannover, Hahnsche Buchh. 1886. Preis gebd. 2,40 ℳ.

Schulbotanik nennt sich die vorliegende Flora von Hannover, weil ihr ein allgemeiner botanischer Teil vorausgeht. Letzterer umfafst jedoch kaum mehr als die nötigsten Kunstausdrücke, wie Verfasser selbst zugesteht. Von einer Schulbotanik könnte man schon etwas mehr verlangen!

Bei der grofsen Kürze des allgemeinen Teiles fallen einige Sätze, die leicht falsche Vorstellungen erwecken können, um so mehr auf. So p. VIII: „Jede Insektenart ist auf eine oder einige Pflanzenarten angewiesen (cf. dagegen die biol. Arbeiten von Herm. Müller, Löw u. A.). „Die Blüten werden von den Insekten an der Farbe erkannt“ (die moderne Blumenlehre erklärt doch wohl auch die Gestalt als Anpassung an die Insektenwelt), p. XII: „Solche Pflanzen welche überhaupt kein Blattgrün enthalten, heifsen Schmarotzer“ (oder Fäulnisbewohner, Saprophyten). Die Stellung der Blätter ist meist „derartig, dafs das obere dem unteren so wenig als möglich Luft und Licht entzieht“ u. s. w. Andere Sätze enthalten sprachliche Härten, z. B. p. VIII „Um desto sicherer die Insekten anzuziehen wird bei vielen Blüten die Wirkung der Blütenfarbe verstärkt.“ Der allgemeine Teil ist durch 26 gut ausgewählte Figuren illustriert (dieselben, welche sich in den Büchern von Leunis finden). Auch

die biologischen Hauptausdrücke sind erläutert. Die Flora selbst enthält nach einer Bestimmungstabelle, der das Linnésche System zugrunde liegt, in natürlicher Anordnung die Arten des bezeichneten Gebietes nebst den allgemein verbreiteten Garten- und Topfpflanzen mit Standortangabe. Weggelassen sind die Brombeerarten, die selteneren Weiden und die meisten Bastardformen. Die Bearbeitung des floristischen Teiles können wir als eine mustergiltige bezeichnen, sowohl hinsichtlich der Einzelbeschreibungen, die ganz kurz, aber möglichst anschaulich sind, als hinsichtlich der Nomenklatur. Die Accentuierung ist überall angegeben, wo sie nicht, wie z. B. bei *Secale,* ebenso wie der Ursprung des Wortes zweifelhaft ist. Die Aussprache solcher Namen, die zu Ehren fremdländischer Personen gegeben sind, ist in Klammern meist angegeben [z. B. *Hutchinsia* (Hötschinsia), *Teesdalea* (Tisdelea), dagegen nicht bei *Sherardia*, *Gagea*].

Das Buch verdient es durchaus, den Schulen der im Titel angegebenen Landesteile empfohlen zu werden.

Greiz. LUDWIG.

GERSTENDÖRFER, Ins Erzgebirge, eine Ferienreise durch das Egerthal und Erzgebirge (für die Jugend geschildert). Wien, Pichlers W. u. S. 1882.

— — Eine Fahrt auf der Donau (ebenfalls für die Jugend geschildert) ib. 1885.

Das erstgenannte Buch stand schon längst auf dem Index unserer Anzeigen, aber bei der Masse der Eingänge und der vorliegenden auf Besprechung harrenden Bücher, die wir nicht gleich bewältigen konnten, wurde die Anzeige verschoben. Jetzt, da Verf. dem genannten Buche ein ähnliches hat folgen lassen, wollen wir nicht länger zögern, diese besonders für Schulbibliotheken passenden Bücher den Lesern u. Z. angelegentlich zu empfehlen. Beim Lesen des erstern wird man freilich insofern enttäuscht, als der Verfasser nur das böhmische Erzgebirge behandelt, während wir Norddeutschen, zumal wir Sachsen, unter „Erzgebirge" zumeist das sächsische verstehen. Da dieses Gebirge bekanntlich, gleich den Alpen, nach Süden steil, nach Norden allmählich sich abdacht, so liegt auch der gröfsere und der bewohntere und bearbeitetere Teil desselben mehr auf sächsischem als auf böhmischem Gebiet. Diesen sächsischen Teil hat aber, wie sich schon aus dem Inhaltsverzeichnis ergiebt, Verf. gar nicht behandelt. Dieser Mangel dürfte daher bei einer neuen Auflage zu beseitigen sein oder — der Titel wäre zu ändern in: „Ins böhmische Erzgebirge".*) In der Behandlung

*) Vermutlich ist diese Beschränkung veranlafst dadurch, dafs das Buch ein Teil einer gröfseren, für österr. Schülerbibliotheken bestimmte Sammlung („Jugendlitteratur") ist, betitelt: „Streifzüge durch unser Vaterland (Österreich)".

des Stoffs bleibt Verf. nicht im Gebiete der Geographie, sondern streift hinüber in das der Naturgeschichte und der Technologie. Er giebt lebendige Schilderungen des pflanzlichen, tierischen und menschlichen Lebens in der Natur in anziehender und dem Knabenalter verständlicher Form, mitunter ausgeschmückt durch Phantasiebilder (s. „Im Waldthale“ S. 79). Man erkennt aus diesen Schilderungen, wie sehr die Geographie sich eignet zu einem anderen, verwandte Lehrfächer in ihr Bereich ziehenden, zusammenfassenden (konzentrierenden) Lehrgegenstande.

Es würde uns zu weit führen, wollten wir Einzelheiten herausgreifen. Nur sei noch bemerkt, daſs die einzelnen Aufsätze durch mancherlei recht gelungene Zeichnungen und Bilder veranschaulicht sind. Es dürfte daher genügen, den Inhalt des Buches noch anzugeben, damit der Leser sieht, was er darin finden kann:

Inhalt: Vorwort. — Einleitung. — Von Eger nach Franzensbad. — Nach Falkenau. — Das Falkenauer Braunkohlenbecken. — Elbogen und Hans Heiling. — Karlsbad. — Das Kaolinlager. — Das Egerthal. — Ins Erzgebirge. — Unter der Erde. — Zwischen hohen Bergen. — Am Bachesrand — Ruine Hassenstein. — Am Fuſse der Berge. — Der Alaunsee. — Im Waldthale. — Das Torfmoor. — Das Eisenwerk. — Nach Katharinaberg. — Im Tiergarten. — Der Lein. — Die Baumwollspinnerei. — Kloster Ossegg. — In der Braunkohlengrube. — Von Dux nach Teplitz. — Teplitz. — Eichwald und Graupen. — Auf dem Schlachtfelde von Kulm. — Die Felswände von Tyssa. — Auf dem hohen Schneeberg. — Die Elbe. — Auf dem Dampfschiffe. — Der Schreckenstein. — Die Heimfahrt.

Ähnlich ist das zweitgenannte Buch eingerichtet, dessen Inhalt hier ebenfalls folgen möge:

Vorwort. — Einleitung. — Linz. — Auf den Donauauen bei Steiregg. — Von der Traumündung nach Steining. — Von Steining nach Mauthausen. — Greiner Strudel. — Im Weinberge. — Bechelären. — In der Wachau. — Dürrenstein. — Von Krems nach Tulln. — Eine Nacht auf der Donauinsel. — Ein Morgenausflug. — Von Tulln nach Wien. — Wien. — Die k. k. Hofburg. — Schönbrunn. — Im Prater. — Carnuntum. — Im Nebel. — Die Schüttinseln. — In der Rohrhütte. — Die Goldwäscher. — Komorn. — Das Donauthal von Almás bis Budapest. — Budapest. — In der Steppe. — Die Luftspiegelung (Fata morgana). — Im Schilfrohre. — Die Fische der Donau. — Der weitere Lauf der Donau bis zum „Eisernen Thore“. — Die Fluſsseen an der unteren Donau. — Das Donaudelta.

B. Programmschau.

Vacat.

C. Bibliographie.

Mai. Juni.

Erziehungs- und Unterrichtswesen.

Wort, ein offnes. Schulpolitische Briefe. (37 S.) Znaim, Fournier. 0,80.
Engel, Oberl., Grundsätze der Erziehung und des Unterrichts nach Herbart-Ziller und A. Diesterweg. (176 S.) Berlin, Weidmann. 2,40.
Vogel, Dr., Herbart oder Pestalozzi? Eine krit. Darstellung u. Vergleichung ihrer Systeme. (164 S.) Hannover, Meyer. 2,40.
Leonhard, Gymn.-L., Die Einheitsschule. Ein Versuch, die Möglichkeit einer einheitl. Gestaltung unserer höheren Lehranstalten darzulegen. (47 S.) Grünberg, Weiß. 0,80.
Andreae, Sem.-Insp., Dr., Aus den Schulen zu Paris; ein pädagog. Reisebericht. (39 S.) Langensalza, Beyer. 0,50.
Lomberg, Über Schulwanderungen. (88 S. Langensalza, Beyer. 0,80.
Grillitsch, Gesundheit u. Turnen. (29 S.) Czernowitz, Pardini. 0,25.

Mathematik.

A. Reine Mathematik.

1. Geometrie.

Wapienick, Prof., Lehrbuch der Mathematik für die ob. Klassen der Mittelschulen. (355 S.) Wien, Graeser. 3,60.
Hespe, Über windschiefe Flächen mit Direktorebene etc. etc. (73 S.) Berlin, Mayer & Müller. 1,60.
Koch, Prof., Über reguläre und halbreguläre Sternpolyeder. (24 S.) Tübingen, Fues. 0,30.

2. Arithmetik.

Biermann, Doc. Dr., Theorie der analytischen Funktionen. (452 S.) Lpz., Teubner. 12,80.
Bardey, Dr., Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebr. Aufgaben. 1. Teil. Aufg. mit einer Unbekannten. (95 S.) Lpz., Teubner. 1,50.
Haas, Über graphisches Rechnen. (10 S.) Tübingen, Fues. 0,20.

B. Angewandte Mathematik.

(Astronomie. Geodäsie. Mechanik.)

Oppolzer, Hofrat, Prof., Canon der Finsternisse. Mit 160 Taf. (376 S.) Wien, Gerold. 85,00.
Woelfer, Ing. u. Lehrer, die praktische Geometrie. Lehrbuch für den Unterricht. (118 S.) Berlin, Springer. 3.
Israel-Holtzwart, Oberl. Dr., Elemente der theoretischen Astronomie. Suppl.: Analyt. Theorie der Anziehung der Sphäroide von const. und veränd. Dichtigk. (96 S.) Wiesbaden, Bergmann. 1,60.
Foerster, Dir. Dr. u. Dir. Blenck, Populäre Mitteilgn. zum astron. u. chronol. Teile des preuſs. Normalkalenders f. 1888. (30 S.) Berlin, Statist. Bureau. 5,00.
— und Lehmann, die veränd. Tafeln des astron. u. chronol. Teiles des pr. Normalk. für 1888. (140 S.) Ebenda. 5, 00.
Seefeld, Oberst, Astronomische Aufsätze eines Amateurs der Naturwissenschaft. 12 Versuche, gröſsere Probleme der Himmelskunde auf elementare gemeinverständl. Weise zu lösen. Graz, Selbstverlag. In Heften à 0,80.

Physik.

Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearb. von Dr. Exner. 3. Abt. Braunschweig, Vieweg. 5,30. (Komplet: 26,00.)
Schlegel, Oberl. Dr., Über die Methoden zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes. (32 S.) Hamburg, Richter. 1,00.
Januschke, Prof., Das Prinzip der Erhaltung der Energie in der elementaren Elektrizitätslehre. (185 S.) Lpz., Teubner. 4,00.
Volkmann, Über Fern- und Druckwirkungen. (9 S.) Königsberg. (Berlin, Friedländer.) 0,50.
Zech, Elementare Behandlung von Liniensystemen. (16 S.) Tübingen, Fues. 0,30.
Naumann, Dir. Dr., Die Erscheinungen des Erdmagnetismus in ihrer Abhängigkeit vom Bau der Erdrinde. (78 S.) Stuttgart, Enke. 3,60.
Sumpf, Dr., Kleine Naturlehre. (56 S.) Hildesheim, Lax. 0,65.
Kohlrausch, Gymn.-L. Dr., Physik des Turnens. (68 S.) Hof, Lion. 2,00.
Lang, Dir. Dr., Die Vorausbestimmung des Nachtfrostes. (17 S.) Braunschweig, Salle. 0,30.
Kiesel, Oberl. Dr., Über atmosphärische Elektrizität. (25 S.) Berlin, Gaertner. 1,00.
Rethwisch, Dr., Die Bewegung im Weltraum. Kritik der Schwerkraft. Analyse der Axendrehung. (147 S.) Berlin, Schneider. 4,50.

Chemie.

Roscoe u. Schorlemmer, ausführliches Lehrbuch der Chemie. 4. Bd. Die Kohlenwasserstoffe und ihre Derivate oder organische Chemie. (672 S.) Braunschweig, Vieweg. 13,00.
Bernthsen, Prof. Dr., Kurzes Lehrbuch der organischen Chemie. (448 S.) Ebd. 8,00.
Arendt, Prof. Dr., Methodischer Lehrgang der Chemie. Durch eine Reihe zusammenhängend. Lehrproben dargestellt. Vervollständigter u. erw. Sonderabdruck aus der Ztschr. „Lehrproben u. Lehrgänge“. (188 S.) Halle, Waisenhaus. 3,60.
Huth, Dr., Das periodische Gesetz der Atomgewichte u. das natürliche System der Elemente. (16 S.) Berlin, Friedländer. 1,00.
Hjelt, Prof., Grundzüge der allg. organischen Chemie. (210 S.) Berlin, Oppenheim. 3,50.
Julius, Dr., Die künstl. organ. Farbstoffe. Unter Zugrundelegung v. 6 Vorles. v. Prof. Dr. Noelting. (235 S.) Berlin, Gaertner. 6,00.
Remsen, Prof. Dr., Einleitung in das Studium der Chemie. Autorisierte deutsche Ausg. bearb. v. Prof. Dr. Seubert. (445 S.) Tübingen, Laupp. 6,00.

Beschreibende Naturwissenschaften.

1. Zoologie.

Glaser, Dir. Dr., Catalogus etymologicus Coleopterorum et Lepidopterorum. Erklärendes und verdeutsch. Namensverz. der Käfer und Schmetterl. (396 S.) Berlin, Friedländer. 4,80.
Rothe, Prof. Dr., Vollst. Verz. der Schmetterlinge Deutschlands, Österr.-Ungarns und der Schweiz. Nebst Angabe der Flugzeit, der Nährpflanzen und der Entwickelungszeit der Raupen. (46 S.) Wien, Pichler. 0,80.
—, Schmetterlingsetiketten. Ebenda. 0,80.

2. Botanik.

Schwaighofer, Dr., Tabellen zur Bestimmung einheimischer Samenpflanzen. Für Anf., bes. zum Gebrauch beim Unterr. bearb. (100 S.) Wien, Pichler. 1,00.

Sorauer, Dir. Dr., Atlas der Pflanzenkrankheiten. 8 Taf. Fol. mit 8 S. Text. Berlin, Parey. In Mappe 20,00.

3. Mineralogie.

Websky, Dr., Anwendung der Linearprojektion zum Berechnen der Krystalle. (377 S.) Berlin, Mittler. 20,00.

Henniger, Dr. Leitfaden für den Unterricht in der Mineralogie, zugleich als Einführung in die Chemie. (84 S.) Berlin, Winkelmann. 1,20.

Geographie.

Ratzel, Prof. Dr., Zur Kritik der sogen. „Schneegrenze". (8 S.) Lpz., Engelmann. 0,50.

Rohmeder, Dr. u. G. Wenz, Methodischer Atlas für bayerische Schulen. 12 Kart. München, Zentralschulbücherverl. 0,60.

Wildeis, Schulatlas über alle Teile der Erde mit besonderer Berücksichtigung der Bodenverhältnisse. 28 Karten. Lpz., Fues. 1,00.

Worthmann, Oberl. Dr., Die deutschen Kolonien in Westafrika. (42 S. m. 2 K.) Schweidnitz, Heege. 1,00.

Müller, Griechische Reisen u. Studien. 2 Tle. (244 S. u. 209 S.) Lpz. Friedrich. 6,00.

Greely, Drei Jahre im hohen Norden. Die Lady Franklin-Bai-Expedition 1881—1884. Aus dem Engl. v. Dr. Teuscher. (539 S.) Jena, Costenoble. 12,00.

Neue Auflagen.

1. Mathematik.

Klette, Das perspektivische Zeichnen. Praktische Anleitung f. d. Unterricht. 3. Aufl. (42 S.) Braunschw., Bruhn. 0,80.

Seeger, Realgymn.-Dir., Die Elemente der Geometrie, für den Schulunterricht bearb. 3. Aufl. (211 S.) Wismar, Hinstorff. 2, 40.

Streissler, Prof. Doc., Die geometrische Formenlehre. Lehr- und Übungsbuch. 6. Aufl. (110 S.) Triest, Schimpff. 2,00.

Hoffmann, Prof. Dr., Anleitung zur Lösung planimetr. Aufgaben mit Übungsbeispielen etc. etc. 2. Aufl. (210 S.) Lpz., Fues. 1,80.

Tödter, Progymn.-Lehrer, Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra. 3. Aufl. (80 S.) Bielefeld, Klasing. 0,80.

Zillmer, Dr., Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- u. Rentenversicherungen, systematisch entwickelt. 2. Aufl. (187 S.) Berlin, Nicolai. 10,00.

Boymann, Geometrie der Ebene. 11. Aufl., besorgt von Oberl. Dr. Werr. (191 S.) Düsseldorf, Schwann. 2,00.

—, Arithmetik. In genauer Übereinstimmung mit Heis' Sammlung. 6 Aufl., bes. v. Oberl. Dr. Werr. (303 S.) Ebd. 3,00.

Harms u. Kallius, Rechenbuch für Gymnasien etc. etc. 13. Aufl. (264 S.) Oldenburg, Stalling. 2,25.

Lauteschläger, Dr., Beispiele und Aufgaben zur Algebra. (132 S.) 12. Aufl. v. Prof. Dr. Gräfe. Darmstadt, Bergsträßer. 1,60.

Dühring, Dr. E., Kritische Geschichte der allg. Prinzipien der Mechanik. 3. erw. u. teilweise umgearb. Aufl. (610 S.) Lpz., Fues. 10.

Löwe, Oberl., Methodisch geordnete Aufgaben zum kaufm. Rechnen. I. 5. Aufl. (88 S.) II. 4. Aufl. (77 S.) Lpz., Klinkhardt. à 0,80.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Ein Besuch der Jahresversammlung des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik

am 31. Mai — 1. Juni (Pfingstwoche) in Leipzig.

Vom Herausgeber.

Da der Herausgeber dieser Zeitschrift seit Jahren zwar über die allgemeine Tendenz dieses Vereins unterrichtet war, doch nicht wufste wie die Vereinsmitglieder die Beratungen in ihren Jahresversammlungen gestalten, so benutzte er die sich darbietende günstige Gelegenheit, einer solchen Versammlung als Gast und zugleich als Berichterstatter beizuwohnen um so lieber, als die Teilnahme nicht mit einer lästigen Reise verbunden war.*)

Hierzu kamen noch andere Gründe: Erstens interessierte ihn vor allem andern der auf dem Programm stehende Vortrag Beyers über das neue Naturgeschichts-Evangelium: die sogen. „Lebensgemeinschaften" (der „Dorfteich" von Junge). Hierüber einen kritischen Vortrag zu hören hatte er schon lange gewünscht. Zweitens wollte er sich darüber belehren, was für eine Bewandtnis es denn eigentlich mit der „wissenschaftlichen" Pädagogik des betr. Vereins habe. Denn der Berichter gesteht offen, dafs ihm der Name „Verein für wissenschaftliche Pädagogik" immer Bedenken entlockt hat. Sollten denn, so dachte er immer, die anderen pädagogischen Vereine „unwissenschaftlich" sein und sollte dieser Verein die wissenschaftliche Pädagogik in Erbpacht genommen haben? Es erschien ihm in dieser Benennung entweder eine Überhebung und damit zugleich eine Beleidigung gegen andere Vereine zu liegen oder aber — der Verein war wirklich im Besitze der „wissenschaftlichen" Pädagogik. Referent war daher um so gespannter auf die Verhandlungen, als er zu erfahren hoffte, worin denn die Berechtigung dieses *Epitheton ornans* liege.

Der Berichter mufs nun gestehen, dafs diese Bezeichnung allerdings einige Berechtigung hat. Die Eigenart der Verhandlungen des Vereins besteht nämlich darin, dafs dieselben auf Grund der Aufsätze seines Jahrbuchs geführt werden. Einige Mitglieder legen ihre Abhandlungen in demselben nieder und über diese wird dann nach Auswahl und nach bestimmtem Programm diskutiert. Es läfst sich nun denken, dafs jeder Verfasser in einem solchen Artikel sein Bestes zu geben bestrebt sein wird. Aber die Hauptsache ist die, dafs nun jedem Mitgliede ermöglicht ist, an der Hand dieser Aufsätze Kritik an denselben zu üben und sich

*) Die zahlreich besuchte Versammlung wurde im Lokale des Lehrervereins-Hauses abgehalten unter Vorsitz des Prof. d. Pädagogik Vogt aus Wien.

auf die Diskussion vorzubereiten. Es sind also die Mitglieder sämtlich — man erlaube den technischen Ausdruck — „Korreferenten“ und der „Referent“ mufs sich auf die von allen Seiten möglichen Angriffe gefafst machen, sich dagegen rüsten und vertheidigen. Es ist klar, dafs aus einem solchen Meinungskampfe ein ganz anderes und weit besseres, weil fruchtbareres, Resultat sich ergeben mufs, als wenn, wie es gewöhnlich geschieht, unmittelbar nach einem abgehaltenen Vortrage über denselben verhandelt wird, wobei natürlich den Streitenden vieles entgeht, da jeder sich auf seine kurzen, in Eile gemachten, Notizen verlassen mufs.

Hier dagegen sieht er den Wortlaut vor sich und hat lange vorher Gelegenheit gehabt, den Gegenstand durchzudenken. Auch wird die Zeit, welche der gedruckte Vortrag, wenn er gesprochen worden wäre, beansprucht hätte, gespart.

Eine zweite Eigenthümlichkeit der Verhandlungen liegt darin, dafs die Aufsätze sämtlich auf dem Grunde der Herbart-Zillerschen pädagogischen Lehren aufgebaut sind. Daher ist es nicht leicht, ja kaum möglich, ohne Kenntnis dieser Spezialpädagogik den Verhandlungen mit Verständnis zu folgen. Hierin aber liegt zugleich die Gefahr der Unverständlichkeit und Einseitigkeit und dies ist, wie uns scheint, die Achillesferse dieser Pädagogik.

Was nun diese jüngste Versammlung betrifft, so hatte sie programmgemäfs eine Anzahl der Aufsätze ihres XIX. Jahrbuches zur Diskussion gestellt. Den gröfsten Teil der Verhandlungen füllten aus die beiden Abhandlungen von Zillig-Würzburg „Nachträge zum Geschichtsunterricht in der Erziehungsschule“ und von Göpfert-Eisenach „die Verwertung der deutschen Sagen; speziell der thüringischen im Unterricht.“ So sehr wir uns nun auch bemühten, den Verhandlungen aufmerksam zu folgen, so erzeugte doch die langausgezogene Diskussion eine Abspannung, die ermüdend wirkte. Der Streit: ob Thüringische oder Nibelungensage*), wollte gar kein Ende nehmen und die Debatte war wieder von den mannigfachsten „Kulturstufen“ und „Kulturreihen“ durchwoben.

Für den Referenten hatte, wie schon bemerkt, ein besonderes Interesse der angekündigte Vortrag von Beyer-Jena: „F. Junge, über naturwissenschaftlichen Unterricht in der Volksschule“ und Rolle-Beyer, über naturw. Unterricht (Junge wird hier von Beyer, und dieser von Rolle kritisiert). Hier nun hoffte Ref. endlich einmal etwas Gediegenes über dieses neue Evangelium**) des naturgeschichtl. Unterrichts zu hören. Vergebens! Denn leider kam dieses Tagesthema, abgesehen von der Verspätung (es kam erst am 3. Tage Vorm. $^1/_2$10 Uhr an die Reihe) so gut wie gar nicht zur Verhandlung. Referent wurde hier sehr enttäuscht und die „wissenschaftliche“ Pädagogik erlitt in seinen Augen dadurch gewaltigen Schiffbruch. In dem unten mitgeteilten Berichte des Leipz. Tageblatts heifst es: „Aber der Hr. Verfasser (Göpfert) hatte in seiner Abhandlung noch eine andere wichtige Frage in Anregung gebracht, nämlich ob die Nibelungensage eine besondere Kulturstufe repräsentiere und dies führte auf die Abhandlung von Direktor Beyer-Jena, welche Junges Behandlung des naturw. Unterrichts zum Gegenstande hat, und eine nähere Darlegung der Beyerschen Kulturstufen enthält, auf die wiederum Pfarrer Rolle in seiner Abhandlung über Beyers naturw. Unterricht eingehend Bezug nimmt.“ Ein solcher *Salto mortale* über die breite Kluft zwischen Nibelungen und Naturgeschichte erscheint uns erschreckend bedenklich; er kann nur in der überaus hohen Sphäre der gröfsten Allgemeinheit, wo das Wesen und die Eigenart der einzelnen Wissensgebiete sich vollständig verflüchtigt haben, gefahrlos gemacht werden. Die Besprechung hielt sich

*) Ob die Unsittlichkeit, die in der „Nibelungensage“ liegt, der Schule frommt, ist uns sehr fraglich.

**) Es ist nicht einmal neu, sondern diese Methode hat bereits Rofsmäfsler in seinem Buche „die vier Jahreszeiten“ befolgt.

denn auch in einem so allgemeinen Rahmen auf Grund speziell Zillerscher Lehren, dafs sie so wie sie war, ebensogut auf jeden andern Lehrgegenstand gepafst hätte. Sie war zudem so kurz und so wenig tief eingehend, dafs man sagen mufs: das Thema wurde nur gestreift. Von Junge und seinen „Lebensgemeinschaften"*) erfuhr man gar nichts. War denn wirklich über seine und Beyers, bezw. Rolles Auffassung und über ihre Unterschiede so wenig zu sagen?

Referent verliefs daher unbefriedigt und verstimmt die Versammlung, ohne den Schlufs derselben abzuwarten. Der allgemeine Eindruck, den dieselbe auf uns gemacht hat, war der einer pedantischen Anklammerung an die allgemeinen und abstrakten Principien weniger der Herbartschen als vielmehr der Zillerschen Lehren; als ob diese Pädagogik die alleinseligmachende und jede andere, auf anderem Grunde aufgebaute, und so zu sagen nach dem Normalmafs der Zillerschen Lehre nicht „geaichte" Pädagogik zu verwerfen wäre. Es erschien uns das beinahe als Principienreiterei. Ein — wie es schien etwas satirisch angehauchter — uns übrigens unbekannter Teilnehmer an der Versammlung, der dieselbe mit uns zugleich verliefs, äufserte: Leipzig habe seit Wochen die Cirkusreiter gehabt, erst gestern hätte es die (Jubiläums-) Sportreiter gesehen; es sei daher eine willkommene Ergänzung, dafs als „Dritte im Bunde" noch die „Principienreiter" sich eingefunden hätten. „Sie Spötter! rief ich ihm zu. Doch der Böse — verschwand. Ich aber, heimkehrend erwog in meinem Innern meinen alten Wahlspruch: „Man soll aus allem eine Schule machen!" —

Wir lassen nun unserem Berichte noch den des Leipziger Tageblatts (mit einigen redaktionellen Änderungen) folgen, damit die Leser auch über einige andere von uns nicht berührte Seiten der Verhandlungen Aufschlufs erhalten, obschon dieselben gar nicht in den Rahmen der von unserer Zeitschrift vertretenen Fächer gehören. Aber es ist aus diesem Berichte noch mehr als aus dem unsrigen, das eigenartige Wesen dieser im Geiste und in der Terminologie der Zillerschen Pädagogik gehaltenen Verhandlungen zu erkennen; nicht minder giebt der Bericht den Fernerstehenden über manche (persönliche und materielle) Verhältnisse des Vereins Aufschlufs.

Verein für wissenschaftliche Pädagogik.

Referat des Leipziger Tageblatts (1887 No. 150 I. Beilage).

Zu der für den 31. Mai und 1. Juni ausgeschriebenen Generalversammlung des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik hatte sich am Vorabende bereits eine grofse Zahl von Vereinsmitgliedern aus Nah und Fern im Saale des Lehrervereinshauses eingefunden. Die zu dieser Zeit stattfindende Vorversammlung eröffnete der Vereinsvorsitzende, Herr Prof. Dr. Vogt aus Wien, indem er zuerst Hrn. Dir. Dr. Barth als dem Vorsitzenden des Leipziger Localvereins das Wort erteilte. Derselbe begrüfste die Versammlung in herzlicher Weise; zuvörderst den Vereinsvorsitzenden, der den auf nahezu 800 Mitglieder angewachsenen Verein mit umsichtiger Hand weiter geleitet und zwischen die von links und rechts kommenden Feinde unentwegt hindurchgeführt habe. Weiter begrüfste er die anwesenden Mitarbeiter am 19. Jahrbuche, dessen Abhandlungen die Grundlage der Diskussion abzugeben hätten und die dazu bestimmt seien, die bereits in früheren Jahrbüchern angesponnenen Fäden weiter fortzuführen und damit der Wissenschaft der Pädagogik selbst neue Bausteine darzubieten. Endlich galt sein Grufs den übrigen anwesenden Vereinsmitgliedern, die zum Teil aus weiter Ferne herbeigeeilt seien, um an den Verhandlungen teilzunehmen, indem er die regelmäfsig zu den General-

---

*) Einen belehrenden Artikel hierüber findet man in dem neuesten (11.) Hefte der Frickschen Lehrproben etc. von M. Fischer-Strafsburg. „Zum Lehrplan der Naturgeschichte" S. 82 u. f.

versammlungen kommenden Mitglieder als eine „Lebensgemeinschaft“ bezeichnete, die sich die Förderung der wissenschaftlichen Pädagogik zur Aufgabe gestellt habe. Hierauf erfolgten die üblichen Berichte der verschiedenen Localvereine aus Halle, Jena, Dresden, Eisenach, Auerbach i. V., Leipzig-Stadt und Leipzig-Land, sowie Mitteilungen über die pädagogischen Fortschritte in Plauen, Altenburg, Elberfeld-Barmen, Glogau etc. Besonders interessant waren die Berichte aus der Schweiz, Siebenbürgen, welche Direktor Dr. Just-Altenburg auf Grund schriftlicher Mitteilungen erstattete.

Am 31. Mai früh 7½ Uhr begannen nach einer herzlichen Begrüfsung von Seiten des Leipziger Lehrervereins durch Herrn Dr. Hummel die wissenschaftlichen Verhandlungen über die „psychologischen Beobachtungen“ des Mittelschullehrers Grabs-Glogau, welche dieser über die ersten Lebensjahre seines Sohnes gesammelt hatte. Diese Abhandlung wurde in eingehender Weise von den Herren Dir. Just und Oberlehrer Ufer-Altenburg, Dr. Göpfert-Eisenach, cand. min. Glöckner und Lehrer Teupser-Leipzig besprochen. Abgesehen von einzelnen Ausstellungen, fand dieselbe eine beifällige Aufnahme, so dafs der Wunsch nach Vermehrung solcher Beobachtungen gerechtfertigt war. In gleich beifälliger Weise sprach sich die Versammlung über die Abhandlung des Herrn Professor Dr. Menge-Halle, „die Verbindung von Lektüre und Grammatik“ aus. Dieselbe legt eine Behandlung des I. Kapitels aus Cäsar's *Bellum Gallicum* dar und führt zu der Erkenntnis, welch ein reicher Gewinn bei rechter Behandlung aus der Anwendung der Herbart-Ziller'schen Grundsätze auch für die Gymnasialfächer zu gewinnen sei. Dabei hat der Herr Verfasser, welcher persönlich anwesend war, sich an die preufsischen Lehrpläne vom Jahre 1882 angeschlossen und gezeigt, wie mit geringen Modificationen den Anforderungen derselben entsprochen werden könne. An der Diskussion beteiligten sich vorzugsweise die Herren Professoren Vogt-Wien, Rein-Jena, Dir. Dr. Frick-Halle und Dr. Göpfert-Eisenach. Hierauf schritt die Versammlung zur Besprechung der Präparationen vom Seminaroberlehrer Dr. Thrändorf-Auerbach i. V., das Leben Jesu nach dem Matthäusevangelium betr. Verfasser hatte schon in früheren Jahrbüchern die Patriarchen-, Richter- und Königszeit der Israeliten behandelt. Durch die vorliegende Arbeit wurde der Cyklus zu Ende geführt. Die Einwendungen hatten einzelne methodische Bedenken zum Gegenstande. So hob Herr Archidiakonus Steglich-Hainichen hervor, dafs der Begriff „Himmelreich“ nicht scharf genug festgestellt, wie überhaupt auch in der Zillerschen Ethik nicht dargethan sei, welche Stellung die „beseelte Gesellschaft“ zum Himmelreich habe. Herr Pfarrer Rolle-Hoheneichen bemängelte die Auffassung, welche die Tempelsteuer als nur zu äufseren Gebräuchen bestimmt darstellte, insofern als die in Parallele gestellte Kirchensteuer der Jetztzeit die Erhaltung der Kirche in ihren verschiedenen Funktionen überhaupt bezwecke. Herr Dir. Dr. Barth-Leipzig endlich stellte in Abrede, dafs Erziehungsanstalten, Rettungshäuser, Jünglingsvereine, Herbergen zur Heimat etc. Einrichtungen der christlichen Kirche seien. Wohl sei es christlicher Geist, der den Verein für innere Mission zu solchen Veranstaltungen aufrufe, aber die Kirche als solche, d. h. die Kirchengemeinden, einzeln oder in ihrer Gesammtheit, hielten sich leider von diesen Bestrebungen noch fern. Auch sei kaum zu behaupten, dafs unsere Rechtspflege bereits vollständig von christlichem Geiste durchdrungen sei. Dies müsse, namentlich wenn man die Bergpredigt ins Auge fasse, noch als ein fernliegendes Ideal betrachtet werden.

Nach Schlufs dieser Diskussion kam die Abhandlung des Herrn Lehrers Zillig-Würzburg zur Besprechung, welche ebenfalls als eine Fortsetzung früherer Arbeiten zu betrachten war und als Nachtrag zum Geschichtsunterrichte in der elementaren Erziehungsschule Präparationen

zur Nibelungensage darbot. An der Verhandlung beteiligten sich die Herren Dir. Dr. Just und Oberlehrer Ufer-Altenburg, Dr. Göpfert-Eisenach, Prof. Rein-Jena, Dir. Dr. Lange-Plauen, Cand. Glöckner und Dir. Dr. Barth-Leipzig. In derselben kamen rein fachmännische Ausstellungen zur Sprache, so dafs wir hier von einer Berichterstattung absehen können. Den Schlufs des ersten Tages, sowie den Anfang des zweiten bildete die Abhandlung des Herrn Dr. Göpfert-Eisenach über die Verwertung der deutschen Sage, speziell der thüringischen im Unterrichte. Es wurde der eingehenden Behandlung der Sage und der angestellten Erörterung über die Notwendigkeit derselben im propädeutischen Geschichtsunterrichte von allen Seiten zugestimmt, während die Stellung der thüringischen Sagen innerhalb des Lehrplansystems und als für alle deutschen Schulen geltend unentschieden blieb. Aber der Herr Verfasser hatte in seiner Abhandlung noch eine andere wichtige Frage in Anregung gebracht, nämlich ob die Nibelungensage eine besondere Kulsurstufe repräsentiere, und dies führte auf die Abhandlung von Direktor Beyer-Jena, welche Junges Behandlung des naturwissenschaftlichen Unterrichts zum Gegenstand hat und eine nähere Darlegung der Beyerschen Kulturstufen enthält, auf die wiederum Pfarrer Rolle in seiner Abhandlung über Beyers naturwissenschaftlichen Unterricht eingehend Bezug nimmt. Während man Beyers Recension von Junges „Dorfteich" einhellig zustimmte, gab die von Beyer angeregte Frage, welche den geistigen Kulturstufen noch wirtschaftlich-materielle zur Seite stellt und beide mit einander in Verbindung zu bringen sucht, zu einer überaus anregenden Debatte Anlafs, an welcher sich aufser den bereits Genannten auch die Herren Direktor Wiget-Rohrschach, Dr. Hollenbach-Jena, Conrad-Eisenach und Dir. Dr. Wohlrabe-Halle beteiligten. Die Diskussion konnte der vorgeschrittenen Zeit wegen leider (!) zu keinem Abschlufs kommen, obgleich die interessante Arbeit von Seminarlehrer Menard über die Stellung des Zeichenunterrichts in der Volksschule auf die Kulturperioden ebenfalls ausdrücklich Bezug nahm und beachtenswerte Ergänzungen lieferte.

Die Verhandlungen gaben ein getreues Bild von dem eigenartigen Wesen des Vereins. Der Umstand, dafs das Jahrbuch längere Zeit vorher in die Hände der Mitglieder gelangt, ermöglicht ein genaues Studium der Abhandlungen und giebt der Diskussion das Gepräge ruhiger Objektivität. Wer das Jahrbuch vorher nicht gelesen, kann sich auch nicht gut an der Debatte beteiligen. So fällt alle Phrase, alles unnötige Gerede weg, wie denn auch die Schönrednerei nie Platz gefunden hat. Der Gegenstand allein beherrscht die wissenschaftliche Verhandlung.

Der Besuch der Versammlung liefs nichts zu wünschen übrig. Die Präsenzliste zählte über 160 Namen; darunter waren nicht wenige, deren Träger als hochachtbare Lehrer und Geistliche Leipzigs gelten können.

Noch sei bemerkt, dafs in der geschäftlichen Verhandlung, die kaum eine halbe Stunde in Anspruch nahm, Herr Lehrer Teupser den Kassenbericht vortrug, welcher einen Bestand von nahe 3000 *M.* ergab. Die nächste Generalversammlung soll, namentlich um den zahlreichen Mitgliedern aus der Schweiz den Besuch zu erleichtern, in Nürnberg stattfinden. Die ausscheidenden Vorstandsmitglieder wurden sämtlich wieder gewählt, doch wurde an Stelle des Herrn Prof. Ballauff in Varel, der seines vorgerückten Alters wegen aus dem Vorstande auszuscheiden wünschte, Herr Professor Dr. Menge-Halle gewählt. Schliefslich wurde auf Anregung des Herrn Dr. Kehrbach-Berlin beschlossen, betreffs der Unterstützung der Comeniusbibliothek eine Petition an den Reichskanzler

zu richten, wie denn auch dem Wunsche Ausdruck gegeben wurde, über den Fortgang der Comeniusstiftung sowohl, wie über die von Dr. Kehrbach erscheinenden *Monumenta Germaniae paedagogica* in jeder Generalversammlung unterrichtet zu werden.

Schliefslich sei noch erwähnt, dafs sowohl bei dem am 31. Mai im Lehrervereinshause stattfindenden Festmahle, wie bei dem Kommers, welcher Abends abgehalten wurde, die anregendste Stimmung herrschte. Besonders erfreuten bei dem letzteren die Ansprachen der Herren Dr. Hummel, Keller und Freyer, welche den Bestrebungen des Vereins volle Gerechtigkeit widerfahren liefsen. An demselben Tage besuchte ein Teil der auswärtigen Mitglieder die Lehrmittelausstellung der VI. Bürgerschule, ein anderer Teil widmete dem Krystallpalaste und hier insbesondere der Alberthalle seine Aufmerksamkeit. Am Nachmittag des zweiten Verhandlungstages fuhr nach einem Rundgange durch die Comeniusbibliothek ein Teil der Teilnehmer nach Liebertwolkwitz, um von da aus dem Monarchenhügel und dem Napoleonstein einen Besuch abzustatten.

Nächste Pfingsten schliefst das zweite Jahrzehnt des Vereins. Möge es den Mitgliedern vergönnt sein, zum Aufbau der „wissenschaftlichen" Pädagogik auch fernerhin noch recht viele Bausteine herbeizutragen!

Wir lassen nun diesem Berichte noch den Abdruck einer Stelle aus einem Aufsatze des pädagogischen Archivs Bd. XXIX, Heft 4 von einem preufs. Gymn.-Lehrer folgen („Betrachtungen über die Mängel unseres höheren Schulwesens nebst Vorschlägen zu deren Abhilfe"). Dieser Artikel spricht nämlich die Bedenken gegen die zwar nicht genannte aber doch — wie zwischen den Zeilen zu lesen — gemeinte Zillersche Pädagogik treffend aus.

Eine Stimme über die neuere Richtung der Pädagogik.

(Aus dem bereits oben zitierten Aufsatze eines preufs. Gymn.-Lehrers, Pädagog. Archiv 1887. Bd. XXIX, No. 4 S. 268).*)

„Im speziellen sympathisiert der Verf. auch mit der jetzt herrschenden Bevorzugung der Herbartschen Pädagogik. Er findet in derselben allerdings die Quintessenz aller Erziehungsweisheit, ja er ist geneigt zu sagen: die Grundzüge der von Herbart aufgestellten Forderungen stimmen vollkommen mit dem überein, was von jeher die Ansicht aller vernünftigen Pädagogen gewesen ist. Wenn es auch Herbart vorbehalten war, dieser Anschauung den klaren und logisch-begründeten Ausdruck zu verleihen: instinktiv befolgt ist seine Methode zu allen Zeiten von denen, die überhaupt zum Lehramt Geschick und Beruf besessen haben. Nun giebt es ja freilich nicht blofs vernünftige, sondern auch recht unvernünftige Lehrer, und namentlich eine grofse Menge von in das Lehramt eintretenden jungen Leuten, die — an sich nicht ohne eine gewisse Anlage zum Lehrer — doch diese Anlage ohne Anleitung nicht zur Ausbildung bringen würden. Eür diese ist es nötig, und für keinen Pädagogen schädlich, sich mit den Grundsätzen einer rationellen Pädagogik bekannt zu machen, wie sie in der Herbartschen Erziehungslehre in unbestritten vorzüglicher Art niedergelegt sind. Es kann auch nur mit Dank begrüfst werden, wenn einige, durch geistige Bedeutung oder vielseitige Erfahrung besonders dazu berufene Männer die immerhin ziemlich allgemein gehaltenen Herbartschen Prinzipien den praktischen Forderungen des Schullebens entsprechend im einzelnen ausgestalten, gewisse Einseitigkeiten Herbarts als solche hervorheben und manche für den wirklichen Unterrichtsbetrieb nützliche Winke ihrerseits hinzufügen. (S. d. S. 467—468 angegebenen Werke).

*) Abgedruckt mit gütiger Erlaubnis der Redaktion des pädagog. Archivs.
D. Red.

Leider begnügt sich die moderne Pädagogik nicht hiemit, vielmehr floriert gegenwärtig die Neigung, eine ganz spezielle Durchführung der allgemeinen pädagogischen Prinzipien bis ins einzelne, wie sie gewissen Schulmännern nach ihrer durchaus individuellen Ansicht und Erfahrung wünschenswert erscheint, als mustergültig und allgemein nachahmenswert hinzustellen. In Büchern und Zeitschriften, wie in der Praxis mancher Seminare wird die Lehre des Meisters bis in das tz breitgetreten und mit einer selbstgefälligen Wichtigthuerei, die nun einmal vielfach das Erbteil des deutschen Schulmeisters zu sein scheint, geben alle möglichen Lehrer aus ihrer eigenen Praxis Muster moderner Unterrichtsweisheit, die bisweilen geradezu die Satire herausfordern. Es blüht in diesen Lehrproben einerseits ein behagliches Verweilen bei dem Selbstverständlichen und Trivialen — in dieser Hinsicht will der Verfasser gar nicht leugnen, daſs solches Verweilen vielfach eine leidige praktische Notwendigkeit ist: so sehr er eine derartige Behandlung des Unterrichts im Interesse der begabteren Schüler bedauert, deren Teilnahme für den Lehrgegenstand dadurch geradezu ertötet werden kann, so kann er sich dem Umstande nicht verschlieſsen, daſs es auch viele unbegabte Jungen giebt, für die ebenfalls gesorgt werden muſs; für diese ist eine solche Manier nicht gut zu entbehren. Was den Verfasser und, wie er annimmt, auch noch manchen anderen abstöſst, das ist die anspruchsvolle Art, in der die moderne Pädagogik auftritt, indem ein jeder aus einem wirklichen oder vermeintlichen Einzelerfolg eine allgemein gültige Regel abstrahiert, die er nun mit der Miene eines Propheten der Welt verkündigt.

Dabei ist es auch andererseits nicht zu verwundern, wenn die Herbartsche Auffassung in der Praxis seiner Anhänger sich bisweilen geradezu in ihr Gegenteil verkehrt. Der Verfasser findet dies besonders bestätigt durch die Musterpräparationen, die die pädagogischen Zeitschriften aus den Seminaren und der Schulpraxis den jungen Normalpädagogen bringen. Wenn der Lehrer sich auf den zu erteilenden Unterricht vorbereitet, so ist dies nur zu billigen. Aber die jetzt vielfach verlangte Vorbereitung ist eine so detaillierte, daſs der Lehrer gerade die Hauptsache verfehlt, die der Geist der Herbartschen Pädagogik fordert: mit feinem Gefühl dem Gedankengang des Schülers nachzuspüren, um in ihm die Anknüpfungspunkte zu finden, die er für die Weiterentwickelung braucht. Der moderne Musterlehrer aber hat sein fertiges Programm für jede Lektion in der Tasche, bei jedem Punkte hat er sich angemerkt: was der Schüler dabei normaler Weise für Gedanken zu haben hat, und auf diesen Mustergedankengang hin doziert er frisch darauf los.*)

Die Kunst des Unterrichtens ist aber gerade die, bei Festhaltung des Fadens im Allgemeinen doch der Ausgestaltung der Lektion je nach den Ideen, die die Schüler selbständig äuſsern, einen möglichst weiten Spielraum zu lassen. Zu dieser lebendigen Teilnahme am Unterricht die Schüler anzuregen, auch den Schwerfälligen emporzuheben und den Zagenden zu ermutigen, das ist das Alpha und Omega aller Unterrichtskunst. Wer dies versteht, der ist ein Lehrer — wie er es im einzelnen macht, ist verhältnismäſsig nebensächlich, jedenfalls auch zum wesentlichen Teile individuell. Es ist auch nicht nötig, davon hinterher Rechenschaft zu geben, ja man möchte fast behaupten, der wahrhaft ideale Lehrer weiſs hinterher selbst nicht mehr genau, was er gesagt hat. Aber getragen von der — allerdings die unumgängliche Voraussetzung bildenden — sicheren und präsenten Herrschaft über den Lehrstoff und voll von lebendigem, wohlwollendem Verständnis für den jugendlichen Geist, der ja auch seinerseits das Vorhandensein dieses Verständnisses instinktiv empfindet,

---

*) Wir haben diese (sowie auch eine weiter unten folgende) wichtige Stelle durch den Druck hervorheben lassen. D. Red. d. Z.

schafft er zwischen sich und der Klasse jenen undefinierbaren seelischen Rapport, der der Schlüssel zu allen Unterrichtserfolgen ist.

Freilich, eine Musterpräparation kann ein solcher Lehrer nicht vorweisen; er hat seinen in einigen Hauptgedanken gipfelnden Plan, dessen Ausführung von der Aufnahme bei den Schülern abhängt, und das Beste, was ein solcher wirklich berufener Lehrer zu bieten hat, die Frische und der Zauber der Persönlichkeit, läfst sich in der pädagogischen Zeitschrift nicht wiedergeben. Dafs dies aber der Hauptfaktor für die Wirksamkeit des Lehrers ist, das vergessen unsere modernen Normalpädagogen nur zu leicht.

Vielleicht wird die vom Verfasser soeben bekämpfte Übertreibung der Pädagogik von selbst abnehmen, wenn unter der Wirkung einer veränderten Schul-Organisation, wie es der Verfasser hofft, die Zahl der unqualifizierten, nur aus äufseren Gründen in den Lehrerberuf eintretenden Elemente sich mindert. Denn nach der oben schon angedeuteten Meinung des Verfassers wird die Überschätzung der bis ins einzelne den Unterricht regelnden Methode durch den Umstand begünstigt, dafs dieselbe die persönliche Lehrertüchtigkeit einigermafsen entbehrlich zu machen scheint. So trägt sie die Gefahr in sich, zum Schutz der pädagogischen Unfähigkeit zu werden; dies ist ein Grund mehr zu ihrer Bekämpfung für den Verfasser, der, wie schon bemerkt, den Nutzen einer gewissen Vertrautheit mit den Resultaten und auch mit den Wandlungen der pädagogischen Wissenschaft weder für den jüngeren noch für den älteren Lehrer bestreiten will, und ebenso die Festhaltung einer gewissen auf Grund der allgemein anerkannten pädagogischen Prinzipien konstruierten Methode in einigem Grade als berechtigt anerkennt. Unter allen Umständen aber kann diese Methode dem Lehrer nicht mehr als einen Halt geben, der ja naturgemäfs ein festerer und bestimmterer ist, wenn die Einfachheit des Unterrichtszieles den zu denselben führenden Wegen eine klar zutage liegende Notwendigkeit verleiht. Dies ist auf der Elementarschule, in geringerem Grade auch auf dem Untergymnasium der Fall; aber selbst dort mufs dem Lehrer der nötige Spielraum gelassen werden, bei der Durchführung der für seinen Unterricht mafsgebenden Prinzipien nicht nur den wechselnden Bedürfnissen des objektiven einzelnen Falles, sondern auch seiner persönlichen Eigenart einige Rechnung zu tragen. Ein Lehrer, dem der dazu erforderliche pädagogische Takt fehlt, ist überhaupt für seinen Beruf verdorben; wer aber diesen Takt besitzt, darf in dessen Bethätigung nicht durch zu spezielle, sein freies Ermessen einschnürende Regeln behindert werden. Auf solche Einschnürung aber scheint dem Verfasser die moderne Pädagogik hinzuarbeiten, wenn sie vom Lehrer so ins einzelne gehende Rechenschaft verlangt, wie sie oben vom Verfasser geschildert worden ist. Dadurch begünstigt sie einen mechanischen Formalismus, der den Unterricht äufserlich in scheinbar wohlgeordneten Bahnen fortgehen läfst, ohne dafs dabei doch der eigentliche Lehrzweck erreicht wird. Gegen solchen Formalismus auf dem Gebiete der unterrichtlichen Methodik möchte sich der Verfasser hier noch mit derselben Entschiedenheit aussprechen, mit der er sich gegen verwandte Erscheinungen bei seiner Besprechung der Auswahl und Lehrzielbestimmung, wie des Unterrichtsbetriebes der einzelnen Schulfächer erklärt hat." —

Nachbemerkung des Herausgebers.

Von den Schriften, welche neuerdings gegen die Zillerianer erschienen sind, dürften folgende zu nennen sein: 1) Kühn (Pastor i. Altenburg*) „Die Zillerianer striktester Observanz nach ihren neuesten litterarischen Produktionen beurteilt." Altenburg, Dietz 1887. (35 S.) Im Vorwort weist

*) Altenburg scheint überhaupt ein Hauptkampfplatz zu sein. Denn gegen diese Schrift ist, wie wir gelesen, dort bereits eine Erwiderung erschienen.

der Verfasser hin auf 2) „die vernichtende Schrift gegen die Zillerianer“ von dem badischen Oberschulrat von Sallwürk, „Handel und Wandel der pädagogischen Schule Herbarts“. Langensalza, Beyer u. S. 1885. in erweit. Aufl. 1886 erschienen. — Ferner erwähnt Kühn 3) „die ruhigen Auseinandersetzungen Weesendoncks mit ihren betrübenden Enthüllungen“.*)

Reformen im höheren Schulwesen Englands.**)

Von Freunden des humanistischen Gymnasiums kann man nicht selten die Ansicht aussprechen hören, die ganze Realschulfrage verdanke ihr Dasein lediglich der eifrigen Agitation einiger ehrgeiziger Realschulmänner und sei eigentlich in den thatsächlichen Verhältnissen in keiner Weise begründet. In Wirklichkeit ist die Realschulfrage vor den „ehrgeizigen“ Realschulmännern dagewesen, und ohne das große Verdienst der letzteren schmälern zu wollen, müssen wir doch sagen, daſs sie im Grunde nur das rettende Wort gesprochen, das vielen anderen sozusagen auf der Zunge schwebte. Aber eben deswegen hat die Bewegung so rasch um sich gegriffen und in den verschiedensten Kreisen Anhänger gewonnen, so daſs ihr sogar aus erbitterten Feinden warme Freunde erwachsen sind. Solche Bewegungen lassen sich nicht künstlich machen, sie entwickeln sich mit Naturnotwendigkeit aus den veränderten Verhältnissen. Denn worin besteht schlieſslich das Wesen der Realschulfrage anders als im Kampfe der Bildungsmittel der Neuzeit mit denen vergangener Jahrhunderte, mit Bildungsmitteln, die den gegenwärtigen Bedürfnissen nicht mehr voll gerecht werden können? Das lebhaft gefühlte Bedürfnis hat die Real-Anstalten ins Leben gerufen; wer kann diesen nun, da doch nur der Lebende recht hat, verdenken, daſs sie gern am Leben bleiben wollen und darum nach der offiziellen Anerkennung durch entsprechende Berechtigungen streben? Mit bloſsen anerkennenden Worten und allgemeinen Sympathiebezeugungen ist ihnen nicht geholfen, denn wie die Verhältnisse bei uns einmal liegen, entscheidet über das Gedeihen der Anstalten nicht die Vortrefflichkeit der Bildung, welche sie gewähren, sondern in erster Linie Zahl und Wert der ihnen verliehenen Berechtigungen. Oder glaubt man, daſs das Gymnasium allein seinem inneren Werte die groſse Schülerzahl verdanke? Ohne Zweifel giebt dasselbe für gewisse Studienfächer eine ganz vortreffliche Vorbildung, aber man nehme ihm sein Monopol und in absehbarer Zeit wird sich sicherlich eine nicht unwesentliche Verschiebung des Besuchs der Schulen vollziehen in der Richtung, daſs im Allgemeinen diejenigen das humanistische Gymnasium besuchen werden, welche besondere Neigung für die alten Sprachen dazu treibt, oder denen wegen ihrer späteren Studien die Kenntnis dieser Sprachen unentbehrlich ist; die Übrigen werden den Realanstalten zufallen.

Daſs die Realschulfrage nicht etwas künstlich Gemachtes, ja daſs sie nicht einmal etwas specifisch Deutsches, sondern eine allgemeine Kulturfrage ist, lehrt ein Blick auf das Ausland, wo unsere Realschulmänner schwerlich irgend welchen Einfluſs haben. Nicht als ob uns das Ausland in allen Dingen Muster und Vorbild sein solle, aber indem wir eingedenk sind des Bibelwortes: „Ein Jeglicher sehe nicht auf das seine, sondern auf das, was des anderen ist“, kann uns doch oft die Betrachtung des Fremden Anlaſs zum Nachdenken geben und zu einer klareren und richtigeren Erkenntnis des eigenen verhelfen.

*) Die Schule Herbart-Ziller und ihre Jünger vor dem Forum der Kritik von Dr. Weesendonck (Saarbrücken). Wien, Pichlers W.

**) Abgedr. aus der „Täglichen Rundschau-Unterhaltungsbeilage Nr. 168 (1887).
D. Red.

In einer Reihe der wichtigsten Kulturstaaten sind in den letzten Jahrzehnten Umgestaltungen im höheren Schulwesen entweder durchgeführt oder von einsichtigen Männern aufs Dringendste befürwortet worden. Wir nennen als solche: Norwegen, Schweden, Dänemark, Ungarn, die Schweiz, Frankreich, Belgien, Holland und die Vereinigten Staaten. Auch in Rufsland sollen nach Zeitungsnachrichten solche bevorstehen, und in Italien wird von gediegenen Kennern des Griechischen die Entfernung dieser Sprache als obligatorischen Unterrichtsgegenstands gefordert. (Vgl. Rassegne letterarie di Guido Mazzoni S. 170.) Überhaupt ist allen diesen Reformen gemeinsam das Zurückdrängen der klassischen Sprachen und gröfsere Betonung der Muttersprache und der übrigen neueren Sprachen, der vaterländischen Geschichte und der Kulturgeschichte, sowie des naturwissenschaftlich-mathematischen Elementes. Mit Recht; denn für unsere moderne Kultur, für das Verständnis der Welt, in der wir leben, ist die Kenntnis dieser Dinge wichtiger als die der alten Sprachen. Wenn man dem gegenüber sich auf die besondere formal-bildende Wirkung der Beschäftigung mit den alten Sprachen beruft, so ist doch daran zu erinnern, dafs man sich hierauf erst in einer Zeit besonnen hat, als der praktische Nutzen der Erlernung dieser Sprachen für alle, welche eine höhere Bildung suchten, nicht mehr so ohne weiteres einleuchtend war, wie im Mittelalter und noch im Beginn der Neuzeit. Übrigens wohnt diese vielgerühmte, formal-bildende Kraft auch den anderen Unterrichtsgegenständen inne; überhaupt kommt es für die Zucht und Schulung des Geistes weniger auf den Stoff, als auf die Behandlung und den Lehrer an.

Zu den vorhin genannten Ländern hat sich in der letzten Zeit auch noch England gesellt, das doch sonst, wie bekannt, mit zäher Hartnäckigkeit am Althergebrachten festhält. Seit Jahren haben sich die alten, grofsen Stiftungsschulen, Horte der klassischen Sprachen, wie Harrow, Rugby u. a., gezwungen gesehen, neben der Classical Side (humanistischen Abteilung) auch eine sogenannnte Modern Side (Real-Abteilung) einzurichten. Vor einigen Jahren ist in Cambridge das Studium der neueren Sprachen dem der klassischen gleichgestellt worden durch Einrichtung eines Modern and Mediaeval Languages Tripos (Schlufsprüfung in den neueren und mittelalterlichen Sprachen), und die erste erfolgreiche Prüfung in diesen Sprachen ist dort im vergangenen Jahre abgehalten worden. Diesem Beispiele hat nun auch die konservative Universität Oxford folgen müssen, indem sie in diesem Jahre die Gründung einer Final School in Modern European Languages beschlossen hat. Bedeutungsvoller aber erscheint noch eine Änderung, welche die Londoner Universität durch ihre neue, am 16. Februar dieses Jahres ausgegebene Prüfungsordnung bezüglich der Immatrikulations-Prüfungen bei dieser Universität eingeführt hat.

Bekanntlich feierte die London University mit der Königin Viktoria ihr 50jähriges Jubiläum. Sie wurde im Gegensatz zu den beiden alten Universitäten gegründet für solche, welche auf diesen aus irgend einem Grunde, z. B. des religiösen Bekenntnisses halber, nicht Aufnahme finden konnten, oder denen die Mittel zu dem teuren Universitätsaufenthalte fehlten. Ihrer Bestimmung nach hat sie mit der Erziehung und dem Unterrichte unmittelbar nichts zu thun, sie hat nur Prüfungen abzuhalten und Diplome und Grade zu erteilen, gleichgiltig, wo der Kandidat seine Kenntnisse erworben hat. Wer irgend einen Grad an der Universität erwerben will, mufs zuvor ihr Matriculation Examination, das ungefähr unserer Abiturientenprüfung entspricht, bestanden haben. Zweimal im Jahre wird eine solche Prüfung in London selbst (am ersten Montag im Januar und am dritten Montag im Juli beginnend), in andern Städten Englands und in den Kolonien abgehalten. Das Zeugnis über bestandene Matriculation Examination berechtigt zum Studium der Medizin und der Jurisprudenz bei dem College of Surgeons, beziehungsweise der Incorporated Law Society und genügt für die Aufnahme in das Royal Military

College, wenn hier noch eine Prüfung im geometrischen Zeichnen bestanden wird. Die Zeugnisse, ebenso wie die bei der Universität erworbenen Grade, geniefsen besonderes Vertrauen wegen der bekannten Strenge der Prüfungen. Grade können erworben werden in Litteratur, Mathematik, Physik, Naturwissenschaften, Medizin, Jurisprudenz und Musik.

Uns interessiert hier besonders die Matrikulation Examination. Sie ist im wesentlichen eine schriftliche, doch sind die Examinatoren auch befugt, noch mündliche Fragen zu stellen, wo es ihnen angebracht erscheint. Die schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben werden den Kandidaten, die sich nicht vor vollendetem 16. Lebensjahr zur Prüfung stellen dürfen, auf gedruckten Papieren vorgelegt. Ursprünglich gab es acht solcher Aufgaben, zwei in den klassischen Sprachen, zwei in der Mathematik, zwei im Englischen und zwei in den exakten Wissenschaften, wofür zusammen 24 Stunden Zeit gestattet war. Später wurde durch Hinzufügung einer neueren Sprache die Prüfungszeit auf 28 Stunden, die sich auf fünf Tage verteilten, ausgedehnt, was denn bis heute beibehalten worden ist.

Wir übergehen die Wandlungen, welche die Prüfung im einzelnen durchgemacht hat und erwähnen nur, dafs der Minister des Innern im Jahre 1873 infolge eines Versehens entsprechend einer wahrscheinlich unklar gefassten Resolution des Universitäts-Senats das Griechische aus der Zahl der obligatorischen Prüfungsgegenstände strich, dafs es jedoch bald darauf wieder eingeführt wurde. Durch die Prüfungsordnung ist jene vorzeitige Änderung endgiltig bestätigt, so dafs vom Juni 1888 ab, wo die neue Ordnung in Kraft tritt, Griechisch nicht mehr zu den obligatorischen Prüfungsgegenständen bei der Londoner Universität gehört. Da es nun an den englischen höheren Schulen eine staatlich beaufsichtigte Abgangsprüfung nicht giebt, so werden die zahlreichen jüngeren Schulen, welche nicht in Verbindung mit Oxford oder Cambridge stehen, ihren Lehrplan nach den Forderungen der Londoner Universität, die sie als ihr Haupt ansehen, einrichten und Griechisch höchstwahrscheinlich fallen lassen. Gleichzeitig ist die Dauer der Prüfung von 28 auf 25 Stunden herabgesetzt worden, so dafs der Verlauf der Prüfung künftig folgender sein wird:

Montag: Nachmittags 2—4: Latein; 4—6: Lateinische Grammatik und Komposition. — Dienstag: Morgens 10—1: Nach Wahl des Kandidaten entweder Griechisch, oder Französisch, oder Deutsch, oder Sanskrit, oder Arabisch. Nachmittags 2—5: Arithmetik und Algebra. — Mittwoch: Morgens 10—1: Geometrie. Nachmittags 2—5: Nach Wahl des Kandidaten entweder Chemie, oder Wärme und Licht, oder Magnetismus und Elektrizität. — Donnerstag: Morgens 10—1: Englische Sprache. Nachmittags 2—5: Englische Geschichte nebst darauf bezüglicher Geographie. — Freitag: Morgens 10—1: Mechanik.

Es kommen danach auf die sprachlichen Fächer 10 Stunden, auf die mathematisch-naturwissenschaftlichen 12 Stunden, und auf englische Geschichte und Geographie 3 Stunden.

Bei der schriftlichen Prüfung unserer Gymnasial-Abiturienten kommen dagegen auf die sprachlichen Fächer 16—19 Stunden (auf Griechisch und Latein mindestens 11 Stunden), auf die Mathematik 5 Stunden, und in Geschichte und Geographie wird überhaupt nicht schriftlich geprüft.

Es würde zu weit führen, die Anforderungen in den einzelnen Fächern anzugeben; der Probe halber soll dies nur für das Lateinische und das Griechische geschehen.

Anderthalb Jahr im Voraus macht der Senat öffentlich diejenigen Werke bekannt, welche Gegenstand der Prüfung sein werden, in der Regel je ein Werk für jede Sprache, mehrere nur dann, wenn dieselben geringeren Umfang haben. Juni 1888 z. B. wird im Lateinischen über Cäsar: De Bello Gallico, Buch VII., im Griechischen über Xenophon, Cyropaedia, Buch I. geprüft werden.

Im Lateinischen bezw. Griechischen trifft der Senat seine Wahl unter folgenden Werken: Virgil: Zwei Bücher der Aeneide. — Horaz: Zwei Bücher der Oden. — Sallust: Verschwörung des Catilina, oder der Jugurthinische Krieg. — Cäsar: Eins der längeren, oder zwei der kürzeren Bücher. — Livius: Ein Buch. — Cicero: De Senectute, oder De Amicitia nebst vier der folgenden Reden: Pro Lege Manilia, oder eine der vier catilinarischen Reden, oder Pro Archia, oder Pro Balbo, oder Pro M. Marcello. — Ovid: Ein Buch der Metamorphosen (oder Auswahl aus zwei Büchern) nebst einem Buche der Episteln, oder der Tristien, oder sechs der Heroiden, oder auch zwei Bücher der Tristien. — Homer: Ein Buch. — Xenophon: Ein Buch. — Äschylus: Die Perser. — Euripides: Entweder Hecuba, oder Andromache, oder Hercules Furens, oder Medea, oder Alcestis oder Heraclidae.

Die lateinische Aufgabe soll Stellen zum Übersetzen ins Englische enthalten, nebst Fragen, die sich aus dem gewählten Werke ergeben. Auch können noch kurze und leichte Stellen aus den übrigen eben genannten Werken zum Übersetzen gegeben werden. In einer zweiten lateinischen Aufgabe wird die Beantwortung von grammatischen Fragen sowie Übersetzung einfacher, leichter Sätze aus dem Englischen ins Lateinische verlangt. Im Griechischen ist die Aufgabe ähnlicher Art, nur fällt hier die Übersetzung ins Griechische fort.

Man sieht, was in den alten Sprachen verlangt wird, ist im Vergleich mit dem, was unsere Gymnasial-Abiturienten zu leisten haben, sehr mäfsig zu nennen, und doch ist man der Ansicht, dafs diese Vorkenntnisse zu einem erfolgreichen Studium der Medizin und Jurisprudenz völlig ausreichen, selbst dann noch, wenn Kenntnisse im Griechischen gänzlich fehlen.

Was von den Freunden der Realschule bei uns seit Jahren vergebens erstrebt worden ist, das sehen wir in England verwirklicht. Mag nun auch noch eine Reihe von Jahren darüber vergehen, so kann es doch wohl kaum einem Zweifel unterliegen, dafs die naturgemäfse Entwickelung der Dinge bei uns demselben Ziele zutreibt. Wann dies Ziel nun auch erreicht werden mag, wir sind der festen Überzeugung, dafs das Studium der klassischen Sprachen dabei keinen Schaden leiden wird.

Friedrich von Aschen.

Unsere grofsen geistlichen Reformatoren Luther und Melanchthon gegenüber den Naturwissenschaften und dem naturwissenschaftlichen Unterricht.

Ein Beitrag zu einer künftigen Geschichte des naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Vom Herausgeber.

In dem neuen Werke von Erdmann, „Geschichte der Entwickelung und Methodik der biologischen Naturwissenschaften (Zoologie und Botanik)“ Kassel und Berlin (Verlag von Th. Fischer) 1887, wird auch der genannten Reformatoren gedacht. Es heifst dort S. 19 zuvörderst über Roger Baco (1224—1294):

„Rogerus Baco ist einem Meteor zu vergleichen, das nur kurze Zeit hell strahlt und dann in die Nacht der Vergessenheit sinkt. Nachdem unsere Augen durch seine hellen Gedankenblitze fast geblendet sind, empfinden wir die darauf folgende Geistesfinsternis nur um so schmerzhafter; drei Jahrhunderte hindurch konnte sich nun wieder der krasseste Aberglaube breitmachen. Die Schattenpflanzen Alchemie, Astrologie, Ne-

kromantie und Chiromantie verbunden mit grauenvollen Hexenprozessen und qualvollen Marterungen Unschuldiger, wucherten wie noch nie."

Dann fährt der Verfasser fort:

„Auch die Reformatoren Luther und Melanchthon schafften keine Änderung. Melanchthon, der in Wittenberg eine Zeit lang Physik las, verfaſste ein Lehrbuch der Physik, d. h. er machte einen Auszug aus dem Aristoteles*) und stellte die Naturwissenschaften als rechter Theologe selbstverständlich unter die strenge Kontrolle der Theologie; auch als eine *ancilla ecclesiae* wuſste er sie zu benutzen. Alchemie und Astrologie standen bei ihm als „exakte Wissenschaften" in hohem Ansehen. Nicht besser war Luther. Jedermann weiſs ja, wie sehr der groſse Reformator dem Hexenspuk zugänglich war, so daſs er in einer um seinen Kopf summenden Fliege den leibhaftigen Gottseibeiuns erkennen zu müssen glaubte und nach ihr den berühmten Wurf mit dem Tintenfaſs that. Mit der fortschreitenden Naturforschung lebte er auf sehr gespanntem Fuſs. Über die Lehre seines groſsen Zeitgenossen Kopernikus läſst er sich in seinen „Tischreden" also vernehmen**): „„Es ward gedacht eines neuen Astrologi, der wollte beweisen, dass die Erde beweget würde und umginge, nicht der Himmel oder das Firmament, Sonne und Mond; gleich als wenn einer auf einem Wagen oder in einem Schiff sitzt und bewegt wird meynete, er sässe still und ruhete, das Erdreich aber und die Bäume gingen und bewegeten sich. Aber es gehet jetzt also: wer da will klug sein, der muss ihm***) nichts lassen gefallen, was andere machen, er muss ihm etwas Eigenes machen, das muss das allerbeste sein, wie er's machet. Der Narr will die ganze Kunst Astronomiae umkehren. Aber wie die heilige Schrift anzeiget (!), so hiess Josua die Sonne still stehen und nicht das Erdreich. Josua 10, 12. 13."" †) Also Kopernikus ist kurzweg ein Narr, weil er anderer Meinung als Josua ist!

Zwar teilt Raumer in seiner „Geschichte der Pädagogik" ††) eine Stelle aus Luthers „Tischreden" mit, welche fast glauben machen könnte, Luther selbst habe der Naturbeobachtung und deren Pflege ein warmes Interesse entgegengebracht. Es handelt sich aber an dieser Stelle darum, den Erasmus zu verkleinern und sich selbst etwas zu beräuchern, und diese Absicht ruft in jedem vorurteilslosen Leser jenes Ausspruches mehr als bloſses Miſstrauen hervor. Auch ist die ganze Betrachtungsweise vollständig biblisch, der Natur nicht entsprechend."

Diese Stelle in „Luthers Tischreden" (s. Walchsche Ausgabe v. J. 1743 XXXVII, S. 1629) ist überschrieben „Reale Realien" und lautet†††):

„Wir, sprach Dr. Martinus, sind jetzt in der Morgenröthe des künftigen Lebens, denn wir fahen an wiederum zu erlangen das Erkenntniss der Creaturen, die wir verloren haben durch Adams Fall. Jetzt sehen wir die Creaturen gar recht an, mehr denn im Pabstthum etwan. Erasmus aber fragt nichts darnach, bekümmert sich wenig wie die Frucht im Mutterleibe formiert, zugerichtet und gemacht wird, so achtet er auch nicht den Ehestand, wie herrlich der sey. Wir aber beginnen von Gottes

---

*) Verf. teilt hieraus nichts mit, wir gedenken aus dieser Physik später auch einmal eine Probe zu geben.

**) Wir haben die folgende Stelle in Luthers Tischreden auf der Leipziger Universitätsbibliothek nachgelesen und gefunden, daſs der Verf. sehr unsorgfältig zitiert. Eine ganze Reihe von Worten hat er weggelassen („nichts lassen gefallen, was andere machen, er muſs ihm") und noch manches Andere. So ist es, wenn man nach einem andern zitiert und nicht an der Quelle schöpft. Hierdurch wird das Vertrauen auf die Genauigkeit der übrigen Zitate des Buches sehr erschüttert. D. Red.

***) Das bekannte „ihm" der Lutherischen Bibelübersetzung statt „sich".

†) Luther „Tischreden". Walchsche Ausgabe von 1743 pag. 2260. Der Verf. aber zitiert nach Kolb, Kulturgeschichte d. Menschheit, II. pag. 670.

††) Bd. I. pag. 173. 3. Aufl.

†††) Wir haben diese Stelle, welche Erdmann nicht mitteilt, ebenfalls aus Luthers Tischreden mit Beibehaltung der Orthographie, Interpunktion (und natürlich auch des Stils) abgeschrieben. D. Red.

Gnaden, seine herrlichen Werke und Wunder auch aus den Blümlein zu erkennen, wenn wir bedenken, wie allmächtig und gütig Gott sey; darum loben und preisen wir ihn und danken ihm. In seinen Creaturen erkennen wir die Macht seines Worts, wie gewaltig das sey. Da er sagte, er sprach, da stund es da. Auch in einem Pfirsichkern: derselbige, obwohl seine Schale sehr hart ist, doch muss sie sich zu seiner Zeit aufthun, durch den sehr weichen Kern, so drinnen ist. Diss übergehet Erasmus fein und achtets nicht, siehet die Kreaturen an, wie die Kühe ein neu Thor."

Raumer leitet diese Stelle ein mit den Worten: „Folgende schöne Stelle (?) kann noch stärker darthun, wie Luther nicht etwa nur im Revier (!) der Sprache einheimisch war, sondern auch in dem der realen Realien."

In einer Anmerkung stellt Raumer (Bd. I. 4. Aufl. 1872 S. 139) in Aussicht, weiterhin zu erklären, was unter „realen Realien" zu verstehen sei. Aber wir konnten diese Erklärung nicht finden. Jedenfalls verdient dieser Ausdruck in ein „Wörterbuch der Pleonasmen" aufgenommen zu werden.

Gegen Erasmus scheint Luther überhaupt einen gewaltigen Ingrimm empfunden zu haben. Er sagt u. a.: „Erasmus achtet Gottes Werke und Creaturen nicht". — „Erasmus ist ein Bube in der Haut" (S. 1630). — „Denn Erasmo ist Gott, Vater, Sohn und heiliger Geist ein lächerlich Ding". —

Die obige mitgeteilte längere Stelle Luthers, welche Raumer „schön" nennt, hat, wie überhaupt die Lektüre einiger weiteren Abschnitte aus Luthers Tischreden, auf uns einen eigentümlichen, beinahe betrübenden Eindruck gemacht. Schon die Sprache seiner Zeit, mit ihren — im Vergleich zu unserer gereinigten — vielen Fehlern läfst uns Gott danken, dafs endlich die alte Lutherische Bibelübersetzung, die von Anbetern Luthers nicht hoch genug gepriesen werden kann, nun einer edleren weichen mufs. Aber auch der Inhalt der Worte Luthers ist von einer Gedankenarmut und einer Fülle von Gemeinplätzen, die nur zu sehr an manche geistlose Kanzelreden unserer Zeit erinnern. Man erlangt daraus eine Vorstellung von dem damaligen Zustande des naturwissenschaftlichen Unterrichts (Unterricht über die „Kreaturen"), der eben keiner war; denn ein gut Teil der Wissenschaft löste sich damals auf in religiöse — speziell biblische — Salbaderei oder war wenigstens mit dieser stark gemischt. —

Verunglückung eines Fachgenossen in den Alpen*) im Juli 1887.

Aus Kempten, 24. Juli, wird dem „Correspondenten von und für Deutschland" geschrieben:

Schon wieder hat sich in den Bergen ein schwerer Unglücksfall ereignet. Am 22. ds., Vormittags halb 10 Uhr ist, wie schon kurz mitgeteilt, Herr Ernst Prix, Oberlehrer am Realgymnasium in Annaberg (Sachsen), beim Abstieg von der Parseyerspitze**) (höchstem Gipfel der Kalkalpen, 3034 m), abgestürzt und sofort tot geblieben. Die näheren Umstände dieses Unglückfalles sind grauenerregend. Zwei Herren von hier waren mit dem Verunglückten und einem Herrn aus Lindau in der „Augsburger Hütte" (errichtet von der Sektion Augsburg des deutsch-österr. Alpenvereins) zusammengetroffen, bestiegen von hier aus in zwei Gruppen mit je einem Führer die Parseyerspitze und machten gemeinsam den Abstieg, der sehr schwierig und gefährlich ist, da die fast steile Felswand

---

*) Dem Leipziger Tageblatt nachgedruckt. 1887. Nr 208. III. B. D. Red.

**) Weder im Guthe-Wagner, noch in Berlepsch' Alpen (im Register) angegeben. D. Red.

dem Fuſse kaum handbreiten Halt bietet. Die vier Reisenden mit ihren zwei Führern stiegen in gemessenen Zwischenräumen hintereinander ab, einer immer in die Fuſsstapfen des anderen. Der Verunglückte kam zuletzt. Da muſste ihn plötzlich ein Schwindel befallen haben, oder er hatte das Übergewicht bekommen — er stürzte mit blitzartiger Geschwindigkeit über die Köpfe der vorausgehenden Reisegefährten hinab, indem er den vordersten streifte und beinahe selbst mit in die Tiefe gerissen hätte. Hierbei schlug er mit dem Kopfe auf eine Felskante auf, daſs das Blut und Gehirn weit umher spritzte und auch die Reisegenossen befleckte. Einer der Führer versuchte den Stürzenden noch beim Rockflügel zu erfassen; aber dieser riſs zum Glück aus, denn sicherlich wäre sonst auch der Führer und einer der Touristen, den dieser mit der anderen Hand hielt, mit in die Tiefe gerissen worden; denn ohne den festesten Halt wäre es unmöglich gewesen, den mit furchtbarer Gewalt hinabfallenden Körper aufzuhalten, und ein solcher Halt war, wie schon erwähnt, nicht vorhanden. Aufs Heftigste erschrocken und erschüttert setzte die übrige Reisegesellschaft den Abstieg fort, oft mit Händen und Füſsen das an den Felszacken klebende Blut und Gehirn des unglücklichen Genossen berührend, dessen Leichnam sie vor sich in der Tiefe auf dem Ferner liegen sahen. Nach unsäglichen Mühen gelangten sie selbst hinab und umstanden wehklagend die Leiche. Dieselbe war schrecklich zugerichtet. Der Kopf war völlig zerschmettert, von einer Hirnschale keine Spur mehr vorhanden. Die Augen hingen aus den Höhlen, das Rückgrat schien mehrmals gebrochen, die Kleider waren vom Leibe gerissen, sogar die Sohlen der schweren Bergschuhe zerfetzt. Man muſste die Leiche vorerst liegen lassen, da keine Hilfsmittel vorhanden waren, sie hinabzuschaffen. Die Gesellschaft stieg nach Pians ab, das allen Arlbergreisenden wohl bekannt ist, wo beim Bürgermeister das Protokoll über den Unglücksfall aufgenommen und Vorbereitungen getroffen wurden, die Leiche herabzuschaffen. Bei dieser Gelegenheit mögen die nicht völlig geübten Bergsteiger vor der Besteigung der Parseyerspitze gewarnt werden. Bis zur Augsburger Hütte ist der Weg gefahrlos, dann aber beginnen die Gefahren, denen nur ein Bergsteiger ersten Ranges gewachsen ist.

Aus dem Programm der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte vom 18.—24. Septbr. 1887 in Wiesbaden.

Da die Statuten der Naturf.-Vers. schon mehrmals in früheren Bänden ds. Z. mitgeteilt worden sind und also bekannt sein dürften, so lassen wir sie weg und teilen nur das für die Besucher d. V. Wissenswerte mit.

Reiseerleichterungen, so z. B. Fahrpreisermäſsigungen, werden bei diesen Versammlungen schon seit Jahren nicht mehr gewährt. Nur die Verlängerung der Gültigkeitsdauer der Eisenbahnbillets haben einige Eisenbahndirektionen zugestanden. (Ohngef. bis 27. Septbr.).

Diese Vergünstigungen, welche einige Eisenbahndirektionen den sich durch Karten legitimierenden Mitgliedern und Teilnehmern freundlichst gewähren, sind aus Anlage B II des Programms zu ersehen.

Die allgemeinen Sitzungen fallen auf den 19. 22. 24. Septbr. und sind im groſsen Saale des Curhauses. Sektionen giebt es 30, von denen wir die für unsere Leser wichtigen, nebst den angemeldeten Vorträgen weiter unten anführen. Die Sektions-Sitzungen finden statt in den Räumen der beiden königl. Gymnasien und der städt. Realschule am 20. 21. 23. Septbr. Sie sind zu ersehen aus folgender

Übersicht
über die Sektionen, deren Einführende und Schriftführer, nebst Angabe der Sitzungslokale, sowie der bis jetzt angemeldeten Vorträge.

(Es sind nur die für die Leser ds. Z. interessanten Fächer mitgeteilt; die medizinischen fortgelassen).

1. **Mathematik und Astronomie:** Einführender: Direktor Dr. Kaiser, Schriftführer: Lehrer A. Usener, Gelehrten-Gymnasium, Nr. 1 (alter Zeichensaal). Herr Prof. Günther, München: Über die Geschichte der stereographischen Projektion. — Herr Prof. Cantor, Halle: (Thema noch unbestimmt). — Herr Dr. Schumacher, Schweinfurt: Über biquadratische Gleichungen.

2. **Physik:** Einführender: Gymnasiallehrer A. Schmidt, Schriftführer: Realgynmasiallehrer F. Lautz, Gelehrten-Gymnasium, Aula. Herr Prof. Dr. E. Selling, Würzburg: Vorzeigung und Erklärung meiner neuen Rechenmaschinen. — Herr Prof. Dr. Schwalbe, Berlin: Über die Ausdehnung der physikalischen Fachlitteratur und die Mittel, diese allgemein und leicht zugänglich zu machen.

3. **Chemie:** Einführender: Geh. Hofrat Prof. Dr. R. Fresenius, Schriftführer: Dr. E. Hintz, Realgymnasium, Aula. Herr Bergmeister a. D. Privatdozent Dr. Bernhard Kosmann, Breslau: Über die wasserhaltigen Verbindungen der anorganischen Salze. — Herr Friedrich Lux, Ludwigshafen a. Rh.: Über die Gaswage. — Herr Prof. Dr. B. Rathke, Marburg i. H.: Über organische Di- und Tricyanverbindungen. — Herr Dr. Ed. Seelig, Dresden: Die verschiedenen Aggregatzustände und ihr Einfluſs auf chemische Umsetzungen. — Herr Bergrat Prof. Dr. Clemens Winkler, Freiberg i. Sachsen: Mitteilungen über das Germanium. — Herr Dr. R. Wollny, Kiel: Zur Reform des Nahrungsmittelgesetzes und seiner Ausführung.

4. **Botanik:** Einführender: Apotheker Viegener in Biebrich; Schriftführer; Garteninspektor Dr. Cavet, Realgymnasium, Quinta I.

5. **Zoologie:** Einführender: Rentner Dreyfus, Schriftführer: Dr. Kobelt in Schwanheim, Realgymnasium, Tertia II. Herr F. Blochmann, Heidelberg: Über das Vorkommen von bakterienähnlichen Körperchen in den Geweben und Eiern bei verschiedenen Insekten. — Herr W. Kobelt, Schwanheim a. M.: Das Verhältnis der europäischen fossilen und lebenden Heliceen zur amerikanischen Fauna. — Herr Noll, Frankfurt a. M.: Über die Silicoblasten der Kieselschwämme. — Herr Sarasin, Basel: (Thema vorbehalten). — Herr Otto Zacharias, Hirschberg i. Schl.: a) Mitteilungen über die Ergebnisse meiner fortgesetzten Studien betreffs der niederen Fauna deutscher Binnenseen; b) Neue Beobachtungen über die Befruchtung und Teilung des Eies von Ascaris megalocephala (mit Bezugnahme auf die Untersuchungen E. van Benedene's und J. B. Carnoys etc.).

6. **Entomologie:** Einführender: Forstmeister Mühl, Schriftführer: Postsekretär Maus, Realgymnasium, Quinta b. A. Allgemeines: Herr Prof. Dr. Landois, Münster: a) Einrichtung eines deutschen entomologischen National-Museums, d. h. Sammlung sämtlicher Insektenarten Deutschlands, in systematischer und biologischer Aufstellung; b) Das entomologische Museum der Provinz Westfalen. — Herr Prof. Dr. K. Lindeman, Moskau (in Aussicht gestellt): Über den Stand der landwirtschaftlichen Entomologie in Ruſsland. — Herr Dr. G. Seidlitz, Königsberg in Pr.: Entomologisch-darwinistische Betrachtungen. (2 Vorträge. Thema vorbehalten.) — B. Über Coleoptera: Herr Regierungs- und Schulrat Dr. v. Fricken, Wiesbaden: Entwickelung, Atmung und Lebensweise der Gattung Hydrophilus. -- Herr Dr. G. Kraatz, Berlin: Über die Varietäten der Gymnetis meleagris Burm. und Demonstration des männlichen äuſseren Geschlechtsapparates verschiedener Cetoniden. — Mitteilungen, Anfragen etc. — C. Über Lepidoptera: Herr Eisenbahnsekretär Eiffinger, Sachsen-

hausen: Die Fauna von Oberstdorf und Umgebung (Allgäu). — Herr Pfarrer Fuchs, Bornich: a) Charakteristik der Lepidopteren-Fauna des unteren Rheingaus; b) Drei im unteren Rheingau neuerdings aufgefundene Sesia. — Herr Lehrer Mann, Frankfurt a. M.: Mitteilungen über meine am Grofs-Glockner gemachte Ausbeute. — Herr Sanitätsrat Dr. Pagenstecher, Wiesbaden: Über Callidulidae. — Mitteilungen, Anfragen etc. — D. Über Hemiptera: Herr Rentner Dreyfus, Wiesbaden: Neue Beobachtungen über die Gattung Chermes L.

7. **Mineralogie und Geologie:** Einführender: Oberlehrer Henrich, Schriftführer: Dr. Wikel und Dr. E. Hoffmann, Gelehrten-Gymnasium, Zeichensaal. Herr Prof. D. Brauns: Über die Geologie Campaniens. — Herr Bergmeister a. D. Dr. B. Kosmann, Privatdocent an der Universität Breslau: a) Über die Bildung der Mineralien auf dem Wege der Hydratisation; b) Über die Erzführung der Gänge von Altenberg und Rothenzechau im Zusammenhang mit denjenigen von Kupferberg und Schmiedeberg in Niederschlesien; c) Über die Kaolinitformation der Rubengrube bei Neurode und das Chromeisenerz von Grochau bei Frankenstein. — Herr Dr. Pohlig, Docent an der Universität Bonn: Über die Geologie des nördlichen Persiens. — Herr Obersteiger Lauber, Mosbach: Ausgesuchte und zum Teil neue Conchylien aus dem Litorinellenkalke an der Curve bei Wiesbaden.

8. **Geographie und Ethnologie:** Einführender: Direktor Weldert, Schriftführer: Dr. Brunswick, Realgymnasium, Sexta I.

30. **Naturwissenschaftlicher Unterricht:** Einführender: Oberlehrer Lautz, Schriftführer: Dr. A. Kadesch, Realgymnasium, Sexta II. Herr Prof. Dr. B. Schwalbe, Berlin: 1) Die Gesundheitslehre als Unterrichtsgegenstand; 2) Was kann und könnte der naturwissenschaftliche Unterricht leisten? — Herr Max Fischer, Oberlehrer am Lyceum in Strafsburg: Bestimmungstabellen im Unterricht.

Von den angemeldeten Vorträgen für die allgemeinen Sitzungen heben wir heraus:

Prof. Dr. Detmer, Jena: Über Pflanzenleben und Pflanzenatmung. — Dr. med. F. Hueppe, Wiesbaden: Über Beziehungen der Fäulnis zu den Infektionskrankheiten. — Prof. Dr. Löwenthal, Lausanne: Die Aufgabe der Medizin in der Schule. — Prof. Dr. Preyer, Jena: Naturwissenschaft und Schule. — Prof. Dr. Wislicenus, Leipzig: Die Entwickelung der Lehre von der Isomerie chemischer Verbindungen.

Bureau für die Redaktion des Tageblattes: Realgymnasium, Konferenzzimmer.

Ausstellung.

Mit der Versammlung wird eine Ausstellung wissenschaftlicher Apparate, Instrumente und Präparate verbunden sein. Dieselbe soll ein Gesamtbild des Besten und Bedeutendsten geben, was die Technik in den letzten Jahren der naturwissenschaftlichen Forschung, dem naturwissenschaftlichen Unterrichte, der Hygiene und Heilkunde zur Verfügung gestellt hat. In dem Litteratursaale der Ausstellung soll das Bedeutendere, was auf diesen Gebieten in den letzten 5 Jahren erschienen ist, nach Fächern geordnet, aufgestellt werden. Das Lesezimmer aber wird die neuesten Nummern der naturwissenschaftlichen und medizinischen periodischen Litteratur enthalten. — Für die Ausstellung, welche von einem besonderen Komité geleitet und überwacht wird, sind Räumlichkeiten in der Nähe der Sektions-Sitzungslokale gewählt worden, und zwar die Turnhalle und Lehrsäle der Höheren Töchterschule in der Luisenstrafse 26 und die Turnhalle der Königlichen Gymnasien, Luisenstrafse 31 (Eingang durch das Thor). — Die Legitimationskarten berechtigen zum unentgeltlichen Besuche der Ausstellung. Dieselbe wird täglich in der Zeit von

8—11 Uhr vormittags den Mitgliedern und Teilnehmern der Versammlung ausschliefslich geöffnet sein. Während dieser Stunden werden gewünschte Erklärungen von den Ausstellern und deren Vertretern gegeben werden. Beschliefsen einzelne Sektionen die Ausstellung gemeinsam zu besuchen, so empfiehlt es sich, den Vorsitzenden des Komités, Herrn Ludw. Dreyfus (Frankfurterstrafse 44), zu benachrichtigen, damit derselbe für geeignete Leitung Fürsorge tragen kann. — In den Stunden nach 11 Uhr wird die Ausstellung auch dem Publikum gegen Eintrittsgeld geöffnet sein. Der Katalog, in welchem die ausgestellten Gegenstände nach Gruppen geordnet aufgeführt sind, wird den Mitgliedern und Teilnehmern der Versammlung unentgeltlich verabfolgt.

Die Ausstellung soll am 15. September eröffnet werden und wird den Mitgliedern und Teilnehmern gegen Vorzeigung ihrer Karten schon von dieser Zeit an der Zutritt freistehen.

Die Anlage B I belehrt über die Gruppen der Ausstellung und die Herren, welche den einzelnen Gruppen vorstehen, sind in folgender Übersicht angegeben.

Wissenschaftliche Ausstellung

der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Wiesbaden 1887.

Chemie: Dr. Ernst Hintz Kapellenstrafse 24.

Physik: Gymnasiallehrer J. Klau, Rheinstrafse 86. — Realgymnasiallehrer Ferd. Lautz, Schwalbacherstrafse 25. — Für Mikrologie: Ludwig Dreifus, Frankfurterstrafse 44.

Naturwissenschaftlicher Unterricht: Oberlehrer Theodor Lautz, Herrengartenstrafse 7.

Geographie: Direktor Carl Weldert, Schulinspektor, Luisenstrafse 26.

Wissenschaftliche Reiseausrüstung: Dr. Eugen Borgmann, Parkstrafse 10.

Anthropologie: Oberst a. D. von Cohausen, Rheinstrafse 6. — Dr. med. Stoedtke, Generalarzt a. D., Adelhaidstrafse 8.

Biologie und Physiologie: Ludwig Dreyfus, Frankfurterstrafse 44.

Hygiene: Dr. med. Ferd. Hueppe, Kapellenstrafse 11.

Litteratur- und Lesesaal: Dr. Max Bockhart, Rheinstrafse 79. — Leonhard Geks, Buchhändler, Langegasse 49.

Allgemeines.

Für die Dauer der Versammlung steht den Mitgliedern und Teilnehmern der Besuch des Kurhauses und Kurgartens frei, auch hat der Vorstand der Wiesbadener Kasinogesellschaft an uns die freundliche Mitteilung gelangen lassen, dafs während der Dauer der Versammlung die Räumlichkeiten des Kasinos den Mitgliedern und Teilnehmern derselben in gleicher Weise wie den Kasinomitgliedern zur Verfügung stehen werden. Alle auf die Versammlung bezüglichen Korrespondenzen bitten wir an den ersten Geschäftsführer, Geh. Hofrat Prof. Dr. R. Fresenius in Wiesbaden, Kapellenstrafse 11, alle die Ausstellung betreffenden an Herrn Ludw. Dreyfus, hier, Frankfurterstrafse 44, zu richten. Vom 1. bis 12. September werden auswärtigen Herren gegen Einsendung der Beträge an den ersten Geschäftsführer (Kapellenstrafse 11) die betreffenden Legitimationskarten und auf Wunsch auch die Karten zum Festmahle à 5 Mark zugeschickt werden.

Das Empfangs- und Wohnungs-Bureau, welches zugleich das Geschäfts-Bureau der ganzen Versammlung ist, befindet sich im Taunushôtel (Rheinstrafse 13, dem Taunusbahnhof gegenüber). Dasselbe ist geöffnet vom 15. September an von morgens 8 Uhr bis abends 8 Uhr. Daselbst werden die Legitimationskarten für Mitglieder und Teilnehmer samt Erkennungszeichen (Schleifen), für welche zusammen 12 Mark zu entrichten sind, ausgegeben. Den Mitgliedern und Teilnehmern steht es

frei, auch Karten und Schleifen für angehörige Damen gegen Entrichtung von 6 Mark zu entnehmen. Da es in allseitigem Interesse liegt, dafs das Verzeichnis der Mitglieder und Teilnehmer so korrekt als möglich ist, werden die sich Anmeldenden gebeten, ihren Namen, Titel und Heimatsort deutlich geschrieben zu übergeben. Die Legitimationskarten müssen häufig vorgezeigt werden; es wird daher gebeten, dieselben stets bei sich zu tragen.

Wir werden von der Geschäftsführung noch besonders ersucht, den folgenden Satz zu veröffentlichen:

Die Geschäftsführung der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Wiesbaden beginnt soeben (Ende Juli) mit der Versendung der Programme. An sämtliche Ärzte Deutschlands gelangt das Programm durch Vermittlung des ärztlichen Centralanzeigers. An die Vertreter der Naturwissenschaften an Universitäten, Polytechniken, landwirtschaftlichen Hochschulen, Versuchsstationen, in der praktischen Pharmacie und in der Industrie wird das Programm unter Streifband verschickt, so weit sich die Adressen mit Hilfe der Universitätskalender etc. ermitteln lassen. Nicht in allen Fällen wird dies möglich sein. Diejenigen Interessenten, welchen etwa das Programm nicht zugehen sollte, werden deshalb gebeten, sich wegen Zusendung an die Geschäftsführung in Wiesbaden (Kapellenstrafse 11) zu wenden, welche jedem Anfragenden das Programm gerne unentgeltlich zuschickt.

Im Empfangsbureau werden auch die Wohnungsbillete, die Programme, die Tageblätter, die Festgaben, die Karten zu dem gemeinschaftlichen Festmahle und anderen Festlichkeiten ausgegeben.

Es werden daher auch diejenigen Herren, welche bereits im Besitze von Legitimationskarten und Wohnungen sind, gebeten, sich in das Empfangsbureau zu bemühen, um dort ihre hiesigen Wohnungen anzumelden und die Abzeichen, Festgaben etc. in Empfang zu nehmen.

Obgleich im Empfangsbureau jede gewünschte Auskunft erteilt wird, so befindet sich doch zur Bequemlichkeit der Gäste ein weiteres Auskunftsbureau im Kurhause, woselbst auch ein Schreib- und Korrespondenzzimmer eingerichtet ist. Aufserdem haben sich sämtliche hiesige Buchhandlungen erboten, jede gewünschte Auskunft zu erteilen.

Das Tageblatt wird während der Dauer der Versammlung an jedem Morgen ausgegeben. Die Hauptausgabestelle ist das Empfangs- und Geschäftsbureau im Taunushôtel, doch werden auch Filialausgabestellen errichtet werden, und zwar an den Tagen, an welchen allgemeine Sitzungen stattfinden, im Kurhause, an den übrigen Tagen in den Gebäuden, in welchen die Sektionssitzungen abgehalten werden.

Das Redaktionsbureau befindet sich im Konferenzzimmer des Königlichen Realgymnasiums und ist von Sonntag, den 18. September, an täglich von 8—12 Uhr und von 2—4 Uhr geöffnet.

In dem Tageblatte des folgenden Tages können nur diejenigen Mitteilungen Aufnahme finden, welche bis 3 Uhr nachmittags druckfertig abgeliefert werden. Wir bitten im Interesse der Korrektheit der Mitteilungen um recht deutliche Schrift und im Hinblick auf Förderung des Druckes darum, dafs die Blätter nur auf einer Seite beschrieben werden.

Die allgemeine Tagesordnung ist im Programm mitgeteilt. Wie aus derselben zu ersehen, findet Montag, den 19. September, ein allgemeines Festessen im Kurhause statt. Der Preis ist auf 5 Mark (ausschliefslich Wein) festgestellt. Die Beteiligung der Damen ist erwünscht. Um die nötigen Vorbereitungen treffen zu können, müssen wir um frühzeitige Anmeldung, spätestens bis zum 18. September 4 Uhr nachmittags, bitten.

Wie weiter aus der Tagesordnung zu ersehen, ist als Nachfeier am Sonntag, den 25. September, eine Fahrt in das Rheingau und Besichtigung des Niederwald-Denkmals in Aussicht genommen. Der Preis für die

Fahrt mit Dampfboot und Eisenbahn beträgt 5 Mark. — Anmeldungen zur Beteiligung an dieser Fahrt werden bis 22. September Abends auf dem Empfangsbureau und an der Kasse der Kurdirektion entgegengenommen.

Diejenigen Herren, welche gesonnen sind eine Wohnung im voraus zu bestellen, werden gebeten, sich schriftlich an den Vorsitzenden des Wohnungskomités, Herrn Stadtvorsteher Beckel, hier, Häfnergasse 12, zu wenden

Wiesbaden, Ende Juli 1887.

Die Geschäftsführer
der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte:

Dr. R. Fresenius, Geh. Hofrat und Professor. — Dr. A. Pagenstecher, Sanitätsrat.

Als Nachfeier: Sonntag, 25. September: Rheinfahrt nach Rüdesheim, Bingen, Aſsmannshausen, Lorch, St Goarshausen (event. mit 3 Schiffen). - Besichtigung des Niederwald-Denkmals. Gemeinschaftliche Heimfahrt von Rüdesheim. — Beleuchtung der Rheinufer.

Antwortkasten.

Heft 4. No. 44. Ein kurzer Abriſs der Geschichte der Mathematik für das Bedürfnis der Mittelschulen existiert wohl kaum. Doch machen wir aufmerksam auf:

Arneth, Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart 1852. 8°. (291 Seiten.)

A. Seeger, Die Elemente der Mathematik. Schwerin 1874. 8°. Anhang I. Historische Notizen.

C. Matthieſsen, Schlüssel zur Aufgabensammlung von Heis. 3. Aufl. Köln 1886. Dieser enthält viele historische Bemerkungen bezüglich der Arith. und Algebra. Auſserdem im II. Bd. Anhang: Historische Notizen. Matthiessen (Rostock).

Von anderer Seite (anonym X. Y., Poststempel „Sigmaringen“) wurden wir noch aufmerksam gemacht auf folgende Schriften:

1) Klimpert, Kurzgefaſste Geschichte der Arithmetik und Algebra. Hannover. Meyer. — 2) Villicus, Zur Geschichte der Rechenkunst. Wien. Pichler. — 3) Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts in Kehrs Geschichte der Methodik des Volksschulunterrichtes. I. Band. — 4) Wittstein, Drei Vorlesungen zur Einleitung in die Differentialrechnung. Hannover. Meyer.

Wenn es aber auf ein nicht so ganz kurzes Kompendium ankommt, so dürfte noch genannt werden: Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaft. 2 Teile. Zürich 1873—1875 bei Orell Füſsli & Co.

D. Red.

Bei der Redaktion eingelaufen.

(Juli 1887.)

Harnack, Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik (Rede zur Königs-Geburtstagsfeier) Dresden, Zahn u. Jänsch 87.

Reidt, Elemente d. Mathem. T. I (Ar. u. Alg.) 5. Aufl. — T. II (Planim.) 9. Aufl. — T. IV (Trigon.) 5. Aufl. Berlin, Grote 87.

Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. 4. Aufl. Leipzig, Teubner 1887.

v. Hengel, Lehrbuch der Algebra. Theoretisch-praktische Anleitung zum Studium d. Arithmetik und Algebra. Freiburg i. B., Herder 87.

Frick, Die Möglichkeit der höheren Einheitsschule.
Meyer, Mathematik und Naturwissenschaften in der Einheitsschule.
Hornemann, die Pflege des Auges u. der Anschauung in der Einheitsschule.
} Schriften des deutschen Einheitsschulvereins 1. Heft. Hannover, Meyer 87.

Hornemann, Die Zukunft unserer höheren Schulen. ib. 87.

Kerz, Plaudereien(?!) über die Kant-Laplace'sche Nebularhypothese. Jena, Mauke 1887.

Gothold, Kartennetze, 36 Nummern (Ausgabe A und B) Preis pro Blatt 6 Pf. Gottholds Verlagsbuchh. Kaiserslautern.

R. Olbricht, Inauguraldissertation, Studie über die Kugel- und Cylinderfunktionen. Halle 1887.

Zeitschriften, C.-O. XV. 23—26. — Nouv. Ann. d. M. Juniheft 1887. — Schlöm. Zeitschr. XXXII, 4. — Böklen, mathem.-natw. Mitteilungen II, 1—2.

Briefkasten.

A) Allgemeiner. 1) Ein Leser und Förderer unsrer Zeitschr., zugleich selbst Leiter einer pädagog. Zeitschr., hat mit Rücksicht auf den Streit zwischen „klassischer" und „moderner", oder besser zwischen „formaler" und „realer" Bildung die Ansicht ausgesprochen, dafs besonders die Mathematiker an Gymnasien zur Beilegung dieses Streites beitragen könnten und er bezeichnet als ein sehr wichtiges Thema das folgende: „Was versteht man heutzutage unter **allgemeiner Bildung** und giebt das Gymnasium eine solche?" Sollte es nicht über dieses Thema bereits mehrere gediegene Aufsätze geben? Wer kann solche angeben? — 2) Die Herren Programm-Referenten, besonders die neuen, werden hierdurch freundlichst aufmerksam gemacht auf die in ds. Z. **übliche gleichmäfsige Bezeichnung und Ordnung** in den Überschriften der Referate, z. B.

Gumbinnen. Realprogymnasium [Gymnasium, Real-G.]. Progr. Nr. 23. Oberl. [Prof. etc.] Dr. R. Müller, *Phanerogamen, geordnet nach etc.* [Titel des Progr.-Aufsatzes, der immer cursiv gesetzt wird]. Zweiter Teil. 79 S. 4° [Format*)].

Die betr. Herren werden angelegentlich ersucht, dies bei ihren Programm-Berichten zu berücksichtigen, da sonst der Redaktion immer die unangenehme und zeitraubende Arbeit der Umänderung zufällt.

B) Besonderer. L. i. Pr. 1) Eine Miszelle. 2) Geometr. Bedeutung einiger Substitutionen mit 8 Figuren. Wir bitten die Einsender wiederholt, um ihre Arbeiten in losen Blättern Umschläge mit Aufschrift zu legen. — K. S. i. U.-O. Fragen über physiologische Wirkungen der Elektricität (bezw. des Blitzes). Wenn Sie dieselben nicht von einem Pesther Univ.-Professor beantwortet erhalten, so wollen wir uns für Sie an eine diesbezügl. Autorität wenden. — Sch. i. Pr.-St. Wir können Ihren Namen nicht entziffern, um Ihnen zu schreiben. Auch finden wir in Pr.-St. ein Gymnasium im Schulkalender nicht. — K. i. R. (Posen) Zum trigonom. Unterr. i. d. Gymn.-Sekunda. Da Sie am Orte eine Buchhandlung nicht haben, wird die Erfüllung Ihres Wunsches schwierig sein. — A. i. Cl. Das Rationalmachen der binomischen Bruchnenner. (Umschlag m. A.!) — Gr. i. B. Über rationale Dreiecke.

*) Es wäre sehr wünschenswert, dafs für die Programme ein einheitliches Format eingeführt würde.

Die elementare Herleitung des Newtonschen Anziehungsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen.

Von Dr. Heinrich Vogt in Breslau.

Mit 3 Figuren im Text.

I.

Nachdem Kepler auf induktivem Wege die Gesetze der Planetenbewegung aufgefunden hatte: I. Jeder Planet bewegt sich in einer Ebene, in welcher auch die Sonne steht; die von der Sonne nach den Planeten gerichteten Fahrstrahlen überstreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächen; II. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht; III. Die Quadrate der Umlaufszeiten mehrerer Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen; nachdem Galilei die fundamentalen Gesetze der Bewegung aufgestellt und Huygens die Kreisbewegung untersucht hatte, gelang es zuerst Newton, die mechanischen Bedingungen d. h. Anfangsgeschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte aufzufinden, unter welchen jene Planetenbewegungen stattfinden.*) Die Lösung des Problems liegt in den Sätzen: I. Die auf die Planeten wirkende Beschleunigung ist nach der Sonne gerichtet; II. Sie ist umgekehrt proportioniert dem Quadrat des Abstandes von der Sonne; III. Die Kraft ist die überhaupt zwischen zwei Massen wirkende Anziehung, nämlich proportioniert der Masse des anziehenden und angezogenen Körpers.

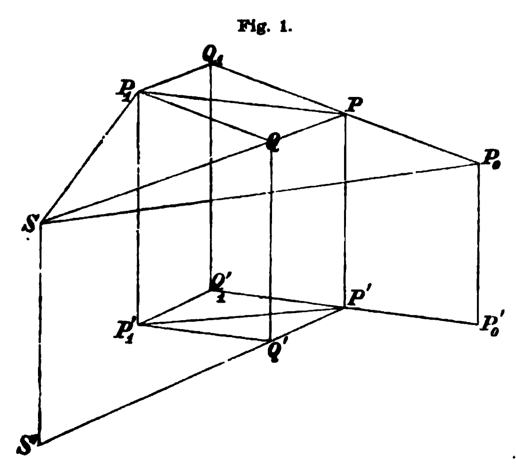
Satz I ist leicht elementar zu beweisen; der in die Lehrbücher aufgenommene Beweis ist der Newtonsche:**) Bewegt sich

*) Für den besonderen Fall der Kreisbewegung war dies, auf Huygens gestützt, schon Wren, Halley, Hooke gelungen. Principia mathem. I scholium zu prop. IV.

**) Newton, principia mathem. I prop. I u. II.

ein Körper in einer sehr kleinen Zeit τ von P_0 nach P (s. Fig. 1), so würde er der Trägheit folgend in der folgenden gleichen Zeit den Weg $PQ_1 = P_0P$ zurücklegen. Wirkt auf ihn in P eine nach S gerichtete Beschleunigung, welche ihn in derselben Zeit von P nach Q ziehen würde, so legt er, der Diagonale des Parallelogramms PQQ_1P_1 folgend, den Weg PP_1 zurück, und es ist $\triangle SP_0P = SPQ_1 = SPP_1$. Umgekehrt: Sind die Flächen SP_0P und SPP_1 einander gleich, und ist $PQ_1 = P_0P$ der Weg, den der Körper in der Zeit τ allein der Trägheit folgend zurücklegen würde, so ist auch $\triangle SPQ_1 = SPP_1$, folglich $P_1Q_1 \parallel SP$. Konstruiert man nun durch das Parallelogramm PQ_1P_1Q den Beschleunigungsweg PQ, so mufs derselbe parallel P_1Q_1 sein, also in die Richtung PS fallen.

Fig. 1.



Schwerer zu beweisen ist der dem zweiten Keplerschen Satz entsprechende Satz II, dafs für die Bewegung eines Planeten in einer Ellipse um die Sonne als Brennpunkt die nach der Sonne gerichtete Beschleunigung dem Quadrat des Abstandes von der Sonne umgekehrt proportioniert sein mufs. Newton giebt für diesen Satz zwei Beweise.*) Beide sind, wie überhaupt die ganze Beweisführung in dem Newtonschen Werke, synthetisch; und will man allein diesen Mafsstab anlegen, so kann man sie elementar nennen; allein sie sind so umständlich, und die entscheidenden Beweismomente treten so wenig hervor, dafs man sie bald nach Newton durch analytische Beweisführung ersetzt hat.**)

Der Beweis des Newtonschen Satzes durch höhere Analysis

*) Principia mathem. I prop. XI.

**) Über die Geschichte dieser Beweise siehe von Sallwürk, Elementare Dynamik. Programm Konstanz 1885.

ist für die Elemente nicht zugänglich; findet sich kein elementar-synthetischer Beweis, so mufs der fundamentalste Satz der Himmelsmechanik, der inhaltlich in den Elementen unmöglich entbehrt werden kann, ohne Beweis rein dogmatisch überliefert werden.

Versuche, den Newtonschen Beweis durch einen andern elementaren Beweisgang zu ersetzen, giebt es mehrere. In manchen Lehrbüchern findet sich ein Beweis,*) welcher die für die Ellipse giltige Eigenschaft $p = \varrho \cdot \cos^3\alpha$ benützt, wo p den Parameter, ϱ den Krümmungsradius, α den Winkel des Krümmungsradius gegen den Fahrstrahl bedeutet. Unter den zwei Beweisen, welche Schellbach**) giebt, benutzt der eine die eben erwähnte Formel, der andere stützt sich auf mehrere, nicht einfache Eigenschaften der Kegelschnitte, die teils analytisch, teils synthetisch hergeleitet werden. H. Müller***) geht von der als bestehend angenommenen Newtonschen Anziehung aus, erschliefst aus ihr mit Hilfe des Satzes von der lebendigen Kraft die Eigenschaften der Bahnkurve und verifiziert dieselben an den Kegelschnitten. Von Hamilton endlich rührt ein kurzer, rein synthetischer Beweis†) mit Hilfe des Prinzips des Hodographen d. h. der Kurve, welche durch die Endpunkte der von einem Punkte ausgehenden Strahlen gebildet wird, wenn die-

*) Gyldén, Grundlehren der Astronomie. Leipzig 1887, § 10, II. Henrici u. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Leipzig 1883, Teil III, § 43; von Sallwürk führt diesen Beweis auf Christian Wolf zurück.

**) Neue Elemente der Mechanik, Berlin 1860, § 138—141.

***) H. Müller, die Keplerschen Gesetze, eine neue elementare Herleitung derselben aus dem Newtonschen Anziehungsgesetze. Braunschweig 1870. Einen ähnlichen Weg schlägt Schüler ein in: „die Fallinie und die Planetenbahnen als involutorische Punktreihen auf Grund des Prinzips der Erhaltung der Kraft elementar behandelt“, Progr. der Königl. Realschule Freising 1881; Aufl. 2, 1882; aber die eine Bedingung, auf die er S. 34 kommt, reicht nicht aus, um die Bahnkurve als Kegelschnitt zu definieren.

†) Reproduziert bei Maxwell, Substanz und Bewegung, deutsch von Fleischl, Braunschweig 1879. Art. CXXXIII; Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte, Leipzig 1870 S. 186—189; v. Sallwürk, Elementare Dynamik § 21; Henrici, die Erforschung der Schwere durch Galilei, Huygens, Newton. Progr. Heidelberg 1885 und Leipzig 1885, § 4.

selben nach Richtung und Länge die Geschwindigkeiten des sich bewegenden Körpers darstellen.

Für die elementare Mechanik und mathematische Geographie ist ein Beweis nötig, der sich ohne grofse Vorbereitungen aus der Lehre von den Kegelschnitten, ohne nicht mehr rein elementare Bewegungsgesetze, ohne allein zum Zweck dieses Beweises aufzustellende Prinzipien führen läfst.

Diesen Forderungen genügt keiner der erwähnten Beweise, wenn sie auch im einzelnen nicht zu verkennende Vorzüge haben. Alle, mit einziger Ausnahme des Hamiltonschen, verwenden Eigenschaften der Ellipse, welche streng genommen nicht mehr als elementar bezeichnet und aus der elementaren Behandlung der Kegelschnitte als bekannt vorausgesetzt werden können; in einen Lehrgang der Mechanik oder der mathematischen Geographie eingereiht würde ihre Herleitung eine erhebliche Unterbrechung darstellen. Dazu kommt bei den Schellbachschen Beweisen die teilweis analytische Herleitung, bei dem Müllerschen die Notwendigkeit, das Gesetz von der Erhaltung der Kraft für eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung nachzuweisen; dieser Beweis aber ist nicht mehr elementar, sondern nur mit Einführung des Potenzialbegriffs zu erbringen. Den unbedingten Vorzug der Kürze, der Allgemeingiltigkeit, der elementaren Natur der benutzten Kegelschnittseigenschaften hat der Hamiltonsche Beweis; seiner Aufnahme in die Elemente aber steht die Notwendigkeit entgegen, allein zum Zweck dieses Beweises das Prinzip des Hodographen einzuführen.

Da es eine wirklich elementare, allgemeine Herleitung des Newtonschen Satzes nicht giebt, so sind selbst diejenigen Schriftsteller, welche den elementaren Beweisen vor den analytischen den Vorzug geben, in diesem Falle gezwungen, die analytische Beweisführung zu benutzen. Mousson*) leitet den analytischen Beweis mit den Worten ein: „Dies Gesetz (das Newtonsche) läfst sich durch höhere Rechnung bei der Ellipse für alle Punkte als richtig erweisen,“ Günther**) mit den Worten: „beim Beweise dieses Lehrsatzes ist die höhere Analysis nicht wohl zu entbehren“. Die eigentlichen Elementar-

*) Physik auf Grundlage der Erfahrung, Zürich 1871, § 106.

**) Lehrbuch der Geophysik, Stuttgart 1884, Bd. I, IV, § 8.

bücher aber verzichten durchweg auf einen allgemeingiltigen Beweis des Newtonschen Satzes und begnügen sich mit der Herleitung desselben aus der Kreisbewegung. Diesem Verzicht schliefsen sich auch Martus*) und Wüllner**) an, letzterer mit den Worten: „in der theoretischen Mechanik werden diese Probleme ohne diese Beschränkung abgehandelt.“

Es fragt sich nun, ob in der Herleitung aus der Kreisbewegung ein Ersatz für die allgemeine Herleitung gefunden ist, mit dem die Elemente sich begnügen können. Wenn ein Planet in gleichförmiger Bewegung mit der Umlaufszeit T eine Kreisbahn vom Radius ϱ um die in seinem Mittelpunkt stehende Sonne beschreibt, so ist nach dem Huygensschen Satz die nach der Sonne zu gerichtete Beschleunigung $\gamma = \frac{4\pi^2 \cdot \varrho}{T^2}$. Nun ist nach dem dritten Keplerschen Satze $\frac{\varrho^3}{T^2}$ für alle Planeten eine Konstante $= k$, mithin $\gamma = \frac{4\pi^2 \cdot k}{\varrho^2}$, also die Beschleunigung umgekehrt proportioniert dem Abstand von der Sonne.

Diese Herleitung stammt von den oben erwähnten Vorgängern Newtons her. Sie leidet an zwei grofsen Mängeln. Erstens behandelt sie die Bewegung der Planeten als Kreisbewegung, und zwar als koncentrische, gleichförmige. Die Planetenbahnen können sehr wohl in erster Annäherung als Kreise betrachtet werden; soll aber durch sie die Planetenbewegung einigermafsen der Wahrheit entsprechend dargestellt werden, so mufs die Sonne, wie Kopernikus es dachte, excentrisch stehen; schon die gröbste Beobachtung und das erste Keplersche Gesetz zeigen, dafs die Bewegung nicht gleichförmig ist, und das erste Newtonsche Gesetz beweist, dafs sie um die excentrisch gestellte Sonne nicht gleichförmig sein kann. Für das System der Jupitertrabanten ist die Annahme der koncentrischen, gleichförmigen Kreisbewegung unbedenklich; Martus, vorsichtiger als viele Andere, giebt die Herleitung auch nur in bezug auf dieses System. Auch das dritte Keplersche Gesetz, das weiter im Beweise benutzt wird, hat nur den Wert einer An-

*) Astronomische Geographie, Berlin 1880 Art. 193.

**) Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. I, Aufl. 3. Leipzig 1874, S. 133.

näherung. Aus all diesen Annäherungen und Vernachlässigungen aber soll nun nicht etwa ein Satz hergeleitet werden, welcher wieder nur für den Geltungsbereich jener Annäherungen Giltigkeit hat, sondern ein allgemein und streng giltiger Satz, das fundamentale Prinzip, welcher das Band zwischen den Gliedern des Sonnensystems darstellt.

Noch ein zweites Bedenken ist gegen die Herleitung aus der Kreisbewegung geltend zu machen. Die Beschleunigung $\gamma = \frac{4\pi^2 \cdot \varrho}{T^2}$ ist für die centrale Kreisbewegung konstant; nur bei fixierter Umlaufszeit ist sie eine bestimmte Funktion des Radius; ohne eine solche Fixierung sagt die Formel nicht mehr als γ = constans, wo der Radius ganz herausgefallen ist. In der That ist ja die centrale Kreisbewegung nicht allein Spezialfall der Bewegung nach dem Newtonschen Gesetz, sondern ebenso gut nach jedem andern Anziehungsgesetz, in welchem die Beschleunigung irgend eine Funktion des Radius ist, zum Beispiel der Bewegung auf der Ellipse um den Mittelpunkt derselben als Anziehungscentrum, wofür die Beschleunigung direkt proportional dem Abstand vom Mittelpunkt ist. Durch die Spezialisierung auf die Kreisbewegung geht also das eigentlich Charakteristische der Planetenbewegung verloren. Während die Bewegung in der Ellipse um den Brennpunkt als Anziehungscentrum mit konstanter Flächengeschwindigkeit, also die Keplerschen Gesetze I u. II, vollständig alle Bedingungen enthalten, um das Newtonsche Gesetz aus ihnen herzuleiten, ist die Thatsache der gleichförmigen koncentrischen Kreisbewegung für die Aufstellung eines Anziehungsgesetzes an sich gänzlich nichtssagend. Ein bestimmtes Anziehungsgesetz wird erst definiert durch Hinzuziehung des dritten Keplerschen Gesetzes, wodurch zwischen T und ϱ eine Beziehung hergestellt ist. So ist diese rechnerisch einfache Herleitung methodisch durchaus nicht die einfachere: dadurch, dafs sie nur einen Spezialfall der Keplerschen Gesetze I u. II benützt, macht sie die Hinzuziehung des empirisch festzustellenden Satzes III notwendig, während bei Auffassung der allgemeinen elliptischen Bewegung aus I u. II allein das Newtonsche Gesetz folgt, aus welchem sodann der Keplersche Satz III deduktiv herzuleiten ist.

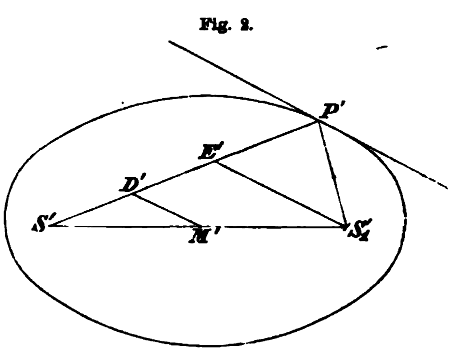
II.

Ich will im folgenden einen Beweisgang darlegen, der streng und elementar zugleich ist. Um einen genauen Einblick in die aus Geometrie und Mechanik zu entnehmenden Voraussetzungen zu gewähren, will ich dieselben dem eigentlichen Beweise vorausschicken.

A. Geometrische Voraussetzungen.

1) Die Ellipse mit der grofsen Halbachse a und der kleinen b ist der Schnitt eines geraden Kreiscylinders vom Radius $\varrho = b$, wenn die Schnittebene gegen den Grundkreis die Neigung β hat, wo $\cos\beta = \frac{b}{a}$ ist; oder der Kreis ist die senkrechte Projektion der Ellipse, und zwar ist der Kreismittelpunkt die Projektion des Ellipsenmittelpunkts.

2) Sind S' und S_1' die Brennpunkte der Ellipse, P' ein beliebiger Punkt auf ihr, so ist $S'P' + S_1'P' = 2a$. (s. Fig. 2.)



3) Die Tangente im Punkte P' halbiert den Winkel der Fahrstrahlen $S'P'$ und $S_1'P'$. Legt man durch den Mittelpunkt M' und durch den Brennpunkt S_1' zur Tangente in P' die Parallelen $M'D'$ und $S_1'E'$ bis zum Schnitt mit $S'P'$, so ist $E'P' = S_1'P'$, also $S'P' + E'P' = 2a$, und da D' die Mitte von $S'E'$ ist, $D'P' = a$.

B. Mechanische Voraussetzungen.

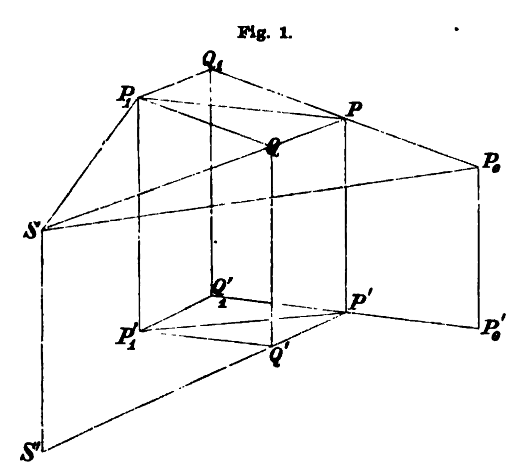
1) Die allgemeinen Gesetze der gleichförmigen und der gleichförmig beschleunigten Bewegung; insbesondere die für die letztere giltige Formel

$$s = \frac{gt^2}{2}, \quad g = \frac{2s}{t^2}.$$

2) Projiziert man eine ebene Bewegung, dargestellt durch die

Bewegung $P_0 P P_1$ in 2 aufeinanderfolgenden Zeitelementen (s. Fig. 1), durch Parallelprojektion auf eine andre Ebene, so dafs die Wege und Geschwindigkeiten der Projektionsbewegung $P_0' P' P_1'$ die Projektionen der Bewegung $P_0 P P_1$ sind, so ist auch die Beschleunigung der zweiten Bewegung die Projektion der Beschleunigung PQ der ersten. Denn projiziert man das Parallelogramm $P Q P_1 Q_1$ durch Parallelebenen auf die Ebene der Projektionsbewegung, so schneiden dieselben diese Ebene in einem Parallelogramm $P' Q' P_1' Q_1'$, in welchem $P' Q_1'$ der Beharrungsweg, $P' P_1'$ der wirkliche Weg, mithin $P' Q'$ d. h. die Projektion von PQ der Beschleunigungsweg ist.

Fig. 1.



Ist die Beschleunigung PQ beständig nach einem Punkte S gerichtet, so ist die Beschleunigung $P'Q'$ beständig nach dem Punkte S', der Projektion von S, gerichtet.

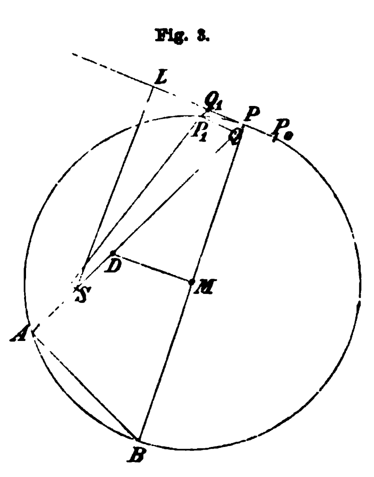
3) Bewegt ein Punkt P sich in einer Ebene so um einen Punkt S, dafs der Fahrstrahl SP in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, so geht die Beschleunigung durch den Punkt S; und umgekehrt. Bewegt der Körper sich in einer geschlossenen Bahn von der Fläche F mit der Umlaufszeit T, so überstreicht der Fahrstrahl in der Zeiteinheit die Fläche $f = \frac{F}{T}$. Ist v die Geschwindigkeit in P, LS das von S auf die Tangente in P gefällte Lot, (s. Fig. 3) so ist

$$f = \frac{v \cdot SL}{2}, \text{ also } v = \frac{2f}{SL} = \frac{2F}{T \cdot SL}.$$

C. Beweis.

1) Bewegt ein Körper sich in einer Kreisbahn mit dem Mittelpunkt M (s. Fig. 3), dem Radius $MP = \rho$, unter Einflufs einer

Beschleunigung, welche nach einem beliebigen Punkte S innerhalb des Kreises gerichtet ist, mit der Umlaufszeit T, der Flächengeschwindigkeit $f = \frac{\pi\varrho^2}{T}$ (B, 3), der Geschwindigkeit v im Punkte P, und zwar sei er in der sehr kleinen Zeit τ von P_0 nach P gegangen, so wird er durch die nach S gerichtete Beschleunigung in dem nächsten Zeitteilchen τ aus dem Trägheitswege PQ_1 um PQ abgelenkt, und legt den Weg $PP_1 = v \cdot \tau$ auf dem Kreise zurück, wo $P_1Q \parallel Q_1P$ und $P_1Q_1 \parallel PQ$ ist. Da PQ_1 als Tangente im Punkte P zu denken ist, so ist, wenn PS den Kreis zum zweitenmale in A schneidet, $\angle PAP_1 = Q_1PP_1 = PP_1Q$, also $\triangle PP_1Q \sim PAP_1$, folglich $PQ = \frac{PP_1^2}{PA}$. PQ ist der durch die nach S gerichtete Beschleunigung γ in der kleinen Zeit τ zurückgelegte Weg, also ist (B, 1) die Beschleunigung $\gamma = \frac{2PQ}{\tau^2} = \frac{2 \cdot PP_1^2}{\tau^2 \cdot PA}$.



Weiter ist

$$PP_1 = v \cdot \tau = \frac{2f \cdot \tau}{SL} = \frac{2\pi\varrho^2 \cdot \tau}{T \cdot SL} \text{ (B, 3),}$$

also

$$\gamma = \frac{8\pi^2\varrho^4}{T^2 \cdot SL^2 \cdot PA}.$$

Zieht man nun durch M zur Tangente PL die Parallele MD bis zum Schnitt mit SP, und verbindet den Endpunkt des Durchmessers PB mit A, so ist

$$\triangle SLP \sim PMD \sim PAB.$$

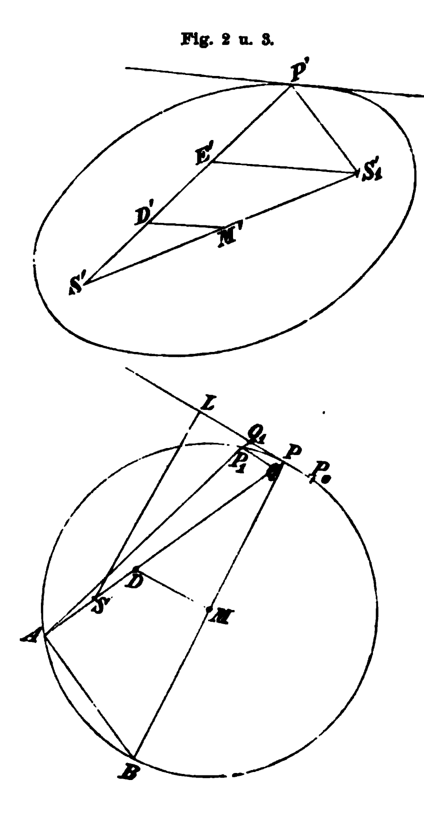
Daraus folgt $\frac{MP}{SL} = \frac{PD}{PS}$ und $\frac{\varrho^2}{SL^2} = \frac{PD^2}{PS^2}$,

andrerseits $\frac{PB}{PA} = \frac{PD}{PM}$ und $\frac{2\varrho^2}{PA} = PD$;

setzt man diese Werte ein, so nimmt die Beschleunigung für die Kreisbewegung um den beliebigen Punkt S als Anziehungspunkt den Wert an $\gamma = \frac{4\pi^2 \cdot PD^3}{T^2 \cdot PS^2}$.

2) Wird jetzt der Kreis mit dem Mittelpunkt M als Parallelprojektion einer Ellipse mit dem Mittelpunkt M', der grofsen Achse $2a$ und dem Brennpunkt S' gedacht (s. Fig. 2 u. 3), welcher Punkt S zur Projektion hat (A, 1), und es bewege sich in der Ellipse um S' als Anziehungscentrum ein Körper, so dafs seine Bewegung die Kreisbewegung zur Projektion hat, so hat die für die elliptische Bewegung nach S' wirkende Beschleunigung γ' die Kreisbeschleunigung γ zur Projektion (B, 2). Ist P die Projektion von P', so ist die Tangente in P die Projektion der Tangente in P', und wenn $M'D'$ parallel zur Tangente in P' gezogen wird, so ist D die Projektion von D'. Hat nun $P'S'$ gegen PS den Neigungswinkel δ, so ist $\gamma = \gamma' \cdot \cos\delta$, $PS = P'S' \cdot \cos\delta$, $PD = P'D' \cdot \cos\delta$; setzt man diese Werte in die Beschleunigungsformel (C, 1) ein, so erhält man $\gamma' = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{P'D'^3}{P'S'^2}$. Nun ist (A, 3) $P'D' = a$, mithin $\gamma' = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{T^2 \cdot P'S'^2}$, womit der Newtonsche Satz bewiesen ist.*)

Fig. 2 u. 3.



Der hier gegebene Beweis enthält zwei Hauptmomente: die Herleitung der Beschleunigung der Kreisbewegung für einen beliebigen Punkt als Anziehungscentrum (C, 1), und die Zurück-

*) Der deduktive Satz, dafs aus der Giltigkeit des Newtonschen Gesetzes bei geeigneter Anfangsgeschwindigkeit die elliptische Bewegung folgt, ist dadurch zu beweisen, dafs im Parallelogramm $P'Q'P_1'Q_1'$ aus $P'Q_1'$ und $P'Q'$ die Diagonale $P'P_1'$ eindeutig bestimmt ist.

führung der elliptischen Bewegung auf die Kreisbewegung durch Parallelprojektion (B, 2). Das erste findet sich bei Newton, principia mathem. lib. I prop. VII, das zweite bei Möbius, die Elemente der Mechanik des Himmels § 24.

Dafs der Beweis durchaus elementar ist, sowohl was die geometrischen als was die mechanischen Vorstellungen und Sätze betrifft, wird schwerlich zu bestreiten sein. Ich möchte noch einen zweiten Umstand hervorheben, nämlich den, dafs der ganze Beweis kaum einen Gedanken enthält, welcher nicht ebenso oder in ähnlicher Weise schon seinen Platz in den Elementen der Mechanik hat. So ist, um nur von den Hauptpunkten zu reden, die Kreisbewegung um einen beliebigen Anziehungspunkt wesentlich mit denselben Mitteln zu bewältigen wie die um das Centrum, welche zu den Fundamentalproblemen gehört. Die Darstellung einer Bewegung als Projektion einer andern oder die Zerlegung einer Bewegung in ihre Komponenten durch Parallelprojektion, ein Ausflufs des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte, ist seit Möbius Gemeingut vieler Lehrbücher geworden, z. B. zur Herleitung der harmonischen Schwingungsbewegung, der ebenen und sphärischen Pendelbewegung aus der gleichförmigen Kreisbewegung.*) So fügt sich mein Beweis in den Lehrgang der elementaren Mechanik natürlich ein, weil er nur eine neue Kombination schon vorhandener Elemente ist, und wird leicht dadurch, dafs er nur mit elementarem und nur mit bekanntem Material arbeitet. Wenn ihn die elementare Natur von den übrigen oben berührten Beweisen unterscheidet, so giebt ihm die natürliche Einreihung in den Lehrgang der Mechanik vielleicht einen didaktischen Vorzug vor dem Hamiltonschen, dem er an Eleganz und umfassender Geltung durchaus nachsteht. Denn mein Beweis gilt nicht wie jener für die Bewegung in jedem Kegelschnitt, sondern nur für die elliptische, die Planetenbewegung; auf die parabolische und hyperbolische Kometen- und Meteorbewegung ist er seiner Natur nach nicht auszudehnen, weil durch Parallelprojektion ein Übergang vom Kreise auf Parabel und Hyperbel nicht möglich ist.

*) Vergl. Martus, Astronomische Geographie Art. 240.

Kleinere Mitteilungen. — Sprech- und Diskussions-Saal.

Zum Unterricht in der Physik.

I. Anschaffung von Lehrmitteln (Fallmaschine).

Einer unserer Mitarbeiter macht auf die gediegene Programmabhandlung des Gymnasiums zu Bielefeld (1887) aufmerksam. In derselben bespricht der erste Mathematiker dieser Anstalt, Herr Dr. Bertram, „die Apparate, welche zur Demonstration der Gesetze der gleichmäfsig veränderlichen Bewegung dienen.“ Indem die Lektüre jedem Physiklehrer dringend empfohlen wird, sei es gestattet Einiges davon herauszuheben*):

„Die Beobachtung des freien Falles könnte bei einigermafsen genauen Instrumenten einen Näherungswert für die Konstante g der Schwerkraft liefern. Die Bestimmung physikalischer Konstanten ist aber nicht Aufgabe der Schule, sondern wissenschaftlicher Forschung, und diese hat andere Wege (Pendelbeobachtungen), welche ein viel genaueres Resultat liefern, als Fallbeobachtungen. Für die Schule dagegen ist es wichtig, den Nachweis dafür zu liefern, dafs die Gesetze der gleichmäfsig veränderlichen Bewegung für irgend einen Wert der Beschleunigung richtig sind.

Läfst ein Fallapparat aufserdem noch einen angenäherten Wert von g bestimmen, so ist dies eine angenehme Zugabe, aber entscheidend für die Auswahl kann dieser Umstand nicht sein. —

Die Einrichtung desselben (nämlich des fallenden Gewichtes bei der Fallmaschine von Atwood) möge als bekannt vorausgesetzt werden; nur darauf soll hingewiesen werden, dafs die Fallgewichte bei recht teuren Maschinen mit elektrischer Auslösung und oft recht mangelhaft sind, weil nicht darauf Rücksicht genommen ist, dafs die Massen in mannigfacher Weise auf beiden Seiten der Schnur verteilt werden können. —

Eine elektrische Auslösung des fallenden Gewichtes ist bei den Versuchen, wie sie in dem Unterricht gemacht werden und bei welchen die Beschleunigungen durch Vorversuche bestimmt sind, durchaus überflüssig; einige Übung läfst die Auslösung mit der

*) Ohne dem Programmberichter für Westfalen vorzugreifen.

Hand hinreichend genau ausführen. Auch Friktionsräder für die Achse der Rolle sind eine viel zu kostspielige Verbesserung; die Bestimmung des Reibungswiderstandes ist keine zu schwierige Operation, und es ist besser die Aufmerksamkeit der Schüler bei dieser Gelegenheit auf den hemmenden Einflufs desselben hinzulenken und ihn durch Zahlen zu belegen, als ihn fast ganz zu eliminieren."

Auch der Schlufs ist beachtenswert: „Die Kabinette könnten mit viel geringeren Kosten besser ausgestattet werden, wenn die Anfertiger von Apparaten für Schulen sich dazu herablassen wollten, nicht jede Nummer für sich allein, sondern mehr das Kabinett als Ganzes bei der Bearbeitung ins Auge zu fassen. Wie mancher Teil, der bei mehreren Apparaten identisch ist, brauchte dann nur einmal angeschafft, wie manches Stativ könnte erspart werden!"*) —

II. Die Trennung des physikalischen Unterrichts in zwei Kurse.
(Antwort auf die erste Frage des Herrn Thieme im 6. Heft ds. Jahrg.)

Von Gymn.-Oberl. Dr. Richter in Wandsbeck bei Hamburg.

Auch für die Gymnasien scheint mir eine Teilung des ganzen physikalischen Lehrstoffes in zwei Kurse notwendig. Am hiesigen Gymnasium bestand dieselbe bis zur Einführung der neuen Lehrpläne. Einige Jahre wurden letztere befolgt; da sich aber dabei Mängel (s. u.) ergaben, wird jetzt mit Genehmigung des Provinzialschulkollegiums das Schwierigere des Sekundapensums der Prima vorbehalten und dafür das Leichtere des Primapensums schon in Sekunda durchgenommen. Aufser dem von Herrn Dr. Thieme für eine solche Teilung angeführten Grund („die schwierigeren Teile der Lehre von dem Magnetismus, der Elektricität und der Wärme sind für den Schüler der Sekunda nicht verständlich, sind aber zu wichtig, um ganz aus dem Unterricht weggelassen zu werden; die leichteren Abschnitte der Mechanik, Akustik und Optik sind dagegen auf der Unterstufe sehr wohl zum Verständnis zu bringen") spricht noch der Umstand dafür, dafs durch die Erweiterung des Sekundapensums in Prima dasselbe zum Teil wiederholt und dadurch erheblich befestigt wird und durch die Vorbereitung des Primapensums in Sekunda das letztere bedeutend durch die nach Prima mitgebrachte Gewöhnung

*) Es ist dies an und für sich richtig aber unter der Voraussetzung, dafs der Mechaniker ein sehr geschickter Mann sei, der alle Apparate gleich gut zu fertigen versteht. Allein, wie überall, so macht sich auch unter den Mechanikern die Arbeitsteilung geltend und ist heutzutage fast jeder Mechaniker genötigt sich auf ein Spezialfach zu werfen; dieser macht gute Luftpumpen, während jener vorzügliche Elektrisirmaschinen, ein dritter treffliche Fallmaschinen liefert. Warum soll sich nun der Physiklehrer des Vorteils begeben, seine Apparate bei einem gerade auf den betr. Apparat eingearbeiteten Spezialisten zu kaufen?
D. Red.

an viele der wichtigsten Begriffe und Vorstellungen erleichtert und ebenfalls tiefer eingeprägt wird. Die Durchnahme mancher Gebiete der Mechanik (z. B. Parallelogramm der Kräfte, schiefe Ebene, Hebel) in Sekunda ist auch für viele mathematische Aufgaben, namentlich trigonometrische, nützlich.

Eine Teilung des Pensums durch den Verfasser des Lehrbuchs ist aber dazu nicht erforderlich, nicht einmal wünschenswert. Denn, wenn der zusammengehörende Stoff räumlich im Lehrbuch weit von einander gerissen wird, so erschwert dies den Schülern das Verständnis für die Zusammengehörigkeit. Aufserdem sind solche Merkmale für die Trennung des Leichteren und Schwereren, die von den meisten Lehrern anerkannt werden würden, schwer festzustellen; viele Lehrer würden bei jedem geteilten Lehrbuch mit der Teilung nicht einverstanden sein. Dieselbe kann für jedes Gymnasium resp. Realgymnasium gesondert geschehen. Das ist um so leichter, weil der Physikunterricht in Sekunda und Prima meist von demselben Lehrer erteilt wird.

Nachschrift des Herausgebers: Wir möchten uns der Ansicht des Hrn. Verfassers anschliefsen. Denn wir glauben, dafs die Meinungen über die Grenzen der Kurse sehr geteilt sind, und dafs es darüber unter den Physiklehrern kaum zu einer Einigung kommen dürfte. Eine solche „Grenze“ mufs es aber doch bei der Teilung geben. Wir selbst sind bei unserm (öffentlichen und privaten) Physik-Unterrichte durch diese Teilung in Büchern wie Heussi, Krumme, Sumpf öfter gestört worden.

Bemerkungen über Artikel dieser Zeitschrift in früheren Heften.

(Aus Briefen an den Herausgeber.)

I. Eine Zustimmung zu unserem Artikel „Winkelgrad und Bogengrad“. Heft 5, S. 344. Ein Leser und Förderer unserer Zeitschrift schreibt uns hierüber:

„Mit 'Winkel' und 'Bogen' haben Sie vollständig recht. Ich empfehle zum Übergang von einem zum andern folgende Aufgabe, auf die man in der Lehre von der Sonnenbeobachtung stöfst: 'Die Sonne erscheint uns im Durchschnitt unter einem Durchmesser von 31 Minuten (31″); den wievielten Teil des Himmelsgewölbes bedeckt sie?' $\left(\text{Rund } \frac{1}{184\,000}\cdot\right)$ Ob nun neue Namen ('Off' u. dergl.) nötig sind, lasse ich dahingestellt. In der Mechanik wenigstens ist man bisher immer mit Winkelgeschwindigkeit und Bogengeschwindigkeit ausgekommen.“ Hlz.

Ein Holländer dagegen kündigt uns einen kleinen Artikel über zwei neue diesbezügliche Worte an.

II. „Die auf Seite 421 ds. Jhgs., Heft 5, gegebene Ableitung der Quadratur der Ellipse ist sehr hübsch; ob sie neu ist, weifs ich nicht. Eine ähnliche leichte Ableitung ergiebt sich auf folgende Weise: Bildet die Fläche F mit einer Ebene den Winkel α, und wird sie auf diese Ebene als F_1 projiziert, so ist $F_1 = F \cos\alpha$, mithin $F = \frac{F_1}{\cos\alpha}$. Behält man die Figur auf Seite 421 bei, so ist

$$\pi \cdot b^2 = E \cos\alpha,$$

$$E = \frac{\pi b^2}{\cos\alpha}, \text{ aber } \cos\alpha = \frac{b}{a},$$

$$E = \pi \cdot b^2 \cdot \frac{a}{b} = \pi ab.\text{“}$$

v. F.-B.

Zustimmungen zu dem Simonschen Artikel erhielten wir noch von den Herren Lucke-Zerbst, Böttcher-Leipzig, Holzmüller-Hagen und Eberling-Budapest. Hr. Dr. Böttcher weist noch hin auf die Quellen: Euler, Introd. II. App. 64. Baltzer, Elem. V, § 8. 6 und VI, § 6. Hr. Dir. Dr. Holzmüller-Hagen sagt:

„Erstens gilt das, was Herr Dr. Simon von der Ellipse und dem Kreiskegel zeigt, von jedem Schrägschnitt eines geraden Cylinders und Prismas, es ist der alte Satz

$$F = F'_1 \cos\alpha; \quad F_1 = \frac{F}{\cos\alpha}$$

von der Orthogonalprojektion F einer Fläche F_1.

Zweitens wird die Methode des Herrn Dr. S. bei dem allgemeinen Satze vielfach angewandt, sowohl bei dem stereometrischen Unterrichte an sich, als auch bei Betrachtungen, die mit der darstellenden Geometrie verbunden werden.

Ich weifs nicht, welche Lehrbücher und in wie weit sie sich hierüber äufsern, vermute jedoch, dafs bei Gusserow u. Kommerell-Hauck Ähnliches steht.“

Immerhin mag einzelnen Kollegen die Behandlung neu sein. Ihre Allgemeingiltigkeit ist aber wichtiger, als der Spezialfall der Ellipse. — Ähnlich äufsert sich Prof. Eberling.

III. Zu den kleinen Aufsätzen über die pythagor. Gleichung von Wertheim, Tiebe und Anonymus (S. 418 u. f.) sind mehrere Artikel eingelaufen, die wir in einem der nächsten Hefte mitteilen wollen.

Nachträgliche Bemerkung

zu dem Aufsatz: „Über die Körper, deren Schnittflächen parallel zu einer Ebene quadratische Funktionen ihres Abstandes sind."
Heft 5, S. 321 u. Heft 6, S. 401 ds. lf. Jahrg.

Von Prof. Dr. Weinmeister in Tharand.

Bekanntlich ist die Newtonsche Formel auch für solche Körper richtig, deren Schnittflächen parallel zu einer Ebene kubische Funktionen ihres Abstandes sind. Dieser Umstand legt die Frage nahe, ob wohl noch andere der im Abschnitt A angegebenen Formeln denselben Gültigkeitsbereich haben. Es ist dies um so wahrscheinlicher, als auch für $f = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ die Inhaltsformel

$$S = 2x\left(\alpha + \frac{1}{3}\gamma x^2\right) \tag{2}$$

zutrifft. In der That, dehnt man die obigen Berechnungen auf den dritten Grad aus, so ergeben sich ebenfalls die Formeln (5) und (8), was deshalb besonders hervorgehoben zu werden verdient, weil in ihnen nur drei bezw. zwei Schnittflächen vorkommen, während zur Ausmessung dieses Körpers im allgemeinen vier gegeben sein müssen. So enthält z. B. die Breymannsche Formel

$$S = \frac{1}{8} h (f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4)$$

vier Flächen, nämlich die Grundflächen f_1 und f_4 und die Schnittflächen f_2 und f_3, welche die Höhe in drei gleiche Teile teilen. Die Bedingung dafür, dafs drei Schnittflächen mit den Abständen x_1, x_2, x_3 zur Inhaltsbestimmung genügen, ist:

$$3x_1 x_2 x_3 + x^2 (x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

Unter dieser Einschränkung gilt auch (4).

Von den Bestimmungen des statischen Momentes ist für den allgemeineren Körper (12) richtig, wenn

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -\frac{3}{5} x^2$$

und (13) für $x_1 = \frac{1}{2} h \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Zum Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Prof. Dr. Lieber-Stettin und Müsebeck-Waren.

A. Auflösungen.

620. (Aufgabe, 1. und 2. Auflösung siehe XVIII_3, 192).

3. Auflösung. Die gesuchten Punkte sind die Durchschnittspunkte der Ebenen mit den Durchschnittslinien von je zwei Ebenen. Diese Durchschnittslinien zerfallen in drei Arten: 1) Verbindungslinien von je zwei Punkten; diese geben $10\binom{n}{5}$ Punkte. 2) Linien, welche nur durch einen der gegebenen Punkte gehen und zwar gehen von jedem Punkte soviel solcher Linien aus, als es Durchschnittspunkte unter den Verbindungslinien von $n-1$ Punkten giebt, also $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8}$, von n Punkten demnach $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8} = P$. Betrachtet man nun eine bestimmte Gerade, z. B. die Gerade durch den Punkt 1, welche als Durchschnitt der Ebenen 123 und 145 erhalten wird, so wird diese geschnitten a) von Ebenen, die von jeder der beiden Ebenen einen Punkt enthalten, das giebt $\frac{4(n-5)}{3}P$; b) von Ebenen, die mit einer der Ebenen einen Punkt gemein haben, das giebt $\frac{4(n-5)(n-6)}{2}\cdot\frac{1}{2}P$; c) von Ebenen, welche mit keiner der Ebenen einen Punkt gemein haben, das giebt $\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{3!}P$. 3) Linien, welche durch keinen der gegebenen Punkte gehen $\frac{n(n-1)\cdots(n-8)}{(3!)^4}$. Mithin ist die Summe aller Punkte

$$10\binom{n}{5} + P\left[\frac{4(n-5)}{3} + \frac{4(n-5)(n-6)}{4} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{3!}\right] + \frac{n(n-1)\cdots(n-8)}{(3!)^4} = 10\left[\binom{n}{5} + 12\binom{n}{6} + 63\binom{n}{7} + 84\binom{n}{8} + 28\binom{n}{9}\right] = 5\binom{n}{5}\left[2 + 4\binom{n-5}{1} + 6\binom{n-5}{2} + 3\binom{n-5}{3} + \frac{4}{9}\binom{n-5}{4}\right].$$

Stammer (Düsseldorf).

658. (Gestellt von Emmerich XVIII$_2$, 132.) Folgende Gleichung $n$ten Grades aufzulösen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \vdots & a_{n-1} & a_n - \alpha_n x \\ a_1 & a_2 & \vdots & a_{n-1} - \alpha_{n-1} x & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 - \alpha_2 x & \vdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 - \alpha_1 x & a_2 & \vdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

Auflösung. Dividiert man alle Vertikalreihen der Reihe nach durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$, setzt $\frac{a_1}{\alpha_1} = b_1, \cdots \frac{a_n}{\alpha_n} = b_n$ und addiert alle Vertikalreihen zur ersten, so läfst sich aus dieser der Faktor $(b_1 + b_2 \cdots + b_n) - x$ absondern, so dafs $x_1 = b_1 + b_2 \cdots + b_n$ eine Wurzel der Gleichung ist. Es bleibt als zweiter Faktor folgende Determinante $n$ten Grades:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_2 & \vdots & b_{n-1} & b_n - x \\ 1 & b_2 & \vdots & b_{n-1} - x & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b_2 - x & \vdots & b_{n-1} & b_n \\ 1 & b_2 & \vdots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahiert man die $n$te Horizontalreihe von allen übrigen Horizontalreihen, so erhält man eine Determinante $n$ten Grades, bei welcher alle Elemente mit Ausnahme derjenigen einer Diagonalreihe Null sind und deren Wert also das Produkt der Diagonalreihe ist; mithin $x_2 x_3 \ldots x_n = 0$, woraus sich die übrigen $n - 1$ Wurzeln ergeben.

Emmerich (Mülheim a. d. Ruhr). End (Würzburg). Fuhrmann (Königsberg i. Pr.). Lengauer (München). v. Miorini (Bielitz). Schmitz (Neuburg a. D.). Stoll (Bensheim).

659. (Gestellt von Brockmann XVIII$_2$, 132.) Wie lassen sich die Ziffern 1 bis 7 in die sieben horizontalen und sieben vertikalen Reihen eines in 7^2 Quadrate geteilten Quadrates hineinschreiben, so dafs weder in diesen noch in den beiden Diagonalreihen eine Ziffer wiederholt vorkommt und auf wievielfache Weise ist das möglich?

Auflösung. Die Felder der obersten Horizontalreihe mögen mit $a_1, a_2, \ldots . a_7$ bezeichnet werden. Schreibt man nun die Ziffern von 1 bis 7 in irgend einer beliebigen Reihenfolge, etwa in der der natürlichen Zahlen in die erste Vertikalreihe, so dafs 1 in a_1 zu stehen kommt, so müssen alle übrigen Vertikalreihen aus der ersten durch cyklische Vertauschung gebildet werden, weil sonst unter den Horizontalreihen einige sein würden, die eine Ziffer wiederholt enthalten. Die Ziffer (hier 2), welche in der Vertikalreihe auf die in a_1 stehende Ziffer (also hier auf 1) folgt, darf nicht in a_2 und a_7 stehen, da im ersten Fall eine Diagonalreihe nur die letzte Ziffer (also hier 7), im zweiten nur die erste Ziffer (also

hier 1) enthalten würde. Die 2 mufs daher entweder in a_3, a_4, a_5 oder a_6 stehen, so dafs sich also vier Auflösungen für den Fall ergeben, dafs die erste Vertikalreihe die Ziffern in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen enthält. Da sich nun die Ziffern 1 bis 7 auf 7! mal verschiedene Weise in die Felder der ersten Vertikalreihe schreiben lassen, so ist die Anzahl der möglichen Auflösungen 4 . 7!

Hodum (Stafsfurt). Lengauer. Stegemann (Prenzlau). Stoll.

Anmerkung. Diese Aufgabe steht in Beziehung zur Rösselsprungaufgabe, welche von Euler gelöst ist (Klügel, mathematisches Wörterbuch).

660. (Gestellt von Schlömilch XVIII$_2$, 132.) Man soll den Grenzwert ermitteln, gegen welchen die Summe

$$s = \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{n}} + \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{2n}} + \cdots \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{nn}}$$

bei unendlich wachsenden n konvergiert.

Auflösung. Bezeichnen wir $S = \lim\limits_{n=\infty} s$, so liegt $\sum\limits_1^n{}_k \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{kn}}$

zwischen $\frac{1}{\frac{\alpha}{\sqrt{n}} + \beta} \sum\limits_1^n{}_k \frac{1}{\sqrt{kn}}$ und $\frac{1}{\frac{\alpha}{\sqrt{nn}} + \beta} \sum\limits_1^n{}_k \frac{1}{\sqrt{kn}}$, so dafs

$$S = \frac{1}{\beta} \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}_k \frac{1}{\sqrt{kn}}.$$

Wählen wir in der Reihe $s_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ für das ins Unendliche wachsende n eine Quadratzahl z. B. m^2, so kann $s_1\sqrt{n}$ so geschrieben werden:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{9}}\right)$$

$+ \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{(m-1)^2+1}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{m^2}}\right)$ und sie ist gröfser als $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{5}{\sqrt{9}} + \cdots \frac{2m-1}{\sqrt{m^2}}$ oder gröfser als $\sum\limits_1^m{}_k \frac{2k-1}{k}$ oder gröfser als $2m - \sum\limits_1^m{}_k \frac{1}{k}$. Schreibt man $s_1\sqrt{n}$ dagegen so:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}}\right) + \cdots,$$

so ist sie kleiner als $\frac{3}{\sqrt{1}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \frac{7}{\sqrt{9}} + \cdots \frac{2m-1}{(\sqrt{m}-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{m^2}}$ oder

kleiner als $\sum_1^m \frac{2k+1}{k}$ oder kleiner als $2m + \sum_1^m \frac{1}{k}$. Demnach ist $2 - \frac{1}{m}\sum_1^m \frac{1}{k} < \beta S < 2 + \frac{1}{m}\sum_1^m \frac{1}{k}$ und da

$$\lim \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{m}\right) = 0$$

(vrgl. Nr. 386 XV, 601), so ist $S = \frac{2}{\beta}$.

EMMERICH. SCHMIDT (Spremberg). SCHMITZ. SIMON (Berlin).

Zusatz. Allgemein ist, wie sich ebenfalls elementar zeigen läfst,

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt[\mu]{n^{\mu-1}}} + \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt[\mu]{2n^{\mu-1}}} + \cdots \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt[\mu]{n n^{\mu-1}}}\right] = \frac{1}{\beta}\frac{\mu}{\mu - 1}.$$

SIMON.

661. (Gestellt von Weinmeister XVIII$_2$, 132.) Es soll das $n$te Glied der Reihe 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ... (sogenannte Gerhardsche Reihe), bei welcher jede Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger ist, dargestellt werden.

1. Auflösung. Es soll $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ sein. Es sei nun $u_n = x^n$, folglich $u_{n-1} = x^{n-1}$ und $u_{n-2} = x^{n-2}$; dann mufs $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$ oder $x^2 - x - 1 = 0$ sein, woraus sich $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (1) ergiebt. Sind nun a und b zwei beliebige Konstante, so ist $u_n = ax_1^n + bx_2^n$, denn es mufs dann sein: $ax_1^n - ax_1^{n-1} - ax_1^{n-2} + bx_2^n - bx_2^{n-1} - bx_2^{n-2} = 0$, welche Bedingung durch (1) erfüllt wird. Da $u_1 = u_2 = 1$ ist, so ist $a\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ und $a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$, woraus sich $a = -b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ergiebt; mithin

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

welches der einfachste Ausdruck für u_n ist. Entwickelt man die Potenzen, so erhält man

$$2^{n-1}u_n = \binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 5^2\binom{n}{5} + 5^3\binom{n}{7} + \cdots 5^p\binom{n}{2p+1} + \cdots$$

— Man findet, dafs die Glieder der obigen Reihe die Koefficienten der Potenzreihe sind, welche man durch Entwickelung von $\frac{1}{1-x-x^2}$ erhält.

BEYENS (Cadix). END. FUHRMANN. HODUM. LENGAUER. NISETEO (Zara). SCHMITZ. SIMON. STOLL. WEINMEISTER (Tharand).

2. Auflösung. Die Glieder $a_1, a_2, \ldots$ finden sich in den Näherungswerten $\frac{z_1}{n_1} \cdots$ des Kettenbruchs $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$; es ist nämlich

$\frac{z_i}{n_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}}$, $\frac{z_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$, und da $z_i n_{i+1} - n_i z_{i+1} = (-1)^{i+1}$, so ist $a_i a_{i+2} - a_{i+1}^2 = (-1)^{i+1}$; eliminiert man a_{i+2} mittels der Rekursionsgleichung $a_{i+2} = a_i + a_{i+1}$, so erhält man

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \sqrt{5a_i^2 + 4(-1)^i}\right) \quad (2).$$

Die Glieder a_i sind demnach der Bedingung unterworfen, $5a_i^2 + 4(-1)^i$ zu einem Quadrat zu machen. Für geradstellige Glieder handelt es sich um die Auflösung der diophantischen Gleichung $b^2 - 5a^2 = 4$; es ergiebt sich

$$a_{2n} = \frac{(1+\sqrt{5})^{2n} - (1-\sqrt{5})^{2n}}{2^{2n}\sqrt{5}} \text{ und } b_{2n} = \frac{(1+\sqrt{5})^{2n} + (1-\sqrt{5})^{2n}}{2^{2n}}.$$

Nach (2) ist $a_{2n+1} = \frac{1}{2}(a_{2n} + b_{2n})$, so dafs man die vorher gefundene allgemeine Formel auch hier erhält.

Emmerich. Sievers (Frankenberg i. S.).

Anmerkung. Die Reihe ist hergeleitet von Herrn Fuhrmann in der dem Programm des Realgymnasiums auf der Burg in Königsberg i. Pr. beigegebenen Abhandlung 1886, Seite 13, Nr. 24 und zwar wird sie, wie in den französischen Werken, als Lamésche Reihe bezeichnet. Ferner ist die Reihe behandelt von Herrn Pfeiffer XVII, 253 und wird dort Leonardosche Reihe genannt, da sie sich bei Leonardo im *liber abaci* vorfindet. Ferner findet sich die Reihe bei dem niederländischen Geometer Albert Girard (vulgo Gerhard) in seinen Zusätzen zu Stevins Werken (Leyden 1634. Seite 169).

662. (Gestellt von Szimányi XVIII$_2$, 132.) Eine Strecke $AB = a$ in 3, 4, 5, ... n Teile zu teilen, so dafs jeder Teil die mittlere Proportionale zwischen dem folgenden und der Summe des Teiles und folgenden Teiles ist. (Erweiterung des goldenen Schnittes.)

1. Auflösung. Man trage auf einer Geraden, welche von dem einen Endpunkt A aus gezogen ist, n Strecken von der verlangten Eigenschaft ab, indem man die erste derselben willkürlich annimmt, verbinde den letzten Teilpunkt mit B und ziehe zu dieser Geraden durch die anderen Teilpunkte Parallele.

End. Hodum. Lengauer. Schmidt (Spremberg). Sievers.

2. Auflösung. Bezeichnet man die Teile mit x, λx, $\lambda^2 x$, ... $\lambda^{n-1}x$, so ist also $x + \lambda x : x = x : \lambda x$, mithin $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, daher $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; und da $\frac{x(1-\lambda^n)}{1-\lambda} = a$, so ist $x = \frac{a(1-\lambda)}{1-\lambda^n}$.

Bermann (Liegnitz). Beyens. Emmerich. Fuhrmann. Nisteo. Stegemann. Stoll. Szimányi (Trenchin).

Zusatz. Sind x_1, x_2, ... die Teile, so erhält man zur Berechnung derselben die Gleichung $x_1 + x_2 \ldots = a$ und $x_1^2 - x_2^2 = x_1 x_2$, $x_2^2 - x_3^2 = x_2 x_3$, ...; hieraus folgt $x_3 = x_1 - x_2$, $x_4 = x_2 - x_3$

$= -x_1 + 2x_2$, $x_5 = x_3 - x_4 = 2x_1 - 3x_2, \ldots$ $x_{n-1} = x_{n-3} - x_{n-2} = \pm A_{n-3}x_1 \mp A_{n-2}x_2$, $x_n = x_{n-2} - x_{n-1} = \mp A_{n-2}x_1 \pm A_{n-1}x_2$, wo A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3} resp. das $(n-1)$te, $(n-2)$te, $(n-3)$te Glied der in Nr. 661 behandelten Reihe sind und wo die oberen Zeichen für gerade, die unteren für ungerade n zu nehmen sind.
Nisetbo. Szimányi.

663. (Gestellt von Sporer XVIII$_2$, 132.) Sind $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Ecken eines regulären Polygons, ist ferner r der Radius des Umkreises und P irgend ein Punkt innerhalb des Polygons, so ist stets $PA_1 + PA_2 + \cdots PA_n > nr$.

Beweis. Zieht man an den Umkreis des Polygons in dessen Ecken Tangenten, so erhält man ein neues reguläres Polygon und der Punkt P habe von seinen Seiten resp. die Entfernungen PB_1, $PB_2 \ldots PB_n$; multipliziert man jedes dieser Lote mit der Seite des letzteren Polygons, so ergiebt sich $PB_1 + PB_2 + \cdots PB_n = nr$. Da nun $PB_1 < PA_1$, $PB_2 < PA_2 \ldots$, so ist $PA_1 + PA_2 + \cdots PA_n > nr$.
Beyens. Emmerich. Fuhrmann. Nisetbo. Sporer (Weingarten.).

664. (Gestellt von Schlömilch XVIII$_2$, 132.) M sei der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$, CM schneide AB in D; die Senkrechte auf AB in D schneide AM in E und BM in F; dann ist $DE : DM = DM : DF$.

1. Beweis. $\sphericalangle MED = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{oder } 90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$, $\sphericalangle FMD = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{oder} = 180^0 - \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$; mithin $\triangle MDF \sim EDM$, also $DE : DM = DM : DF$.

Adami (Bayreuth). Bermann. Beyens. Emmerich. Helm (Liegnitz). Kober (Schollwitz). Lengauer. v. Miorini. Rulf (Pilsen). Wachter (Schaarbeek bei Brüssel). Simon. Stoll. Tauberth (Dresden). Treumann (Birkenruh in Livland).

2. Beweis. $DE : DM = \cos\frac{1}{2}\beta : \cos\frac{1}{2}\alpha$ und $DM : DF = \cos\frac{1}{2}\beta : \cos\frac{1}{2}\alpha$.
Hodum. Stegemann.

3. Beweis. Da $AD = \frac{bc}{a+b}$, so ist $DE = \frac{bc}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, und da $BD = \frac{ac}{a+b}$, so ist $DF = \frac{ac}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, mithin $DE \cdot DF = \frac{abc^2}{(a+b)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Ferner $DM = \frac{AD \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{bc\sin\frac{\alpha}{2}}{(a+b)\cos\frac{\beta}{2}}$ und ebenso $DM = \frac{ac\sin\frac{\beta}{2}}{(a+b)\cos\frac{\alpha}{2}}$, also $DM^2 = \frac{abc^2}{(a+b)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Klewe (Schrimm). Nisetbo.

B. Neue Aufgaben.

713. (Verallgemeinerung von Nr. 591, XVII_8, 593.)

$$x(\alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha xyz) + a = 0\,(1);\; y(\beta_1 z + \beta_2 x + \beta xyz) + b = 0\,(2);$$
$$z(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma xyz) + c = 0\,(3).$$

Emmerich (Mülheim a. d. Ruhr).

714. Gesucht wird das $n$te Glied der folgenden Reihe:

1, 3, 6, 10, 16, 24, 34, 46, 61, 79, 100, 124, 152, ···

Haag (Rottweil).

666. (Gestellt von Kober XVIII_2, 133.) Gegeben ist ein Parallelogramm $CEDF$; die Parallele durch D zu EF treffe CE in A und CF in B, und ein durch C gehender beweglicher Strahl treffe ED in M und FD in N; dann ist $AM \parallel BN$. Zieht man $CX \parallel AM$, so ist $C(BAMX)$ harmonisch.

Beweis. $\frac{EA}{FN} = \frac{CE}{FN} = \frac{EM}{FC} = \frac{EM}{FB}$; und da $\sphericalangle AEM = NFB$, so ist $\triangle AEM \sim NFB$. Da nun $EA \parallel FN$ und $EM \parallel FB$, so mufs auch $AM \parallel NB$ sein. Trifft CX die Verlängerung von DE in G, so ist $\triangle CEG \cong AEM$ und daher $EG = EM$, folglich ist $C(GMEF)$ oder $C(BAMX)$ harmonisch.

Beyens. Emmerich. Fuhrmann. Helm. Hodum. Kober. Lengauer. v. Miorini. Stegemann. Tauberth. Wachter.

667. (Gestellt von Emmerich XVIII_2, 133.) Man sucht die Kanten eines gleichflächigen Tetraeders, wenn die Oberfläche f, der Radius r der Umkugel und a) das Volumen v, b) der Radius ϱ der Inkugel gegeben sind.

1. Auflösung. Da $v = \frac{1}{3} f\varrho$ ist, so macht es keinen Unterschied, ob r, f, v oder r, f, ϱ gegeben. Da das Tetraeder gleichflächig sein soll, so sind immer je zwei gegenüberliegende Kanten einander gleich und es seien x, y, z die Kanten des Tetraeders; ξ, η, ζ seien die Verbindungslinien der Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten, also die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Flächendiagonalen x, y, z, welches man demnach erhält, wenn man durch je zwei gegenüberliegende Tetraederkanten parallele Ebenen legt. Mithin ist $\eta^2 + \zeta^2 = x^2$, $\zeta^2 + \xi^2 = y^2$, $\xi^2 + \eta^2 = z^2$. Da die Umkugel des Tetraeders auch die des Parallelepipedons ist, so ist $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4r^2\,(1)$. Eine Tetraederfläche ist $\frac{1}{4} f$, mithin $-x^4 - y^4 - z^4 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2x^2y^2 = f^2$, oder wenn x, y, z durch ξ, η, ζ ausgedrückt werden $\eta^2\zeta^2 + \zeta^2\xi^2 + \xi^2\eta^2 = \frac{1}{4} f^2\,(2)$. Das Parallelepipedon besteht aus dem Tetraeder mit dem Volumen v und vier kongruenten Pyramiden, deren jede das Volumen $\frac{1}{6}\xi\eta\zeta$ hat. Mithin ist $\xi\eta\zeta = \frac{2}{3}\xi\eta\zeta + v$ oder $\xi\eta\zeta = 3v$, also $\xi^2\eta^2\zeta^2 = 9v^2\,(3)$. Aus (1), (2) und (3) ergiebt

sich, dafs ξ^2, η^2, ζ^2 die Wurzeln der Gleichung $z^3 - 4r^2z^2 + \frac{1}{4}f^2z - 9v^2 = 0$ sind. Bermann. Emmerich. Fuhrmann. Hodum.

2. **Auflösung.** Da die Mittelpunkte der Umkugel und Inkugel zusammenfallen, so ist, wenn mit r_1 der Radius des Umkreises einer Seitenfläche bezeichnet wird, $r_1 = \sqrt{r^2 - \varrho^2} = \frac{\sqrt{r^2f^2 - 9v^2}}{f}$. Der Inhalt einer Seitenfläche ist daher $= \frac{xyz}{4r_1} = \frac{xyzf}{4\sqrt{r^2f^2 - 9v^2}}$; da f

715. Zu beweisen, dafs

$$1 + \frac{1}{2}\binom{k+1}{1} + \frac{1}{4}\binom{k+2}{2} + \frac{1}{8}\binom{k+3}{3} + \cdots \text{ in inf.} = 2^{k+1} \text{ ist,}$$

wenn $\binom{k+1}{n}$ den $n$ten zum Exponenten $k+1$ gehörigen Binomialkoefficienten bedeutet. Grube (Schleswig).

716. Bezeichnet man mit $\sum(n^k)$ die Summe der $k$ten Potenzen aller Zahlen von 1 bis n, so ist für $n = \infty$. $\sum(n^k) = \frac{n^{k+1}}{k+1}$ (eine zur Berechnung von Trägheitsmomenten sehr brauchbare Regel). Z. B. $1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n^2}{2}$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n^3}{3}$ u. s. w. Weber (Frankfurt a. M.).

717. Im regelmäfsigen nEck ist a) die Summe der Quadrate über sämtlichen Seiten und Diagonalen gleich n^2r^2 und b) das Produkt sämtlicher Seiten und Diagonalen gleich $\left(nr^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$, wo mit r der Radius des Umkreises bezeichnet wird. Zimmermann (Eisenach).

718. Verteilt man die überall gleich dicht vorausgesetzte Masse einer dreiseitigen Pyramide in der Weise, dafs man nach jeder Ecke den zwanzigsten Teil derselben und den Rest nach dem Schwerpunkt bringt, so haben diese Massenpunkte für eine beliebige Achse dasselbe Trägheitsmoment wie der Körper. **Frage:** Welcher Bruch ist für $\frac{1}{20}$ einzuführen, wenn man statt der Pyramide ein Dreieck wählt? Weinmeister (Tharand).

719. Das Trägheitsmoment eines regelmäfsigen Vielecks für eine durch den Mittelpunkt gehende und der Ebene angehörende Gerade ist von deren Richtung unabhängig. (Elementar d. h. ohne Central-Ellipsoid und analytische Geometrie zu beweisen.) Weinmeister (Tharand).

720. Werden die Winkel α, β, γ eines Dreiecks durch die Mittellinien geteilt in resp. α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2, so ist

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1\,\sin\alpha_2} + \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1\,\sin\beta_2} + \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_1\,\sin\gamma_2} = 6\,(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) = 6\cot\vartheta.$$

Fuhrmann (Königsberg i. Pr.).

721. Gehen n Kreise durch einen Punkt, so giebt es eine Schar von vollständigen n Ecken, deren Seiten durch die übrigen Schnittpunkte der Kreise gehen und deren Ecken auf den Kreisen liegen. Diese n Ecke sind untereinander ähnlich. Böcking (Colmar i. E.).

722. Die Halbachsen einer Ellipse mögen $CA = a$ und $CB = b < a$ sein, und der Nebenscheitel B werde zum Mittelpunkte eines mit dem Radius r beschriebenen Kreises genommen; man soll nun r so wählen, dafs der Kreis die Ellipse berührt. Aufserdem sind die Koordinaten der Berührungspunkte beider Kurven zu bestimmen. Schlömilch.

723. Dreht sich ein rechter Winkel um den Mittelpunkt eines Kegelschnittes, so bestimmen dessen Schenkel auf dem Kegelschnitt Sehnen, die einen Kreis umhüllen. Sporer (Weingarten).

724. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 seien sechs Ecken eines vollständigen Vierseits. M_a, M_b, M_c seien die resp. Mitten zwischen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Dann schneiden sich die drei Hyperbeln, welche durch $A_1A_2B_1B_2M_c$, $A_1A_2C_1C_2M_b$ und $B_1B_2C_1C_2M_a$ gehen, in einem Punkte der unendlich fernen Geraden. Beyel (Zürich).

C. Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften.

Gleichungen.

Die mit † versehenen Auflösungen sind von den Redakteuren des Aufgaben-Repertoriums hinzugefügt.

336. u, v, x, y zu berechnen aus $u^m v^n = a^x$ (1); $u^n v^m = a^y$ (2); $u^x v^y = b$ (3); $u^y v^x = c$ (4).

Auflösung†. $x = \frac{m \lg u + n \lg v}{\lg a}$; $y = \frac{n \lg u + m \lg v}{\lg a}$; werden diese Werte in (3) und (4) eingesetzt, so ergiebt sich $m(\lg u)^2 + 2n \lg u \cdot \lg v + m(\lg v)^2 = \lg a \lg b$; und $n(\lg u)^2 + 2m \lg u \lg v + n(\lg v)^2 = \lg a \lg c$. Durch Addition und Subtraktion der beiden letzten Gleichungen findet man $\lg u + \lg v = \sqrt{\frac{\lg a (\lg b + \lg c)}{m+n}}$ und $\lg u - \lg v = \sqrt{\frac{\lg a (\lg b - \lg c)}{m-n}}$ u. s. w. Journ. élém.

337. $5^{x(x-1)}\, 2^{x(x+1)} = 64 \cdot 10^{2x}$.

Auflösung. $2^{x^2-x}\, 5^{x^2-3x} = 2^6$, also $x^2 - x(1 + 2\lg 5) = 6 \lg 2$. Mathesis.

338. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}$.

Auflösung. $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{8}$, also $x = \frac{\lg 3 - 3 \lg 2}{\lg 3 - \lg 2}$. Mathesis.

339. $x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 4x - 2 = 0$.

Auflösung. $(x+2)^4 - 18(x+1)^2 = 0$; also $(x+2)^2 = \pm 3\sqrt{2}(x+1)$ u. s. w. Educat. Times.

340. Die Gleichung $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=1$ hat immer reelle Wurzeln.

Beweis. Entwickelt man die Gleichung, so läfst sich die Gröfse unter dem Wurzelzeichen auf die Form $(2ab)^2+(a^2-b^2+p-q)^2$ bringen, ist also die Summe zweier Quadrate, mithin stets positiv.

Mathesis.

341. $\frac{y}{x}\cdot\frac{1+x^2}{1+y^2}=a\,(1)$; $\frac{y^3}{x^3}\cdot\frac{1+x^6}{1+y^6}=b^3\,(2)$.

Auflösung †. Es ist $x+\frac{1}{x}=a\left(y+\frac{1}{y}\right)$ und $x^3+\frac{1}{x^3}=b^3\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)$; wird $x+\frac{1}{x}=u$, $y+\frac{1}{y}=v$ gesetzt, so ist $u=av$ und $u^3-3u=b^3(v^3-3v)$, woraus sich $v=\sqrt{\frac{3(a-b^3)}{a^3-b^3}}$ und $u=a\sqrt{\frac{3(a-b^3)}{a^3-b^3}}$ ergiebt.

Educat. Times.

342. $(xy+1)(x+y)=\frac{16}{3}xy\,(1)$; $(x^2y^2+1)(x^2+y^2)=\frac{100}{9}x^2y^2\,(2)$.

Auflösung †. $x^2+2xy+y^2=\frac{256x^2y^2}{9(xy+1)^2}$ und unter Berücksichtigung von (2) $\frac{100xy}{x^2y^2+1}+18=\frac{256xy}{(xy+1)^2}$, woraus sich die reciproke Gleichung $9x^4y^4-60x^3y^3+118x^2y^2-60xy+9=0$ ergiebt. Man findet $x=3$, $y=1$ oder umgekehrt, und $x=1$, $y=\frac{1}{3}$ oder umgekehrt.

Educat. Times.

343. $x^2y+yz=a\,(1)$; $x^2+yz=b\,(2)$; $x^2y^2+z=c\,(3)$.

Auflösung †. Aus (1) und (2) ergiebt sich $x^2(y-1)=a-b\,(4)$; aus (2) und (3) $z=\frac{b-x^2}{y}=c-x^2y^2$ oder $x^2(y^3-1)=cy-b\,(5)$; wird (5) durch (4) dividiert, so erhält man $y^2+y+1=\frac{cy-b}{a-b}$ und hieraus

$$y=\frac{b+c-a\pm\sqrt{(b+c-a)^2-4a(a-b)}}{2(a-b)}.$$

Mathesis.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Lösungen sind eingegangen von: Bermann 702. 704—706. 709. 711. 712. Fleischhauer 690. Fuhrmann 679—687. 689. 692. 693. 695—699. v. Gabain 695. Liebrecht 695. Meinel 679—689. v. Miorini 693. 696. 697. 699. Niseteo 684. 687. 692. 693. Schmidt 661. 663. 664. 666. 668. Stegemann 693. 696—699. 701. Stoll 682. 683. 685—688. 692. 693. 695. 697—701. Vollhering 671. 673—675.

Die übrigen s. S. 560.

Neue Aufgaben: Feil (1). Glaser (3). Meinel (1).

Litterarische Berichte.

A. Rezensionen.

REIDT, Dr. FRIEDRICH (Professor am Gymnasium und Realgymnasium zu Hamm), Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra. Berlin, G. Grotesche Verlagsbuchhandlung. 1884. gr. 8°. 332 Seiten. Preis 2,80 *M*.

Dafs eine Aufgabensammlung für den arithmetischen Unterricht unentbehrlich ist, wird wohl von keiner Seite mehr geleugnet werden; aber auch die eine Zeit lang ziemlich verbreitete Ansicht, dafs eine Aufgabensammlung für diesen Teil des mathematischen Unterrichts genüge, ein besonderes Lehrbuch dagegen für denselben nicht erforderlich sei, dürfte gegenwärtig nicht mehr viele Anhänger zählen. In der That liegt im letzteren Falle die Gefahr nahe, dafs an die Stelle einer Anwendung verstandener Gesetze eine mehr mechanische Einübung von Regeln durch zahlreiche Beispiele tritt, dafs ferner den Schülern der Zusammenhang der einzelnen Sätze, der Aufbau derselben zum wissenschaftlichen System und die allmähliche Erweiterung des Zahlengebietes nicht zu gehöriger Klarheit kommen, kurz dafs das Wissen über dem Können vernachlässigt wird und der arithmetische Unterricht nicht voll die bildende Kraft entfaltet, die ihm in so hohem Mafse innewohnt. Für die möglichst innige Verbindung von Theorie und Praxis ist es aber des weiteren mindestens höchst wünschenswert, dafs Lehrbuch und Aufgabensammlung im engsten Zusammenhang stehen, die Behandlungsweise und die Verteilung des Stoffes in beiden völlig übereinstimmen und bei jedem Fortschritt in der Erweiterung des Wissens die Sammlung das erforderliche Übungsmaterial bietet; und diese Erkenntnis hat auch zur Abfassung des oben genannten Werkes geführt, welches in engster Beziehung zu dem Lehrbuch der Arithmetik und Algebra desselben, auf dem Gebiete der mathematischen Schullitteratur rühmlichst bekannten Verfassers steht; nur Gründe äufserer Art haben dazu geführt, die Aufgaben nicht nach Art der bekannten trefflichen Werke von Heilermann und Diekmann und von Schubert unmittelbar dem Texte des Lehrbuchs hinzuzufügen, sondern in einem besonderen Hefte zusammenzustellen. Gegen eine derartige Anordnung des

Übungsmaterials nach den einzelnen Sätzen des Lehrbuchs hat man wohl eingewendet, dafs die Schüler dadurch des Nachdenkens über die in jedem einzelnen Falle anzuwendende Regel überhoben würden und nicht zur Selbständigkeit gelangten. In seiner ausgezeichneten „Anleitung zum mathematischen Unterricht“ weist der Verfasser unseres Buches diesen Einwand mit Entschiedenheit zurück; zunächst sei es doch pädagogisch richtig, dafs die praktische Anwendung eines Satzes durch bewufste Ausübung der in ihm enthaltenen Regel nicht bei mehr oder minder gelegentlichem Vorkommen derselben, sondern an unmittelbaren und hinreichend zahlreichen Beispielen bis zu einer gewissen Fertigkeit gebracht werden müsse, und sodann sei es unwahr, dafs die Schüler nicht dazu angeleitet würden, die einzelnen anzuwendenden Regeln selbst aufzufinden; denn in jeder besseren Aufgabensammlung sollten nur die ersten Beispiele ausschliefslich der Einübung und Erläuterung des neuen Satzes dienen, während die folgenden von mehr oder minder zusammengesetzter Art seien, sodafs sie die Vereinigung der neuen Operation mit verschiedenen älteren fordern. „Ein derartiges Verfahren, bei dem der Schüler zunächst nicht in Zweifel gelassen wird, was das Neue ist, das er lernen und üben soll, bei welcher aber jeder folgende Fortschritt mit der Anwendung und Wiederholung von Früherem behufs erneuter Einprägung und dauernden Festhaltens verbunden ist, entspricht durchaus gesunden pädagogischen Grundsätzen.“ Diesen Grundsätzen ist der Verfasser überall bei der Abfassung und Zusammenstellung seiner Aufgabensammlung treu geblieben; durch die Herausgabe derselben hat er in erster Linie den Schulen, welche sein Lehrbuch der Arithmetik und Algebra eingeführt haben, einen grofsen Dienst erwiesen, aber manche Vorzüge machen das Werk überhaupt zu einer beachtenswerten Erscheinung.

Die Paragraphen 1 bis 17 sind den vier Grundoperationen, die Paragraphen 18 bis 31 den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen gewidmet. Als eine schätzbare Eigentümlichkeit fällt zunächst die überall durchgeführte Trennung der für das Kopfrechnen von den für das schriftliche Rechnen empfohlenen Aufgaben auf; erstere sind jedesmal in einer mit *M* bezeichneten, letztere in einer folgenden mit *S* bezeichneten Gruppe zusammengestellt. Von den Aufgaben der ersten Art sind leichte in grofser Anzahl vorhanden, während z. B. bei Heis gerade die einfacheren Aufgaben für die schwächeren Schüler nicht immer ausreichen; aber auch die zusammengesetzteren Aufgaben der ersten Gruppe lassen sich sehr wohl, ohne die Feder zur Hand zu nehmen, bewältigen. Namentlich bei den vier Grundoperationen sind zu jedem Satze zunächst Aufgaben mit bestimmten Zahlen gegeben, welche die Berechnung eines Ausdrucks auf mehrere Arten verlangen, erst ohne und dann mit Anwendung des betreffenden Satzes; dieselben sind vorzüglich geeignet, Klarheit über die eigentliche Bedeutung und den Sinn des

Satzes zu verschaffen. Dann folgen Ausdrücke, welche auf die kürzeste Art zu berechnen sind; es möchte sich bei einer neuen Auflage empfehlen, in § 5 hier noch solche Aufgaben hinzuzufügen, wo die betreffende Summe oder Differenz von dem Schüler selbst gebildet werden mufs, da dieselben die Verwertung der Sätze für das praktische Rechnen zeigen, z. B. zu Satz 12: „Auf die kürzeste Art 576 — 399 zu berechnen.“ Auf den ersten Blick fällt die grofse Zahl von Aufgaben auf über die „Veränderung der Reihenfolge bei Additionen und Subtraktionen ohne Veränderung des Resultats,“ also über die Addition und Subtraktion einer Zahl zu bezw. von einer Summe und Differenz und über die Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen; die bald erfolgende Einführung der negativen Zahlen und algebraischen Summen scheint die sorgfältige Einübung aller einzelnen Regeln unnötig zu machen. Wer aber die Arithmetik nicht nur des praktischen Könnens wegen treibt, sondern in der Beschäftigung mit den einzelnen Sätzen derselben auch Denkübungen sieht, wird, wie der Verfasser in seiner „Anleitung“ ausführt, anders urteilen müssen; „denn jede solche Übung mufs gründlich sein, und es darf nur dann zu einer neuen übergegangen werden, wenn der Inhalt der vorhergehenden und die Stellung derselben in der Gesamtentwickelung des Lehrgebäudes hinreichend klar erfafst und eingeprägt ist; dazu gehören an dieser Stelle auch Beispiele in nicht zu geringer Zahl.“ Während in § 4 eine fast übergrofse Menge von Aufgaben über den Gebrauch von Klammern bei Summen und Differenzen gegeben ist, vermifst man gänzlich entsprechende Aufgaben zu der Vorbemerkung des § 13 des Lehrbuchs über den Gebrauch der Klammern bei Produkten und Quotienten nach Art von Heis § 6 Aufg. 9 und Bardey II, Aufg. 46 u. 47; es ist aber durchaus erforderlich, dafs dem Durchschnittsschüler der Unterschied von Ausdrücken wie

$$(a - b)\, c - d, \quad a - b\,(c - d), \quad (a - b)\,(c - d)$$

durch Berechnung numerischer Beispiele zur Klarheit gebracht werde, wenn ihm der Unterschied in Fleisch und Blut übergehen soll. An dieser Stelle wären auch zweckmäfsig Aufgaben zur Analyse zusammengesetzter Ausdrücke einzufügen (vergl. Schubert § 2 E und F, und die Aufgaben 16 und 19), sowie Aufgaben, in denen gewissermafsen das Umgekehrte verlangt wird, z. B.: „Wie drückt man durch Rechnungszeichen aus, dafs x von y subtrahiert, die Differenz durch z dividiert, der Quotient zu a addiert und die Summe mit b multipliziert werden soll?“ Wenig praktisch ist das späte Auftreten des Satzes $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$, worauf das Heben beruht; der Verfasser will anscheinend bis dahin die Sätze über die Division eines Produktes und über die Division durch ein Produkt benutzt wissen, um einen Quotienten durch kleinere Zahlen auszudrücken, aber die Anwendung des erwähnten Satzes ist doch

vorzuziehen, weil das Verfahren mit dem kurzen Ausdruck „Heben“ bezeichnet werden kann und dasselbe auch den Schülern vom Rechnen her geläufig ist. Der Satz läfst sich ja sehr wohl unmittelbar an die Sätze über die Multiplikation und Division eines Quotienten anschliefsen, wenn auch der Aufbau des Systems dadurch etwas gestört wird. In jedem Falle erscheint eine Vermehrung der Aufgaben zur Anwendung dieses Satzes nach Art von Bardey VIII, B erforderlich, wogegen die Aufg. 55 und die etwas monströse Aufg. 56 fortfallen können; ebenso ist es wünschenswert, dafs die einfacheren Aufgaben zum schriftlichen Rechnen über die Addition und Subtraktion von Quotienten mit verschiedenen Divisoren nach Art der Aufg. 89 u. 90 noch vermehrt werden; auch hier bietet Bardey (IX, Aufg. 44—55) erheblich mehr, wie denn die Abschnitte VIII und IX (Zerlegung in Faktoren, Heben der Brüche, Addition und Subtraktion der Brüche) bei Bardey für die Behandlung dieser für die Praxis so wichtigen Fälle wahrhaft musterhaft sind. In § 18c (Division von Potenzen mit gleichen Basen) ist der Fall, dafs der Exponent des Dividenden kleiner ist als der des Divisors in den Aufgaben zum mündlichen Rechnen gar nicht berücksichtigt, nur in zwei schon zusammengesetzteren Aufgaben zum schriftlichen Rechnen kommt der Fall überhaupt vor; bedarf man für denselben auch keines besonderen Satzes, da man ja durch den Dividenden heben und bei der Division des Divisors wieder die Formel $a^m : a^n = a^{m-n}$ anwenden kann, so müssen doch Aufgaben für diesen Fall in hinreichender Zahl vorhanden sein; nebenbei bemerkt, gehören in diesen Paragraphen auch die Aufgaben 3, 13 und 14, die fälschlich in § 18e hineingeraten sind. Dafs die Potenzen mit negativen Basen nach denen mit negativen Exponenten behandelt sind, erscheint wenig passend, da doch naturgemäfs zunächst alle Fälle zu erledigen sind, bei denen man mit der ursprünglichen Definition des Potenzierens auskommt. Ebenso möchte es sich schwerlich weder praktisch noch wissenschaftlich rechtfertigen lassen, dafs die irrationalen Zahlen nach den imaginären Zahlen behandelt werden; denn ehe zu Wurzeln mit negativen Radikanden übergegangen wird, sollten doch alle Fälle erledigt sein, die bei absoluten Radikanden vorkommen können, und ehe das Zahlengebiet durch Einführung der imaginären Zahlen erweitert wird, sollte doch das Gebiet der reellen Zahlen erschöpft sein. In § 23a sind zu dem Satze $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$ mit Recht zahlreiche Beispiele zur Berechnung von Wurzeln aus gröfseren Zahlen durch Zerlegung in Faktoren gegeben, da sich dieses Verfahren nicht selten mit Vorteil anwenden läfst. In § 27 findet sich auch eine Menge von Beispielen zur Ausziehung der Kubikwurzel nach dem üblichen Verfahren, obwohl der Verfasser mit Recht von diesen Übungen ziemlich geringschätzig denkt (siehe „Anleitung zum mathem. Unterricht“ pag. 133); natürlich durften

aber jene Aufgaben in Rücksicht auf Vollständigkeit und eine abweichende Ansicht nicht fehlen. Zu erwähnen ist noch ein Anhang über Proportionen, der entsprechend der trefflichen Behandlung dieses Kapitels im Lehrbuch in übersichtlicher Anordnung ein reiches Übungsmaterial bietet; zwei weitere Anhänge geben Aufgaben zu den Sätzen aus der Zahlenlehre und über Zahlensysteme.

Mehr als ein Drittel des Buches von § 32—50 nehmen die Gleichungen ein. Die Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten sind zunächst nach den einzelnen Transpositionsregeln erster und zweiter Stufe in Gruppen geordnet; jeder Gruppe ist die betreffende Regel vorangestellt, und nun folgen Gleichungen zur Einübung, wobei selbstverständlich auch die Anwendung von früheren Regeln nicht fehlt. Auch hier sind Gleichungen, die sich zum Kopfrechnen eignen, besonders zusammengestellt; hervorzuheben sind hier die zahlreichen Gleichungen der Gruppe f, in denen die Unbekannte nur einmal vorkommt; mündliche Lösungen von Gleichungen wie $5\left[3 + 4\left(7 - 6 \cdot \frac{x-18}{11}\right)\right] = 15$, wobei „alle Glieder, Faktoren u. s. w. sozusagen ind der Reihenfolge von aufsen nach innen von der Seite der Unbekannten entfernt werden“, sind vortreffliche Übungen, die den Schülern geradezu Vergnügen bereiten (vergl. Reidt, Anleitung etc. pag. 140 und Heis § 61 A. 65 u. 66). Sodann sind die sämtlichen Operationen, welche bei Auflösung einer Gleichung vorkommen können, noch einmal nach Regeln zusammengestellt, und nun folgen Aufgaben, bei deren Lösung auch die sämtlichen Umformungen vorzunehmen sind. Schliefslich sind noch Gleichungen, bei denen die Einführung einer neuen Unbekannten vorteilhaft ist, Gleichungen scheinbar höherer Grade, welche sich auf solche ersten Grades reduzieren und „vermischte Aufgaben“ gegeben. Von Gruppe i an kommen ziemlich viel Aufgaben mit wenig einfachem Resultat vor; ich will derartige Aufgaben nicht ganz verbannt wissen, damit der Schüler sich nicht etwa einbilde, die Lösung einer Gleichung müsse immer eine einfache und elegante Form haben, aber ich glaube doch, dafs dieselben etwas spärlicher gegeben werden können. Wenn, wie billig, die Schüler die Resultate nicht kennen, giebt ihnen ein einfaches und elegantes Resultat schon eine gewisse Garantie, richtig gerechnet zu haben, während das Gefühl der Befriedigung über erfolgreiche Arbeit nicht aufkommen will, wenn das Resultat vielleicht ein Bruch in grofsen Zahlen oder ein gröfserer, uneleganter Buchstabenausdruck ist; auch werden sie in einem solchen Falle durch die erforderliche grofse Rechnung von einer Probe abgeschreckt.

Der nun folgende Paragraph: „Anwendungen der Gleichungen ersten Grades“ erscheint, wie überhaupt die Behandlung der eingekleideten Gleichungen, besonders gelungen und beachtenswert. Das Streben des Verf. ist darauf gerichtet gewesen, die trivialen Einkleidungen, die in manchen Sammlungen bei einer grofsen Zahl von

Aufgaben vorkommen, möglichst fern zu halten, dieselben durch solche Einkleidungen zu ersetzen, welche an sich irgendwie bemerkenswert und nutzbringend sind, und Anwendungen zu finden, deren Verständnis auch dem Anfänger ohne Zeitverlust zugänglich gemacht werden kann; im Vergleich mit der von demselben Geist getragenen Sammlung von Schubert zeichnet sich die von Reidt durch gröfsere Reichhaltigkeit aus. Die Aufgaben sind gruppenweise nach der Verwandtschaft des Inhalts geordnet. Zuerst kommen „Aufgaben, welche sich unmittelbar in Gleichungen übersetzen lassen“, die fast sämtlich mündlich gelöst werden können. Dann folgt ein ausgedehnter Abschnitt: „Prozentrechnungen“. Zuerst kommen jedesmal Aufgaben in bestimmten Zahlen, dann tritt die betreffende allgemeine Aufgabe auf und mit Hülfe des erhaltenen Resultats sind dann die früheren noch einmal und einige neue Aufgaben in bestimmten Zahlen zu lösen. Dieses Verfahren ist in hohem Mafse geeignet, dem Schüler den Wert allgemeiner Rechnungen vor Augen zu führen; die Lösung der allgemeinen Aufgabe erscheint als ein Mittel, Rechnungsregeln zu finden, nach denen bestimmte Arten von Aufgaben auf die kürzeste Weise gelöst werden können. Der Verfasser hätte aber nach meinen Erfahrungen im Unterricht besser gethan, wenn er den Tertianern weniger Abstraktionsvermögen zugemutet und sich zunächst auf die Zinsrechnung beschränkt, dementsprechend die allgemeinen Aufgaben gefafst und in ähnlicher Weise etwa die Rabatt- und Diskontrechnung behandelt hätte, als nach gar zu grofser Verallgemeinerung der Aufgaben und nach Formulierungen zu suchen, denen sich zugleich Aufgaben aus der Gewinn- und Verlustrechnung und der Rabattrechnung, oder aus der Zinsrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung und gar Tararechnung doch nur mehr oder weniger gezwungen unterordnen lassen. In den Aufgaben 12 ε und ζ mufs es übrigens doch wohl Diskont von (oder in) 100 statt auf 100 heifsen. Es folgen 3) Verteilungsrechnungen und 4) Mischungsrechnungen. Hier könnten die Aufgaben aus der sogenannten Gold- und Silberrechnung noch wohl vermehrt werden, ganz besonders fällt aber auf, dafs der Feingehalt des Silbers nur in Loten angegeben ist, während doch längst die Angabe des Feingehalts nach Tausendteilen gesetzlich vorgeschrieben ist und in den Aufgaben wenigstens vorherrschen sollte, wenn auch mit Rücksicht auf das praktische Leben, wo der alte Brauch noch nicht geschwunden ist, einige Aufgaben mit dem alten Verfahren am Platze sein mögen; auch kommt mehrmals die längst abgeschaffte und gänzlich überflüssige Gewichtseinheit Dekagramm vor.*) Vorzüglich behandelt sind die Bewegungsaufgaben; auch hier folgt den Aufgaben spezieller Art

*) In Wien (und vermutlich in ganz Österreich) ist diese Gewichtseinheit unter dem kurzen Namen „Deka“ sehr gebräuchlich. In Deutschland ist sie wohl nicht überall üblich. D. Red.

konsequent die verwandte allgemeine Aufgabe, und durch Fragen ist Anregung und Anleitung zur Diskussion des Resultats derselben gegeben, die eine treffliche Übung bildet, wenn auch die Deutung der negativen Resultate über die Kräfte der Durchschnittsschüler der betreffenden Stufe hinausgeht. Im folgenden Abschnitt kommen „geometrische Rechnungsaufgaben“ in einer Reichhaltigkeit (71 Nummern), wie in keiner anderen mir bekannten Sammlung; diese Verbindung der Geometrie mit der Arithmetik liefert zugleich einen Beitrag zur Koncentration des Unterrichts. Mit Recht fragt der Verf. in seiner mehrerwähnten „Anleitung“ pag. 147: „Sollte eine Aufgabe, welche z. B. die Berechnung der Winkel eines Dreiecks aus den Verhältnissen derselben verlangt, nicht nützlicher sein, als etwa diejenige, welche fordert, die Teile einer ganz willkürlichen Zahl aus ihren Verhältnissen zu berechnen?“ In wie hohem Maſse es Reidt gelungen ist, die Geometrie hier und später bei den eingekleideten Aufgaben zu verwerten, verdient die ganz besondere Beachtung der Lehrer der Mathematik. Den Schluſs machen „vermischte Aufgaben“ mit meist recht ansprechender Einkleidung; auch die obligaten Aufgaben aus der griechischen Anthologie fehlen nicht. Bei den Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist hervorzuheben, daſs zunächst Aufgaben kommen, an denen die verschiedenen Eliminationsmethoden zu üben sind, und erst dann besondere Ausnahmefälle folgen, z. B. wo die eine Gleichung nur eine Unbekannte enthält oder wo die Koeffizienten derselben Unbekannten in beiden Gleichungen gleich sind, deren Lösung sich dann ganz von selbst ergiebt. Der Verfasser meint, daſs das entgegengesetzte Verfahren in anderen Sammlungen aus einer falschen Auslegung des Prinzips des Fortschritts vom Besonderen zum Allgemeinen daraus entspringe, daſs überall die Ausnahme der Regel vorangehen müsse; mit Recht betont derselbe in seiner Vorrede und seiner „Anleitung“, „daſs der Gang vom Allgemeinen zum Besonderen der wissenschaftlichere und mehr ausgiebige, und daſs jene Forderung nur eine solche der Didaktik ist, welche unbedingt da fallen muſs, wo sich die Rücksicht auf das mangelhafte Verständnis ungereifter Schüler dem entgegengesetzten Verfahren nicht entgegenstellt.“

Unter den zahlreichen geometrischen Aufgaben zur Anwendung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten finden sich auch Fragen nach dem Maximum und Minimum unter Anwendung der Bedingung $p^2 \geqq 4q$ für eine reelle Lösung der Gleichung $x^2 + px = -q$.

Bei der üblichen Behandlungsweise der quadratischen Gleichungen mit 2 Unbekannten macht sich bekanntlich als ein Übelstand das Fehlen einer einheitlichen Methode geltend; besonders energisch ist von Heilermann und Diekmann darauf hingewiesen worden, daſs hier die Gefahr vorliegt, durch Aufgaben, deren Lösung nur mit Hilfe besonderer Kunstgriffe gelingt, dem alten Vorurteil, befriedigende

mathematische Leistungen seien nur bei einer besonderen mathematischen Begabung möglich, immer neue Nahrung zu geben; und wenn auch das Verfahren der genannten Autoren, diejenigen Gruppen von Gleichungen aufzustellen und wenigstens zum Teil entsprechend zu lösen, für welche die für den Zerlegungsfaktor kubische Diskriminante in eine lineare und eine quadratische Gleichung zerfällt, wenigstens solange keine Anwendung finden kann, als die Determinanten vom Schulunterricht ausgeschlossen sind, so ist es doch wohl der von ihrer Seite ausgegangenen Anregung mit zuzuschreiben, wenn wir in neueren Sammlungen einen erheblichen Fortschritt in der methodischen Behandlung dieser Gleichungen finden. So ist bei Reidt wie auch bei Schubert eine Auswahl von Gleichungen in Gruppen geordnet, und für jede einzelne Gruppe sind die Mittel zur Bewältigung der darin enthaltenen Aufgaben angegeben; damit ist in der That ein reiches Übungsfeld erschlossen, und bei jeder weiterhin vorkommenden Anwendung kann der Schüler sich leicht die Frage beantworten, welcher Gruppe er die gegebene Gleichung unterzuordnen hat, und damit die Lösung in ihren Grundzügen finden. In Gruppe h stimmen die Gleichungen 122 und 148 überein und auch 196 und 204 unterscheiden sich nur durch die Zahlenwerte; ferner stehen in dieſer Gruppe mehrere Gleichungen, die richtiger ihren Platz nach Gruppe i finden würden, da sie auf eine Gleichung führen, die in diese Gruppe i gehört; so erhält man z. B. aus den Gleichungen 189 durch die Substitution $x^2 + y^2 = u$, $xy = v$ die Gleichungen $u^2 - v^2 = 133$, $uv = 78$. Reichhaltig und wohl geordnet ist § 46, der angesetzte kubische Gleichungen enthält, und § 47 „Anwendungen" bietet wieder eine Fülle geometrischer Aufgaben. Auch die noch übrigen Teile der Sammlung zeichnen sich durchweg durch Reichhaltigkeit und übersichtliche Anordnung des Stoffes aus; insbesondere gilt dieser letztere Vorzug von dem XI. Kapitel: „Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Am Schluſs des Buches finden sich einige wichtige physikalische Gesetze zum Gebrauch bei den in den vorhergehenden Abschnitten vorkommenden einschlägigen Aufgaben, sowie achtstellige Logarithmen von Zahlen, welche bei den Aufgaben aus der Zinseszinsrechnung gebraucht werden, zusammengestellt. So tritt denn die Sammlung den vorhandenen ähnlichen Werken ebenbürtig zur Seite, besitzt manche ihr eigentümliche Vorzüge und erweist sich alles in allem als das Werk eines erfahrenen Schulmannes.

Die Ausstattung ist vortrefflich, namentlich muſs der groſse und schöne Druck rühmend hervorgehoben werden.

Ülzen. SUUR.

HOLZMÜLLER, Dr. GUSTAV (Direktor der Gewerbeschule zu Hagen i/W.). Einführung in das stereometrische Zeichnen mit Berücksichtigung der Krystallographie und Kartographie. Leipzig, b. Teubner. 1886. VIII u. 102 S. gr. 8. Mit XVI Figurentafeln enth. 155 Figuren.*) Preis 4,40 ℳ.

Es ist eine bekannte und von uns seit unsern Schülerjahren leider nur zu vielfach gemachte Erfahrung, dafs die Stereometrie und insbesondere das stereometrische Zeichnen einer der wundesten Punkte des mathematischen Gymnasialunterrichts ist. Wir erinnern uns noch lebhaft an diesen von uns auf einem sächsischen Gymnasium genossenen Unterricht — der übrigens von einem zwar nicht universitäts- sondern nur bergakademisch-gebildeten aber äufserst praktischen und in seinen Vorträgen sehr klaren Lehrer erteilt wurde — wir erinnern uns, dafs wir wohl leidliche Kenntnisse in Planimetrie und Trigonometrie hatten, in Stereometrie dagegen so gut wie keine. Von stereometrischem Zeichnen und von Modellen keine Spur! Wer hätte sich auch in dem damals in Sachsen**) eingeführten, jetzt gänzlich verschollenen, Lehrbuche der Elementar-Mathematik von Wunder***) (4 Bde.) in die kleinen überladenen und verwickelten Figuren der Stereometrie (i. 4. Bd.) finden sollen? Im Zeichnen überhaupt, auch im planimetrischen, war wohl jeder Primaner ein Stümper; denn die erbärmlichen Bleistiftskizzen in den mathematischen Heften der Schüler konnte doch jeder Dorfschüler ebenso gut machen. Schreiber dieses hat es aber später als Lehrer bei seinen Gymnasial-Schülern nicht besser gefunden; die Zeichnungen einer untern Klasse einer österr. (Wiener) Realschule waren gegen jene stümperhaften Skizzen golden.

Hier ist auch heute noch die wundeste Stelle des mathematischen Gymnasialunterrichts. Denn wenn auch die konstruktive Methode in der Planimetrie heute mehr gepflegt wird und wir hierüber einige sehr gute Leitfäden und Aufgabensammlungen (Nagel, Lieber-Lühmann, Borth, G. Hoffmann) besitzen, so ist dies doch noch nicht der Fall in der Stereometrie; und so liegt denn die Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens noch ziemlich brach. Dies ist

*) Andere Rezensionen ds. B. s. i. d. Zeitschrift des Vereins d. Ingenieure Bd. XXX, Nr. 42, S. 928 u. in d. Ztschr. „Stahl und Eisen" 1886. Nr. 9. Eine gröfsere Besprechung liefert Hildebrandt (Braunschweig) im päd. Archiv XXIX, Heft 7, S. 433 u. f. in dem Artikel: „Zur Methodik des Unterrichts in der Stereometrie und in der darstellenden Geometrie."

**) Dafs es auch in aufsersächsischen Ländern nicht besser gewesen ist, das beweist das schon in Heft 4 ds. Jahrgs. S. 246 (Anm.) angeführte, uns gegenüber gemachte Geständnis eines sächs. Gymnasialrektors, dafs er von Stereometrie nichts verstehe, da er auf seinem Gymnasium (in Hessen) dieselbe gar nicht gelernt habe. —

***) Derselbe war Professor der Mathematik an der Fürstenschule in Meifsen. Vergl. hierzu die 1. Anm. in XI, 215.

auch in den Verhandlungen einiger Direktoren-Konferenzen Preufsens offen ausgesprochen worden. Darum sollte in der Verbesserung des mathematischen Unterrichts besonders bei der Stereometrie eingesetzt werden. Die Lehrmittel hierzu sind ja jetzt leicht zu beschaffen. Man darf nur erinnern an die jetzt käuflichen, vorzüglichen Modelle von Pappe, Holz, Glas etc., wie wir sie auf der Wiener Weltausstellung (Unterrichts-Abteilung) gesehen haben und wie sie jetzt in den permanenten Lehrmittelausstellungen zu sehen und zu haben sind; weiter sei erinnert an die neuern und bessern Lehrtexte mit guten d. h. korrekten und saubern Figuren, unter denen der von Kommerel-Hauck*) obenan steht. Auch die Stereoskopie hat man zur Hilfe herangezogen und wir erinnern nur an die stereoskopischen Figuren von Schlotke (vgl. I, 159) und an die stereoskopischen Bilder von Brude (IV, 153). Derartige Hilfsmittel dienen aber nur der Befestigung der Körperbilder in der Anschauung und sonach allerdings der Kräftigung des räumlichen Vorstellungsvermögens; aber bei dieser Anschauung verhält sich der Lernende doch nur passiv. Kommt es darauf an, dafs er sich auch selbstthätig erweise, so mufs er die körperlichen Gestalten in ihren mannigfachen Lagen auch selbst zu zeichnen verstehen. Anleitungen hierzu, welche auch ohne das vorausgegangene Studium der darstellenden Geometrie und der Axonometrie zum Ziele führen, gab es nun bislang äufserst wenige; uns war nur bekannt das Buch von Brude, das Zeichnen der Stereometrie (IV, 152).

Es hat daher der durch seine Arbeiten auf dem Gebiete der höhern Geometrie**) wohlbekannte Verfasser unserer Vorlage durch Abfassung und Herausgabe des vorliegenden Buches der Schule einen Dienst erwiesen und hat dadurch zugleich dem wiederholten Verlangen pädagogischer Autoritäten und Schulbehörden entsprochen, wie er denn selbst auf der 21. Direktoren-Konferenz der Provinz Westfalen eine hierauf bezügliche These aufgestellt hat, welche allgemeine Zustimmung fand. (These 14. „In der Stereometrie dürfen Konstruktionsaufgaben nicht vernachlässigt werden.")

Der Lehrstoff des Buches ist in drei Abschnitten (Kap.) und 31 §§ behandelt. Diese Abschnitte sind:

I. Ebenflächige Gebilde und Parallelprojektion.
II. Krummflächige Gebilde.
III. Einiges über Centralprojektion und Malerperspektive.

Was ist denn nun das Charakteristische des vorliegenden Werkes? Es will auch ohne die darstellende (oder sog. deskriptive) Geometrie die Körper zeichnen lehren und zwar so zu sagen durch ein physikalisches Verfahren oder eine optische Me-

*) Von demselben soll noch in diesem Jahre eine neue Auflage erscheinen.

**) s. z. B. das Werk „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften etc., rezens. in XIV (1883), S. 85 u. f.

thode, indem durch Versuche die Entstehung der Schattenfiguren von Drahtmodellen die Projektionen der Körper der Natur gewissermafsen abgelauscht, also durch ein induktives Verfahren gewonnen werden.

Der geschickte Lehrer des geometrischen Zeichnens wird seine Schüler auf diesem Wege zur klaren Einsicht in den Vorgang führen, durch den sich die Entstehung des Bildes eines Körpers auf einer ebenen Fläche der sogenannten Bildfläche oder Projektionsebene vollzieht; indem er ihnen zeigt, wie von einem Punkte aus, in welchem das Auge sich befindet, die Kanten und Ecken eines Körpers auf jener Fläche sich abbilden; und da eben nur die Kanten und Ecken nötig sind (weil ja die zu ihnen gehörigen Seitenflächen leicht hinzugedacht werden können), so leistet hierzu ein Drahtmodell die besten Dienste.*) Es empfiehlt sich, bei einem dieser Grundversuche vom Augenpunkte aus — der zweckmäfsig durch ein Diopter an einem Stative festgelegt wird — bunte Fäden an den Ecken des Drahtmodells vorbei nach der Bildfläche zu ziehen, welche die nach dem Auge gehenden Sehstrahlen vorstellen. Noch zweckmäfsiger dürfte es sein, falls ein verdunkelbares Zimmer (phys. Kabinett) zu Gebote steht, das Auge durch einen Lichtpunkt (kleine Öffnung mit davorstehender Lampe) zu ersetzen, und so das Drahtmodell durch die Schatten der Kanten und Ecken desselben auf einer weifsen Fläche (Leinwand) abzubilden. Diese (objektive) Methode zeigt mehreren (vielen) Schülern zugleich das Bild, ist also zeitersparend und verhindert disciplinare Störungen.**)

Ändert man sodann die Entfernungen zwischen Bild und Gegenstand (Drahtmodell) und ebenso die zwischen diesen und dem Augenpunkt (Standpunkt) des Beobachters ab, so ergeben sich mannigfaltige Variationen. So wird dem Schüler zuvörderst das Wesen der Centralperspektive klar. Ersetzt man dann die anfangs hinter dem Gegenstand (dem Modell) liegende Bildfläche durch eine Glastafel vor dem Gegenstande, so erhält man natürlich ebenfalls ein Bild des Gegenstandes auf eben dieser Glastafel; das Verhältnis der Dimensionen dieses Bildes zu denen des ersteren (Bildes) auf der weifsen Projektionsebene aufzusuchen giebt eine hübsche Übung und Wiederholungsaufgabe für den Schüler. Dafs diese Art der Zeichnung, weil man das Objekt durch die Glastafel hindurch (in der Ferne) erblickt, den Namen Perspektive (von perspicĕre, gewissermafsen „Fernsichtsmalerei") erhalten hat, kann als geschichtlich-litterarische Bemerkung hinzugefügt werden.

---

*) Referent hat derartige Modelle in zwei Wiener Realschulen, in denen er u. a. auch elementaren Zeichenunterricht erteilen mufste, — der bekanntlich in Österreich weit mehr, als in Deutschland gepflegt wird — vorgefunden und benutzt. Er hat dann diese Methode in einer höheren Bürgerschule Hamburgs beim Unterricht über Perspektive ebenfalls angewendet und sie bei seinem spätern Privatunterricht weiter ausgebildet.

**) Diese Methode soll neuerdings in Wien angewendet worden sein.

Sagt man nun dem Schüler, er möge sich das Auge sehr weit, etwa bis in die Sonne versetzt denken, was zwar nicht unendlich weit ist, aber doch dem sehr nahe kommt — da die Entfernung von 20 Millionen Meilen gegen die wenigen Meter im Zeichensaale als unendlich grofs (∞) gelten kann —, so erhält er einen Begriff von der Parallel-Perspektive. Als Einleitung hierzu empfiehlt es sich, in einem Zeichensaale die Entfernung zwischen Gegenstand (Drahtmodell) und Augenpunkt sehr grofs und die zwischen Gegenstand und Bildfläche sehr klein zu nehmen.

Ähnliche Experimente werden nun mit verschiedenen Körpern vorgenommen und hieraus die Zeichnungsregeln auf induktivem Wege abgeleitet. So will Verfasser, wenn wir ihn recht verstanden haben, die Lehrmethode seines Buches und die sich daraus ergebende Zeichenpraxis aufgefafst wissen.

Die Methode des Lehrvortrags ist ähnlich jener in unsern geometrischen Aufgabensammlungen. Denn der Lehrstoff ist in 31 §§ und 203 Aufgaben durchgenommen. Jeder Aufgabe folgt die Lösung, mitunter begleitet von Fragen und erläuternden Bemerkungen und unterstützt durch 155 Figuren auf XVI gefalteten Figurentafeln, die sich beim Studium bequem herausschlagen lassen. Diese Vortragsmethode erinnert allerdings an die Euklidische oder dogmatische, indem, gleichwie dort dem Lehrsatz der Beweis, hier der Aufgabe die Lösung unmittelbar folgt. Ob auf diese Weise der Schüler immer klare Einsicht in die Notwendigkeit und Richtigkeit der Konstruktion erlangen wird, darüber sind uns Zweifel aufgestofsen. Derjenige, welcher das Buch durcharbeitet, dürfte wohl an manchen Stellen nach der gegebenen Anweisung mechanisch verfahren müssen; denn nur die Kenntnis der darstellenden Geometrie und der Axonometrie möchte ihm in zweifelhaften Fällen den wahren Grund der angewandten Zeichnungsmethode enthüllen.*) Aber

*) Vielleicht verdienten mit Beziehung hierauf noch eine Anzahl Stellen eine eingehende Erwägung, zu der folgende Fragen anregen dürften:

S. 2 (am Ende). Warum diesen Beweis nicht selbst vorführen? — S. 6. Aufg. 1. Wäre hier nicht auch ein Beweis nötig? Ist nicht der Winkel von 60° günstiger, als der von 30°, da jener die Bilder weniger verzerrt? — S. 9. § 2 bedürfte wohl der Klärung. Der Punkt als Projektion einer senkrechten Geraden und die Gerade als Projektion einer senkrechten Fläche ist nicht erwähnt. — S. 11. § 13 ebenfalls nicht recht klar. Das „warum?" dürfte wohl nicht jeder Schüler sich beantworten. — S. 42. Aufg. 85 u. f., 92 u. f. Wird der Lernende hier nicht den Begriff der Konturlinie einer Fläche vermissen? — S. 73—75. Wird der Schüler das „axiale (polare) Trägheitsmoment" verstehen und die Aufgabe S. 74 lösen können? Ist hier nicht etwas Wesentliches verschwiegen? — S. 65. Bem. zur Aufg. 126. Ist diese „instruktive Übung" nicht zu viel verlangt? Ist bezüglich der Konturlinie nicht etwas verschwiegen? (Aufg. 127 und 130, Fig. 111 und 112.) — S. 11—13. Aufg. 13. 15—17 steht in Beziehung zu dem wertvollen Aufsatze des Verfassers in ds. Ztschr. XVII, Heft 7. Aber soll das hier von Schülern verstanden werden? Ähnlich Aufg. 202 (S. 98). — Ist S. 16 der Satz 27

— für Autotidakten hat ja auch der Verfasser sein Buch nicht geschrieben; vielmehr fordert es und setzt voraus, wie jedes Schulbuch, die event. Hilfe des Lehrers. Das deutet auch der Verfasser selbst an, indem er in der Vorrede (S. V) bei Betonung des bedauerlichen Mangels der darstellenden Geometrie auf den Universitäten sagt: „Hier erfährt er (der Universitäts-Student) wenigstens, wie ein Teil der wichtigsten Flächen und Raumkurven exakt konstruiert werden kann, und das Bedürfnis zum Studium der darstellenden Geometrie als Wissenschaft wird sich bald von selbst einstellen und ihn zu den umfangreichen Werken von Fiedler und andern hinführen".

Der Leser wird auch nach Neuem nicht vergeblich suchen. Insbesondere sei aufmerksam gemacht auf § 18, S. 63: „Die Kugel in schräger Parallel-Perspektive" (Taf. XI, Fig. 10) und § 29 „Die Kugel in Central-Perspektive S. 93. Aufg. 196 (Taf. XVI, Fig. 148). Ein Bedenken können wir aber nicht unterdrücken: warum Verfasser die elementare (bezw. elementarste) Stereometrie so wenig berücksichtigt und z. B. weder die Formen der elementarsten Körper noch auch ihre Netze gezeichnet oder wenigstens zum Zeichnen derselben Anleitung bezw. Winke gegeben hat, ist uns unerfindlich, zumal da sein Buch doch in das Zeichnen der Stereometrie erst „einführen" soll! Gerade das Zeichnen und Herstellen (Ausschneiden) der Netze, besonders jener der schiefen Körper (Kegel, Pyramide, Prisma) macht gewöhnlich dem Anfänger Schwierigkeiten, fördert andrerseits aber auch sehr die klare Einsicht in den Bau des Körpers. Überdies bietet gerade die Lehre vom Entwerfen der Netze die Brücke einerseits zur darstellenden Geometrie andrerseits zur Oberflächenberechnung. Wir glauben, daſs durch Vermeidung dieser — wie uns scheint übelangebrachten — Ökonomie der Verfasser seinem Werke weitere Verbreitung gesichert hätte. In der Vorrede hat er sich leider über diesen Punkt nicht ausgesprochen.

Die äuſsere Ausstattung des Buches (Druck, Papier, Einband etc.) ist, wie von der Verlagshandlung nicht anders zu erwarten, elegant

(Aufklappungsmethode) in dieser Allgemeinheit richtig? — S. 32. Aufg. 58. Gilt das „obige Beispiel" (s. Bem. am Schluſs) auch für die andern? Ähnlich Aufg. 110 (S. 56). — S. 42. Aufg. 82. Ist nicht die Supponierung der „gemeinschaftlichen Tangente" als Konturlinie nur Näherungskonstruktion? — S. 76. Aufg. 156. Ist hier nicht ein Sprung? — S. 78. § 26. „Elliptisches Hyperboloid" mit einem Mantel? Ist das nicht ein Widerspruch in sich selbst? — S. 80 (Schluſssatz) muſs es wohl heiſsen „hyperbolisches Hyperpoloid" statt „elliptisches Paraboloid"? — S. 80 (weiter oben). Minimalfläche aus Seifenschaum am windschiefen Drahtviereck — ist das identisch mit „Paraboloid"? — Die Sätze des Pascal und Brianchon ohne Beweis? Ist das nicht die „dogmatische Methode" zu weit getrieben? — S. 89. Aufg. 180. Lieſse sich hier nicht eine geeignetere Konstruktion anwenden? (Vergl. Vorrede zu Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie II, S. IV.) — Auch wären noch zu prüfen Fig. 132, § 28 und die Aufgaben S. 92. Ob das Wesen der subjektiven Perspektive richtig erfaſst ist, darüber wollen wir uns ein Urteil nicht erlauben.

und würde es noch mehr sein, wenn die deutschen Lithographen ihren französischen Kollegen in der Kunst ebenbürtig wären.*) Zu wünschen wäre, dafs bei einer neuen Auflage, zur Vermeidung des zeitraubenden Suchens nach den Figuren, die Nummern der Figurentafeln auch im Texte angegeben würden.

Möge denn das Buch beitragen die Schwierigkeiten des stereometrischen Unterrichts, die nicht zum kleinsten Teile in der Darstellung der Figuren liegen, zu heben, mindestens zu verringern und so diesen Unterrichtszweig fruchtbarer und den andern Zweigen der Geometrie ebenbürtig zu machen. H.

Müller, Dr. Hubert (Professor, Oberlehrer am Lyceum in Metz). Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Metz und Diedenhofen, G. Scriba. 1887. 16 S. Pr. 0,30 *M.*

Durch eine Reihe von Schriften über Schulgeometrie ist der Verfasser in weiten Kreisen rühmlichst bekannt. Man wird also von vornherein geneigt sein seinem Urteil in der in der Überschrift genannten Frage zuzustimmen, und wenn man seine früheren Schriften mit einiger Aufmerksamkeit gelesen hat, so wird man sich nicht darüber wundern, dafs er diese Frage verneint. An einer Reihe von Irrtümern und Fehlern solcher Lehrbücher, die sich rühmen oder dafür gelten von Euklidischem Geiste durchweht zu sein, zeigt er, dafs von Euklid kaum etwas anderes übrig geblieben ist als die Form, und dafs diese zum Teil auf Sätze angewandt wird, die mit den heutigen Grundlagen des Systems nicht im Einklang stehen. Da die Grundlagen sich verändert haben, so fordert er einen konsequenten Aufbau der Schulgeometrie auf dieser neuen Grundlage. Euklids Elemente können nicht Gegenstand des Schulunterrichts sein, wohl aber gewähren sie dem Fachmann ein lohnendes, wenn auch schwieriges Studium.

Allen Berufsgenossen, namentlich allen Fachgenossen, seien sie nun Gegner oder Verbündete des Verfassers, sei das Studium der kleinen Schrift dringend ans Herz gelegt; die Gegner werden dadurch erfahren, dafs nicht Mangel an Ehrfurcht vor dem Hergebrachten die Triebfeder der reformatorischen Bestrebungen ist; die Verbündeten werden dabei Gelegenheit nehmen können sich lebhaft vor Augen zu führen, dafs es keineswegs leicht ist, eingewurzelte Schäden als solche zu erkennen; beide aber müssen dem Verfasser für die gründliche und objektive Darlegung dieser Schäden dankbar sein.

Kiel. R. v. Fischer-Benzon.

---

*) Der Leser vergleiche die schöne Brocardsche Tafel in Bd. XV ds. Z. und die feinen Figuren in Burgs Kompendium der höheren Mathematik.

Bardey, Dr. E. **Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. 1. T. Aufgaben mit einer Unbekannten.** Leipzig, Teubner, 1887.

Veranlassung zu dieser Schrift war nach dem Vorwort des Verf. eine von einem Herrn Robert Pauli herausgegebene Anweisung zur Auflösung der Gleichungs-Textaufgaben des Abschnitts XXII in des Verf. gröfserer Aufgabensammlung. „Obgleich das Buch vom Verfasser (Pauli) und Verleger*) mit Fleifs und Sorgfalt hergestellt ist", so kann es Hr. Bardey „im Wesentlichen doch nur als Eselsbrücke" bezeichnen. P. will dem Schüler bei der „Entwicklung des Ansatzes", bekanntlich der wichtigsten Arbeit bei Auflösung einer Gleichungs-Textaufgabe, behilflich sein, aber nach Bs. Ansicht hat er diesen Zweck verfehlt und B. selbst will nun durch diese Anweisung zur Auflösung seiner Aufgaben dem Hrn. P. eine Lektion geben. Wir zweifeln, nach den von uns gelesenen Proben, nicht, dafs dies Hrn. B. trefflich gelungen ist, denn er wird wohl am besten wissen, wie die von ihm ersonnenen und gestellten Aufgaben am richtigsten zu lösen sind. Daher werden Schüler und auch — soweit sie dessen bedürfen — Lehrer lieber nach B.s als nach P.s Auflösungen greifen. Richtiger und dem Schüler zu empfehlen ist es freilich, dafs er die Aufgaben vorerst selbständig löse und erst dann nach einer Hilfe sich umsehe, wenn seine Kraft nach vielen Versuchen doch nicht ausreicht. Dann aber wird er sich wohl am besten nach der zuverlässigern Hilfe umsehen.

Für Lehrer sei noch bemerkt, dafs Hr. B. alle Aufgaben, die Hr. P. bearbeitet hat oder bis dahin noch bearbeiten wird, in der nächsten (14.) Auflage nach Form, Inhalt und Reihenfolge ändern will und dafs er diese Änderungen den Besitzern der ältern Auflagen in einem besonderen Abdrucke darbieten wird.

H.

Neue Auflagen bekannter und anerkannt guter mathematischer Lehr- und Übungs-Bücher.

Fiedler, Dr. Wilhelm (Prof. am eidgenöss. Polytechnikum in Zürich). **Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neuen Methoden, nach Georg Salmon frei bearbeitet. Fünfte, umgearbeitete Auflage. 1. Teil.** XVI und 432 S. Leipzig bei Teubner 1887. Pr. 8,80 *M.*

Dieses bekannte, vielstudierte und bewährte von dem namhaften, besonders auf dem Gebiete der darstellenden und der neueren Geometrie tüchtigen, Gelehrten Fiedler in Zürich auf deutschen Boden verpflanzte und weiterkultivierte Buch des berühmten englischen Mathematikers erscheint hier abermals in neuer (5.) Auflage.

---

*) Verlagshandlung und Jahr ist uns unbekannt, da uns das Buch nicht zu Gesicht kam.

Unter den Händen des Bearbeiters ist es jedoch fast zu einem neuen Werke herausgewachsen, das sein Original hinter sich zurückgelassen hat. Im Vorwort giebt Verf. die Stufen der Vervollkommnung desselben seit 1858 an. Für diese (5.) Auflage erschien ihm „die systematische Einführung des Imaginären nach seiner geometrischen Darstellbarkeit und Bestimmtheit als ein notwendiger Fortschritt". Hierin wurde der Verfasser wesentlich unterstützt durch seinen Sohn (Dr. E. W. Fiedler). Wie sehr nach und nach das Werk an Stoff zugenommen hat, läfst sich schon daraus erkennen, dafs die ersten XIII Kapitel bis zum Schlufs des XIII. (Methode des Unendlich-Kleinen) 432 Seiten einnimmt, während derselbe Stoff in der 2. Auflage (1866) auf 284 Seiten abgehandelt ist.

Die hier folgende Zusammenstellung des Inhalts der 2. Auflage neben der der 5. zeigt, welche bedeutende Umwandlung seitdem das Buch erfahren hat, und wie sehr der Stoff angewachsen ist.

Alte (2.) Auflage.				Neueste (5.) Auflage.			
Kap.	Artikel od. §§	Inhalt	Zahl d. Aufg.	Kap.	Artikel od. §§	Inhalt	Zahl d. Aufg.
I	1—13	Der Punkt	19	I	1—17	Der Punkt	29
II	14—44	Die gerade Linie	56	II	18—44	Der Gleichungsbegriff und die Gerade	62
III	45—52	Aufgaben über die gerade Linie	53	III	45—60	Aufgaben über Gerade und Linienpaare	66
IV	53—83	Von der Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung für die Gleichung der geraden Linie und den trimetrischen Koordinatensystemen	27	IV	61—79	Symbolische Gleichungen und duale homogene Koordinaten	29
V	84—91	Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen	12	V	80—100	Von der Projektivität und den kollinearen Gebilden	20
VI	92—114	Ableitung der Haupteigenschaft aller Kurven 2. Gr. aus der allgemeinen Gleichung	13	VI	101—108	Der Kreis	56
VII	115—127	Der Kreis	20	VII	109—140	Systeme von Kreisen	55
VIII	128—134	Lehrsätze und Aufgaben vom Kreis	26	VIII	141—163	Haupteigenschaften der Kurven 2. Gr.	13
IX	135—151	Eigenschaften eines Systems von zwei oder mehreren Kreisen	11	IX	164—189	Centraleigenschaften von Ellipse und Hyperbel	59
X	152—162	Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung auf die Gleichung des Kreises	10	X	190—210	Focaleigenschaften von Ellipse und Hyperbel	58
XI	163—210	Die allgemeine Gleichung 2. Gr. als Centralgleichung von Ellipse und Hyperbel	49	XI	211—229	Parabel	22
XII	211—232	Die Parabel	4	XII	230—250	Specielle Beziehungen zweier Kegelschnitte	33
XIII	233—256	Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte	88	XIII	251—267	Die Methode des Unendlich-Kleinen*)	—

*) Ist in Auflage II das 14. Kapitel.

Dieses Lehrbuch dürfte besonders angehenden Mathematik-Studenten zu empfehlen sein, welche ihre auf dem Gymnasium (wo analytische oder Coordinaten-Geometrie verpönt ist) privatim oder auf der Realschule regulativmäfsig erworbenen Kenntnisse in diesem Wissenszweige erweitern und mit den neuen gangbaren Anschauungen und Methoden bereichern wollen. Es verbindet mit einem pädagogischen einen hohen wissenschaftlichen Wert. Denn es giebt dem Lernenden nicht nur Gelegenheit, die erlangten theoretischen Kenntnisse an vielfachen (auch in dieser Auflage vermehrten) Aufgaben zu erproben und einzuüben, sondern es führt auch in die neuen und neuesten Anschauungen auf dem Gebiete der neuern Geometrie ein. Aber auch fertigen Lehrern der Mathematik, welche auf der Hochschule diesem Zweige nicht so viel Zeit widmen konnten, möchte es zum Nachstudium und zur Nachübung zu empfehlen sein. Denn die Durcharbeitung desselben erfordert einen anhaltenden, Jahre lang andauernden Fleifs. Der Gebrauch des Buches wird wesentlich unterstützt durch ein genaues Inhaltsverzeichnis und durch eine Zusammenstellung von litterarischen Nachweisen (S. XII—XV). Noch mehr würde die Orientierung unterstützt werden, wenn Verf. dem 2. Teile ein alphabetisches Sachenregister beigeben wollte, wie er es denn auch im Vorwort verspricht. H.

Bardey, Dr. E. Quadratische Gleichungen. Mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. Zweite, vermehrte Aufl. Leipzig, Teubner, 1887. Preis 1,60 ℳ.

Diese besonders für Schüler bestimmte Aufgabensammlung enthält in dieser Auflage über 80 neue Aufgaben (mit einem Index an der Nummer bezeichnet); sie finden sich nur in der 3. Auflage der „Algebraischen Gleichungen“, welche 1883 erschienen ist. H.

Erler, Dr. W. (Prof. u. 1. Oberl. a. K. Pädagogium bei Züllichau). Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima. Dritte, verbesserte Aufl. (45 S.) mit 1 Text-Fig. Leipzig, Teubner, 1887.

Diese kleine Schrift, welche zuerst als Aufsatz in ds. Z. 1877 erschien und welche zeigte, wie man thatsächlich die Elemente der Kegelschnitte auf synthetischem Wege in höheren Schulen behandeln und zwar in verhältnismäfsig kurzer Zeit (21—25 St.) behandeln könne, erscheint hier als Separatabdruck in 3. verbesserter Auflage.*) Dies ist ein sicherer Beweis ihrer Brauchbarkeit um so

*) 2. Aufl. angezeigt in ds. Z. XIII, 44.

mehr, als seitdem derselbe Gegenstand von sehr tüchtigen Kräften (Buchbinder, Milinowski, Dronke) ebenfalls synthetisch behandelt worden ist. Damit der beabsichtigte Zweck erreicht werden könne, hat Verf. der Versuchung widerstanden, den Stoff durch Hinzufügung der harmonischen und polaren Eigenschaften zu erweitern. Dennoch ist die Auflage eine verbesserte zu nennen, da sie vielfache Berichtigungen und Erneuerungen enthält. Das Nähere hierüber besagt das Vorwort. Sie sei daher den Fachgenossen für den Schulgebrauch angelegentlich empfohlen. Ein dem Schriftchen angefügtes alphabet. Register würde den Gebrauch des Buches erleichtern. H.

LIEBER, Prof. Dr. H. (Oberl. a. Fried.-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin) und F. VON LÜHMANN (Oberl. a. Gymn. i. Königsberg i. d. N.). Geometrische Konstruktions-Aufgaben. Achte Aufl. Mit 1 Fig. i. T. Berlin, Verlag v. Simion, 1887. Preis 2,70 ℳ

Diese in ds. Z. mehrfach angezeigte*) und vielfach bewährte Aufgabensammlung erscheint abermals in neuer (achter) Auflage. Sie enthält einen neu hinzugekommenen vierten Anhang, welcher einfachere Lösungen früherer Aufgaben und interessante neue Aufgaben bringt. Weiter sei aufmerksam gemacht auf die neue einfachere und elegantere Auflösung der Aufgaben im II. Anhang Nr. 217 (S. 197), „ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel γ, der Summe der ihn einschliefsenden Seiten $a + b$ und der Höhe h_c zur dritten Seite". Diese Aufgabe ist hier mittels harmonischer Teilung gelöst und entschieden einfacher, als die §. 53, 1 gegebene, welche von Herrn v. Lühmann s. Z. mitgeteilt und von Binder (VI, 58) besprochen worden ist.

Es sei auch diese neue Auflage den Herren Fachlehrern angelegentlich empfohlen. H.

AUGUSTIN, C. H., Wegweiser für Käfersammler. Anleitung zum zweckmäfsigen Bestimmen der Käfer für Lehrer und Lernende. Zweite vermehrte und mit 360 Abb. bereicherte Auflage von Dr. Karl Wilh. Augustin, (natw. Lehrer am Wilhelms-Gymn. zu Hamburg). Hamburg. Otto Meifsner 1886. Preis 3 ℳ

Ein kleines handliches Käferbuch, das zwar vorzugsweise Norddeutschland und in erster Linie Hamburgs Umgegend im weiteren Sinn berücksichtigt, doch auch in anderen Gegenden Deutschlands noch mit Nutzen wird zu gebrauchen sein.

Die nach der analytischen Methode eingerichteten tabellarischen Übersichten, welche durch zahlreiche Abbildungen einzelner Körperteile und ganzer Käfer noch eher zum Ziele führen, setzen beim

*) I, 341; IX, 211; XI, 215 und XVIII, 118 (von Kiel).

Bestimmen ein sorgfältiges Vergleichen der Gegensätze, ein lebhaftes Auffassen der unterscheidenden Merkmale voraus. Hierdurch scheint die Methode besonders geeignet, dem Schüler das Interesse an der Käferwelt zu wecken und — was wichtiger ist — sein Unterscheidungsvermögen in hohem Grade auszubilden. Die Käfer sind ohne Zweifel diejenige Abteilung der Gliedertiere, die im zoologischen Unterricht das tiefste Eingehen verdient, und bei einer eingehenderen Behandlung derselben dürfte das vorliegende Buch einen guten Wegweiser abgeben. Die Zahl der behandelten Käferarten ist in dieser neuen Auflage (von 525) auf 1125 Arten gestiegen.

Greiz. LUDWIG.

MIK, JOS. Verzeichnis der Artennamen welche in Schiners Fauna Austriaca (Diptera Tom I et II) enthalten sind. Wien 1887. Pichlers Witwe.

Das Verzeichnis der Artennamen (die Gattungen sind weggelassen) zu dem Schinerschen synoptischen Hauptwerk über Diptera wird jedem, der sich eingehender mit der zierlichen und in entwicklungsgeschichtlicher Hinsicht, wie durch ihre Lebensweise so interessanten Zweiflüglern beschäftigt, erwünscht kommen. Auffallenderweise hatte das umfangreiche Hauptwerk, zu dem hier 11948 Nachweise gegeben werden, bisher kein Artenverzeichnis.

Greiz. LUDWIG.

LEGORJU, Julie, Der Handarbeits-Unterricht als Klassen-Unterricht. Leitfaden zur Erteilung eines gründlichen Handarbeits-Unterrichts in Schulen. 3. verb. u. verm. Aufl. Kassel 1881. Verlag von Th. Kay.

Es mag auffallend erscheinen, dafs wir hier ein Buch besprechen, welches doch für Mädchenschulen geschrieben ist. Doch dürfte diese Besprechung ihre Berechtigung darin finden, dafs der genannte Unterricht eine innige Verwandtschaft zum geometrischen und zum Zeichenunterricht aufweist; dies ergiebt sich aus einer An- und Durchsicht der beigegebenen XVI Tafeln. Wenn auch viele, vielleicht die meisten der auf diesen Tafeln enthaltenen Figuren in karrierte Netze eingezeichnet und nicht mit Zirkel konstruiert zu werden pflegen, so verlangt doch das Verständnis dieser mannichfachen Formen das vorausgegangene Verständnis der einfachsten geometr. Formen und ihrer Konstruktion. Angehende Handarbeits-Lehrerinnen, welche in der von ihnen (in der Regel wohl) besuchten höhern Mädchenschule geometrischen Unterricht genossen haben, werden sich um so leichter in die Erteilung dieses Handarbeitsunterrichts mittelst Zeichnen an der Wandtafel finden. H.

Entgegnung
auf die unter der Überschrift „Eine christliche Physik“ in Hft. 5, S. 387 ds. Jhgs. enthaltene Beurteilung des Buchs „Einführung in das Gebiet der Physik von Dr. Morgenstern.“

Vom Verfasser.

Ein Herr Y hat es unternommen, das angeführte Buch in dieser Zeitschrift zu beurteilen. Es ist das in einer Weise geschehen, dafs sich die Leser eine völlig verkehrte Ansicht über das besprochene Buch bilden müssen. Meine Freunde und Bekannten werden mir eine Arbeit wie Herr Y sie schildert, nicht zutrauen und mit Recht eine Erwiderung meinerseits erwarten.

Zunächst denn die einzelnen Ausstellungen des Herrn Y.

4. Auf den Satz: Alle Dinge fallen ..... zur Erde, folgen die Sätze:
Ihre Bewegung ist eine beschleunigte.
Die Fallhöhe in der 1. Sekunde beträgt 5 m.
Dann kommt jene Beschränkung. Warum werden diese Sätze übergangen, da doch ganz besonders ihretwegen die Beschränkung geboten ist?

7. Vor den angeführten Worten steht der Satz: Diese Kraft (Anziehungskraft der Erde) ist nicht nur die Ursache des freien Falles, sondern auch vieler anderer Erscheinungen und Vorgänge, die sehr verschiedenartig sind je nach der Art des Körpers und der vorliegenden Umstände. Sie wirkt anders ...... Wo ist da gesagt, dafs die Anziehungskraft der Erde in einem Falle eine andere wäre, als in einem andern. Wer wird das letzte Wort auf etwas anders beziehen, als auf die durch verschiedene Umstände verschiedenartigen Erscheinungen?

8. Den Ausdruck elastisch-flüssig habe ich aus nahe liegenden Gründen vorläufig ersetzt durch luftflüssig. (S. 40.) Dem entsprechend gebrauchte ich zur Bezeichnung unelastischer, tropfbarer Flüssigkeiten jenen Ausdruck wasserflüssig.

9. Diese Grenze bestimmen zu wollen, liegt gar nicht in meiner Absicht, weil es völlig wertlos sein würde.

10. Vermutlich lebte Herr Y von Jugend auf am Meere, sonst würde er unmöglich meinen können, dafs sein Beispiel für unsere Kinder im Binnenlande verständlicher wäre, als das von mir gegebene.

12. Schwerlich wird aufser Herrn Y jemand auf den Einfall kommen, dafs die Begriffe „Dichte der Masse“ und „Porosität“ sich decken sollten. Auch rein sprachlich gefafst ist dieses Mifsverständnis durch die Wiederholung der Worte „in der Verschiedenheit“ ausgeschlossen.

20. Wenn Herr Y den Zusammenhang, in welchem der Winkelhebel an der Rolle klar gemacht wird, genauer eingesehen hätte, so würde er wahrscheinlich anders urteilen.

21. Eine solche Ableitung setzt nicht viel Genialität voraus. Ich mache wenigstens keinen Anspruch auf Herrn Y's Anerkennung, vermute vielmehr, dafs schon vor mir mancher Lehrer sie einfach und zweckmäfsig gefunden und angewandt habe.

25. Ich frage zurück: Was für eine wundersame Vorstellung haben Sie, Herr Y, von der Veste? und wie ist es zu erklären, dafs Sie die im Buch gegebene Erläuterung, wonach die Veste der „Unterschied“, d. h. „die räumliche Trennung“ zwischen den Wassern ist, übersehen konnten?

27. Sind die Wurfbahnen verschiedener fester Körper einander gleich oder ähnlich? Ist die Bahn eines wagerecht geworfenen Steines der Bahn einer wagerecht abgeschossenen Flintenkugel etwa gleich? Wenn aber die Bahnen fester Körper einander nur ähnlich sind, so werden wir doch nicht allgemein sagen können, dafs die Bahn der betreffenden Wasser-

strahlen den Wurfbahnen fester Körper gleich seien. Die Gleichheit der Bahnen setzt Bedingungen voraus, die ich nicht gemacht habe und nicht machen wollte.

34. Abermals eine solche Entstellung wie in 4, 5 und 25; denn unmittelbar nach den angeführten Worten folgt ein

„V. (Versuch.) Wir können leicht seine äufsersten Grenzen erfahren . . . . .“ und dann das

„E. (Ergebnis.) Der Auftrieb erreicht seinen höchsten Wert, sobald der eintauchende Körper völlig vom Wasser bedeckt ist.“

Die Abhängigkeit der Schwere von der geographischen Breite hier zu besprechen wäre ohne Frage thöricht.

35. Herr Y sieht in den angeführten Dingen einen Widerspruch. Offenbar ist ihm im Augenblick nicht klar geworden, dafs das Schweben der Fische durch besondere Umstände bedingt ist. (Siehe Seite 36, Absatz 3.)

37. Die Branntweinwage ist, wenn es sich um praktische Verwendung handelte, für „höhere Töchter“ allerdings entbehrlich. Sie ist hier — das wird schwerlich ein Lehrer verkennen — aufgenommen, weil sie unter allen Senkwagen die einfachste ist, und das Verständnis aller andern vorbereitet.

41. Herr Y ist jedenfalls kein Volksschullehrer. Er hat deshalb auch kein Verständnis für meine Arbeit überhaupt und keine Anerkennung für mein Bestreben, möglichst billige Werkzeuge herzustellen.

Seinen Rat bezüglich der Anfertigung solcher Wagen werde ich in Erwägung ziehen, wenn ich erfahren mufs, dafs jenen Lehrern, denen ich in erster Linie mit meinem Büchlein dienen wollte, das Verständnis für meine Arbeit in gleicher Weise fehlt, wie dem Herrn Y.

43. Den Ausdruck „prefsbar“ versteht Herr Y offenbar nicht richtig. Wir andern Leute verstehen darunter die Eigenschaft, unter Einwirkung eines Druckes einen kleinern Raum einzunehmen. Ein Stück Zucker kann wohl gedrückt, aber nicht geprefst werden.

54. Hier hat Herr Y recht! — Der im Buche gebrauchte Ausdruck ist unrichtig. Die Beobachtung, ob das Quecksilber ein Näpfchen oder eine Kuppe bildet, mufs vor dem Anklopfen geschehen. Durch letzteres bemerken wir, ob Neigung zum Fallen oder Steigen vorliegt.

61. Nach der Ausstellung des Herrn Y sollte man ja meinen, dafs die betreffende Einleitung recht einfältig wäre. Seine Ausstellung ist aber eine Entstellung wider besseres Wissen.

63. „Simmern“ nennt man bei uns das Geräusch, das dem Sieden des Wassers vorhergeht.

67. Die Telegraphenstange mit ihrer festen Stellung in der Erde und der Stütze durch den gespannten Draht ist doch wohl verschieden von einer Fahnenstange. Dafs der Wind wesentlich durch Vermittelung des Drahtes die Säule in Schwingungen versetzt, das konnte hier unerörtert bleiben. Da die Schwingungen der Säule denen des Drahtes entsprechen, so mufs auch die Säule tönen. Dies allein kommt an dieser Stelle in Betracht.

88. Hat Herr Y nicht erkennen können, welche Farbe aus Versehen vergessen ist, obwohl in jedem hier aufgeführten Versuche (Fig. 44—49) alle sieben Farben aufgezählt werden?

94. Diese Erklärung zu geben, lag nicht in meiner Absicht. Der von Herrn Y vermutete Grund trifft nicht zu.

100. Hier kommt es mir nur darauf an, das allgemeine Gesetz festzustellen, wie es sich aus dem vorausgehenden Versuche ergeben hat. — Was Herr Y vermifst, wird von mir, wenn ich es behandeln will, durch einen Versuch festgestellt. Dieser Versuch gehört nicht hierher.

118. Hier hat Herr Y entschieden das Verdienst einer hochwichtigen Verbesserung: denn statt „Streichen“ mufs wirklich „Berührung“ gesetzt werden.

Übrigens unterscheide ich „das Stahl" und „der Stahl". Thut Herr Y das nicht? Hier ist im Gegensatz zum Eisen das Stahl zu erwähnen; denn hier handelt es sich um den Stoff an sich.

115. Möge doch Herr Y die Stelle gütigst noch einmal lesen. Vielleicht findet er dann, dafs die mir untergeschobene Meinung hier nicht vorliegt.

Die Art, wie Herr Y im Nachfolgenden meine Darlegung kurzweg „Unsinn" nennt, charakterisiert seine Kritik sehr treffend.

Hat Herr Y etwa in der Sache recht? Er ist ja derselben so gewifs! Keineswegs; denn

1. wenn man mit einem Magnete einer freischwebenden Nadel, die nicht magnetisch ist, nahe kommt, so wird sie angezogen.

2. Wenn die Nadel magnetisch ist, wird Anziehung erfolgen, falls der genäherte Pol des Magnetes dem nahen Pole der Nadel ungleich ist.

3. Selbst zwischen gleichnamigen Polen kann eine Anziehung stattfinden, wenn der Magnetismus der schwebenden Nadel sehr gering ist und der betreffende Versuch nicht vorsichtig genug ausgeführt wird.

Diese Umstände müssen Herrn Y als einem Lehrer der Physik ja bekannt sein; und er wird darnach doch zugeben müssen, dafs die Anziehung zwischen der Nadel und dem Magneten einen Schlufs auf die Beschaffenheit der Nadel nicht zuläfst.

Findet dagegen Abstofsung statt, so ist jeder Zweifel bezüglich der Beschaffenheit der Nadel ausgeschlossen.

117. Der Zusammenhang zeigt, dafs hier nicht von einer im Buche gezeichneten Figur die Rede ist, sondern von dem Bilde, welches im Versuch durch das Aufstreuen von Eisenstaub sich gebildet hat.

121. Herr Y wird dergleichen geistreiche Parallelen gewifs nicht aufstellen. Aber warum will er mir das Vergnügen nicht gönnen?

127. Der Ausdruck könnte besser sein. Unmittelbar vorher ist von Glaselektricität die Rede. Im Gegensatz dazu im folgenden Satze von der Siegellackelektricität. Aus Versehen steht nur das Wort Siegellack. — Gleicherweise lasse ich Herrn Y den Ruhm, mich bezüglich des Stanniols (133) berichtigt zu haben.

133. Auch Herr Y dürfte dreist „das" Elektrophor sagen und könnte sich dabei berufen auf den Physiker Eisenlohr, wie auch auf andere Abweichungen vom ursprünglichen Geschlecht eines Fremdwortes. Man vergleiche Meter, Thermometer. Bezüglich der Isolierung wird Herr Y vielleicht zugeben, dafs der Deckel zum Schutz mit Firnis überzogen wird, und dafs dieser gleichzeitig eine Isolierungsschicht bildet. Vielleicht giebt Herr Y auch zu, dafs ein nicht gefirnister Deckel an den Stellen, wo er unmittelbar den Kuchen berührt, notwendig seine Elektricität verliert, dafs deshalb ein Firnisüberzug auch der Isolierung wegen wünschenswert ist.

136. Wenn es wünschenswert ist, auch durch Verständnis der Natur den Aberglauben zu bekämpfen, so ist es verwunderlich, dafs Herr Y an der Anführung des alten Spruches Anstofs nimmt. Er vermifst freilich meine eigene Ansicht, obwohl er dieselbe in dem nachstehenden Worte selbst anführt, wie mein Buch sie giebt.

146. Die Beziehung der Ablenkung auf einen Pol würde Herr Y gefunden haben, wenn er die daneben stehende Figur, auf welche sich die Erklärung bezieht, beachtet hätte.

151. Warum ich das telegraphische Alphabet aufgeführt habe? Darüber giebt die Bemerkung unter IV (Seite 151) Aufschlufs.

Und nun zum Schlufs noch ein Wort an Sie selbst, Herr Y. Sie klagen sich an, nachlässig gewesen zu sein in der Auswahl der Anführungen. Jeder Leser Ihrer Beurteilungen wird dem zustimmen. Es ist aber gut, dafs Sie es selbst fühlen; dafs Sie es als Anklage fühlen und aussprechen; denn ohne diese Ihre eigene Anklage würde jeder Leser Sie ganz anderer Dinge beschuldigen; nämlich

1. der Entstellung und Fälschung des Textes durch Auslassungen: 4, 5, 25, 34, 61, 136; durch mutwillige Mifsdeutungen: 7, 12, 115ª; durch wissentliche Verschweigung der zum Verständnis nötigen Verhältnisse: 88, 151;

2. unverzeihlicher Unaufmerksamkeit und Mangels an pädagogischem und sachlichem Urteil: 117, 136, 146 — 10, 20, 21, 34 — 25, 27, 35, 37, 43, 115ᵇ.

Auch bei den Punkten 8, 9, 100, 113ᵇ, 121, 133ª fehlt jede Berechtigung eines Tadels.

Die Ausstellungen 37, 41, 63, 94, 136 finden ihre einzige Begründung in dem Bedürfnis, einen — freilich sehr schwachen — Witz zu machen.

Berechtigt sind nur die Ausstellungen 54, 113ª, 127, 133ᵇ. Von diesen ist nur die erstere eine physikalische Unrichtigkeit.

Was Ihre Einleitung betrifft, so richtet sich die Art Ihres Verfahrens selbst. Die Überschrift schon ist eine Unwahrheit, wie die ganze Darstellung eine Entstellung meiner Arbeit und — noch etwas Schlimmeres. Wer wird hier, oder in der Bemerkung zu 61 das wiedererkennen, was ich geschrieben habe? Wer sich die Mühe giebt, beides zu vergleichen, der wird erkennen, wie gewissenhaft Sie zu Werke gegangen. Doch nein, die Schuld an dieser Entstellung trägt ja nach ihrer eigenen Anklage Ihre Nachlässigkeit.

Dürfte ich Ihnen einen Rat geben, so wäre es dieser: Gehen Sie bei Ihren schriftlichen Arbeiten der Bibel möglichst aus dem Wege; denn Ihre Hindeutungen auf dieselbe verraten einen solchen Mangel an Verständnis, dafs dadurch die Würdigung Ihrer Arbeit überhaupt gefährdet wird.

Aus einem Beispiele mögen Sie übrigens ersehen, dafs andere Leser die Absicht, welche mich zu den Einleitungen veranlafste, besser zu schätzen wufsten.

Der „Würtemberger Lehrerbote" sagt: „Dafs jedem Hauptteil ein Bibelspruch voransteht, ist ein lobenswertes Zeugnis gegenüber einer gottentfremdeten Wissenschaft und zeugt zugleich von dem Streben, auch den Unterricht in der Physik religiös und sittlich anregend zu gestalten und in der Erkenntnis Gottes die höchste Einheit alles Unterrichts festzuhalten."

Für die methodische Behandlung des Stoffes, für die so wichtige und schwierige Beschränkung, für die Einfachheit der Versuche, für die den Schülern gebotene Hülfe zu sicherer Aneignung, kurz für die Arbeit im ganzen wie im einzelnen ist bei Ihnen ein Verständnis nicht vorhanden, was ich um Ihretwillen und noch mehr um Ihrer Schüler willen bedauere.

Göttingen, im August 1887. Dr. Morgenstern.

Bemerkungen des Rezensenten zu der vorstehenden Erwiderung des Herrn Morgenstern.

Ich bin in der Lage mich den Entgegnungen des Herrn M. gegenüber sehr kurz fassen zu können; denn sie gehen grofsenteils darauf hinaus, die von mir herausgehobenen Inkorrektheiten und missverständlichen Ausdrücke durch Hinweis auf benachbarte Stellen des Buches zu retten und zu zeigen, dafs doch das Richtige gemeint sei.

Was Herr M. in den einzelnen Fällen gemeint hat, das wird sich jeder Physiker unschwer selbst denken können, es ist nur zu bedauern, dass Herr M. es eben in seinem Buche so und so oft nicht von vorn herein in präciser Weise gesagt hat. Herr M. will aber sein Buch den Volksschullehrern und Mittelschullehrern als eine Musterleistung im physikalischen Unterricht widmen, bei denen die Beschäftigung mit diesen Dingen sehr in den Hintergrund tritt, und da wäre meines Erachtens überall die peinlichste Sorgfalt im Ausdruck, welche jedes Mifs-

verständnis ausschliefst, am Platze gewesen. Im einzelnen als Belege noch ein paar Bemerkungen:

Zu **27.** Die Wurfbahnen fester Körper sind im allgemeinen natürlich nur ähnlich, denn sie sind abgesehen vom Luftwiderstande sämtlich Parabeln, (deren Gleichung $y^2 = 2px$ eben nur von einem variablen Parameter abhängt) und gerade so verhält es sich im einzelnen mit den Wurfbahnen von Wassermassen. Davon ist hier aber gar nicht die Rede, sondern es werden allgemein Wurfbahnen fester Körper und Wurfbahnen von Wassermassen (die doch vielleicht jemand a priori als ganz unvergleichbar ansehen könnte) gegenüber gestellt.

Da mufste also konstatiert werden: Die Gestalt von (sc. sämtlichen möglichen) Wasserstrahlen ist gleich der von Wurfbahnen fester Körper.

Zu **115.** Herr M. ficht mit Windmühlen, er hat das *punctum saliens* gar nicht gemerkt. Die Erörterungen, welche Herr M. im vorstehenden Artikel mit überflüssiger Breite anführt, erhalten einen gewissen Sinn, sobald das besprochene Verfahren zur Erkennung von permanenten Magnetismus in einem Körper angewendet wird.

Herr M. will es aber in seinem Buche als Beweis (cf. Ergebnis pag. 121: Ein sicherer Beweis, dass freie magnetische Kraft vorhanden sei u. s. w.) für das Vorhandensein von freiem Magnetismus überhaupt anwenden, der also auch im weichen Eisen (in dem er vorher als gebunden angenommen wird) bei Näherung eines Magnetes auftritt; hier ist doch aber gerade die Thatsache der Anziehung der einfachste Beweis, dass im Eisen eine Scheidung der magnetischen Fluida (die Theorie der drehbaren Molekularmagnete wird von Herrn M. nicht berührt) eingetreten ist, denn ein Magnet zieht nur Magnete an (hier abgesehen von den Solenoiden u. s. w.). Mit einem Wort: Herr M. vermengt die Begriffe „freier und gebundener" und „permanenter und temporärer" Magnetismus.

Zu **146.** Die ganz inkorrekte Formulierung des Gesetzes bezieht sich durchaus nicht auf eine nebenstehende Figur, wie Herr M. seine Leser glauben machen will, vielmehr bildet sie ein abschliefsendes „Ergebnis", welches den Kindern in dieser Form vom Lehrer diktiert werden soll (cf. Einleitung pag. VII).

Im übrigen kann ich es dem Urteile der Fachgenossen überlassen, in wie weit es Herrn M. geglückt sein sollte mit seiner Erwiderung meine Ausstellungen zu reduzieren; man wird sich besonders leicht überzeugen, dass die im Interesse der Druckerschwärze, wenn auch nur selten, angewandten Auslassungen den Sinn in keiner Weise verändern.

Soweit über die sachlichen Fragen. Was die persönlichen Ausfälle des Herrn M. betrifft, so mufs ich bedauern, ihm auf diesem Wege nicht folgen zu können, da ein Verkehrston, wie ihn Herr Direktor Dr. Morgenstern anzuschlagen beliebt hat, in den Kreisen, denen ich angehöre, nicht hergebracht ist. Y.

NB. Wir haben die streitenden Parteien ausreden lassen und können die Entscheidung getrost den Lesern überlassen. Nur eine Bemerkung dürfen wir nicht unterdrücken. Tief müssen wir bedauern, dafs der Verfasser der Entgegnung die Autorität einer Zeitschrift vom Gewicht des „Würtemberger Lehrerboten" anruft, der sich nicht scheut, die Physik, an die so viele gottbegnadete Männer (auch am Berufsort des Verf., wie Gaufs und Weber) ihre ganze Lebenskraft gesetzt haben, als „gottentfremdete Wissenschaft" zu brandmarken. Eine so ungerechtfertigte Anschuldigung kehrt das giftige Geschofs mit unwiderstehlicher Gewalt auf den Schützen zurück. D. Red.

B. Programmschau.

Mathematische und physikalische Programme der thüringischen Staaten.

(Schuljahr 1886—1887.)

Referent: Dr. E. Kirchner (ordentl. Lehrer am Real.-G.) in Meiningen.

1. **Frankenhausen.** Realprogymnasium. Nr. 661. Dr. Otto Waltenhöfer, *Über die Gestalt der Schwingungskurven, welche durch das Zusammenwirken zweier unter einem Winkel von 90° erfolgenden hin- und hergehenden Bewegungen mit ungleichen Schwingungsanfängen entstehen.* 32 S. 1 Tafel.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, einen Teil der Schwingungskurven, welche Lissajous und Melde in seiner „Lehre von den Schwingungskurven" Leipzig 1864 nur auf optisch-mechanische Weise dargestellt haben, auf mathem. Wege zu bestimmen und glaubt, daſs dies nicht überflüssig sei, weil die Schwingungskurven durch ihre Anwendung zur Messung der Geschwindigkeit des elektrischen Stromes in Leitungsdrähten eine besondere Beachtung erlangt haben.

An der Spitze der Abhandlung befindet sich die Ableitung des Bewegungsgesetzes eines Punktes, dessen Beschleunigung fortwährend nach einem festen Centrum hingerichtet und der Entfernung des bewegten Punktes von demselben proportional ist. Die Herleitung dieses Gesetzes, welche nach der Meinung des Ref. unterbleiben konnte, da dieselbe in jedem Lehrbuche der analytischen Mechanik enthalten ist, bildet die schwache Seite der in ihren Resultaten beachtenswerten Abhandlung. Sätze wie: „Setzten wir in die Gleichgewichtslage den Nullpunkt des Raumes, so ist die Bewegung nach der einen Seite hin durch eine positive, nach der anderen durch eine negative Gröſse auszudrücken. Bei jeder geradlinigen Bewegung giebt aber der erste Differentialquotient von Raum und Zeit die Geschwindigkeit, der zweite die Beschleunigung der Bewegung, oder im vorliegenden Falle die Kraft an. Der erste Differentialquotient von Geschwindigkeit und Zeit als Ausdruck für die Kraft etc." hätten vermieden werden sollen. Nachahmenswert dürfte wohl kaum auch die Wendung sein: „Das Integral $t = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}$ kann nach Belieben im cos oder sin ausgedrückt werden." Auſser vielen Druckfehlern — in Gleichung (7) finden sich allein 4 — wirkt recht störend das Versehen, welches der Verf. bei der Herleitung der Oscillationsbewegung auf der Y-Achse sich hat zu schulden kommen lassen, indem er der Gleichung $y = r_1 \sin \frac{2\pi}{T_1} t$ nur für den Fall Gültigkeit zuschreibt, daſs der Nullpunkt der Zeit in die gröſste Ausweichung der Bewegung fällt, während bekanntlich die obige Gleichung zur Voraussetzung hat, daſs für $y = 0$ auch $t = 0$ wird. Zu billigen ist auch nicht, wenn von der Gleichung $y = r_1 \sin \frac{2\pi}{T_1} t$ gesagt wird: Der Ausdruck wird jedem Falle angepaſst, wenn wir für den Anfangspunkt der Schwingung die beliebige Zeit $\pm \alpha$ setzen, wodurch als allgemeine Formel entsteht:

$$y = r_1 \sin \frac{2\pi}{T_1} (t \pm \alpha).$$

Nachdem der Verf. die auf den Achsen erfolgenden Bewegungen, durch $x = r \cos \frac{2\pi}{T} t$ und $y = r_1 \sin \frac{2\pi}{T_1} (t \pm \alpha)$ charakterisiert hat, leitet er

aus diesen Bewegungsgesetzen die Gleichung

$$y = r_1 \sin\left[\frac{T}{T_1}\arccos\frac{x}{r} + \frac{2\pi}{T_1}\alpha\right]$$

ab, welche er unter Benutzung der Beziehungen

$$\sin mx = \cos x\left[\frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-2^2)}{3!}\sin^3 x + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{5!}\sin^5 x - \cdots\right]$$

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1\cdot 2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}\sin^4 x - \cdots$$

für gerade m und

$$\sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{3!}\sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\sin^5 x - \cdots$$

$$\cos mx = \cos x\left[1 - \frac{m^2-1^2}{1\cdot 2}\sin^2 x + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{4!}\sin^4 x - \cdots\right]$$

für ungerade m einer eingehenden Diskussion unterwirft für die Fälle, daſs $\frac{T}{T_1} = 2$, $\frac{T}{T_1} = 3$, $\frac{T}{T_1} = 4$ und $\frac{T}{T_1} = \frac{3}{2}$ wird und dabei verschiedene Phasendifferenzen auftreten. Die Untersuchung ergiebt, daſs die Gattung der Schwingungskurven durch das Verhältnis von r und r_1 nicht beeinfluſst wird, wohl aber die letzteren von der Schwingungsdauer und der Phasendifferenz der Teilschwingungen abhängen. Die für $\frac{T}{T_1} = 2$, $\frac{T}{T_1} = 3$ und $\frac{T}{T_1} = \frac{3}{2}$ mathematisch bestimmten Kurven stimmen mit denjenigen der Tafeln II und III des Lehrbuches der Physik und Meteorologie von Dr. Joh. Müller*) überein, nur bedürfen infolge des oben erwähnten Irrtums die den Berechnungen zu Grunde gelegten Phasendifferenzen einer Korrektur.

2. Hildburghausen. Gymnasium. Nr. 650. Professor Dr. K. G. Hunger, *Mitteilungen über eine handschriftliche Cofs und die damit verbundene Aufgabensammlung, mit zwei lithographierten Tafeln. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra.* 28 S.

Unter den Büchern, welche aus der vormaligen sogenannten Schloſsbibliothek der Stadt Hildburghausen an das dortige Gymnasium abgegeben worden sind, hat Prof. Hunger ein handschriftliches algebraisches Werk in 3 Oktavbänden vorgefunden, dessen Titelblatt fehlt, so daſs der Name des Verfassers sowie die Zeit der Abfassung nicht genau festgestellt werden konnten. Das Werk ist mit groſser Sorgfalt in deutscher Kurrentschrift

*) Dem Verfasser scheint unbekannt gewesen zu sein, daſs die für $\frac{T}{T_1} = 2$ sich ergebenden Kurven im Lehrbuche der Experimentalphysik von Dr. A. Wüllner auf S. 490 u. ff., ferner im mathematischen Supplementband zum Grundriſs der Physik und Meteorologie von Dr. Joh. Müller (3. Aufl.) auf S. 133 u. ff. mathematisch abgeleitet sind; desgleichen im Handbuche der theoretischen Physik von Thomson und Tait, im I. Bd. S. 54. Ref. erlaubt sich bei dieser Gelegenheit auf eine Ungenauigkeit, die sich in manchem guten Lehrbuche der Physik vorfindet, hinzuweisen. So heiſst es z. B. in Dr. Paul Reis' Lehrbuch der Physik (5. Aufl.) S. 301: „Ist eine Gabel die Oktave der andern, so entsteht, wenn der Grundton der Oktave um $^1/_4$ seiner Schwingungsdauer voraus ist, nicht eine gerade Linie, sondern eine Parabel.“ Hierbei ist auſser Acht gelassen, daſs dies nur dann zutreffend ist, wenn der Ausgangspunkt der Bewegung in die Gleichgewichtsstellung verlegt wird; wird dagegen die Zeit von der gröſsten seitlichen Ausweichung an gerechnet, so beschreibt ein von beiden Wellen erfaſster Punkt bei der Phasendifferenz Null eine parabolische Bahn.

nach sächsischem Duktus geschrieben und kann frühestens Ende des 17. Jahrhunderts abgefaſst sein, da an einer Stelle auf ein Werk des französischen Mathematikers Fr. Blondel *„Cours de mathematiques“* Bezug genommen wird, das erst 1685 in Paris erschienen ist.

Prof. Hunger verbreitet sich in seiner Abhandlung zunächst über Gegenstand und Plan des Werkes und giebt geschichtliche Notizen über die Bezeichnung „Regula Coss“, indem er sich hierbei auf seine Abhandlung über die arithmetische Terminologie der Griechen, im Osterprogramm des Gymnasiums 1874, bezieht. In der Handschrift wird Algebra gleichbedeutend mit Regula Coss gebraucht, während das in deutscher Sprache verfaſste algebraische Werk von Christoff Rudolff von Jauer und die späteren von Stifel mit Erweiterungen versehenen Ausgaben den Namen Algebra noch nicht kennen. Schon in der Einleitung heiſst es: „Die Regul Coss oder Algebra lehret, wie man Alles, was im Rechnen und mathematischer Kunst findbar ist, auf sonderbahre künstliche Art berechnen und finden soll“ und ihre Stellung wird durch folgende Verse gekennzeichnet:

„Gleichwie die Tulipa, die wunderschöne Blum,
An buntgefärbter Pracht vor andern hat den Ruhm,
Ja wie der Adeler vor andern steigt empor:
So geht die Regul Coſs im Rechnen andern vor.“

Die Besprechung des 300 Seiten umfassenden ersten Bandes bildet den hauptsächlichen Inhalt der Abhandlung. Besonders wird dasjenige hervorgehoben, welches die jetzige Auffassung der Algebra gegenüber dem Standpunkte der algebraischen Wissenschaft zur Zeit der Abfassung der Coſs charakterisiert. Zuerst werden abgehandelt die cossischen Zahlen und deren Zeichen. Tafel I giebt uns die Namen und Zeichen der aus der Radix R hervorgehenden cossischen Zahlen: x^2, x^3, x^4 ... bis x^{15}. Die Bezeichnung Potenz und Exponent kennt die Coſs noch nicht. Als Koefficienten treten im ganzen Buche immer nur bestimmte Zahlen auf. Es folgen dann die vier Grundoperationen mit cossischen Zahlen. Als Zeichen für plus und minus werden in der Coſs $+$ und $\div$ gebraucht. Den Namen Summand, Minuend, Subtrahend begegnet man nicht, für Summe und Rest (Differenz kommt nicht vor) wird gewöhnlich Collect und Relict gesetzt, dagegen zeigen sich die Namen Multiplikand, Multiplikator, Produkt, Divident(!), Divisor, Quotient vollkommen eingebürgert. Die Multiplikation ist dieselbe, wie die jetzt übliche, dagegen wird die Division in einer von der jetzigen ganz abweichenden Weise ausgeführt. Die dem Rechenbüchlein von Adam Riese entnommenen Divisionsregeln, welche die Coſs als bekannt voraussetzt, sucht der Verf. durch die beigefügten Schemata einer aufgehenden und einer nicht aufgehenden Division mit gemeinen Zahlen und einer cossischen Division zu erläutern. Leider sind diese Regeln nicht in einer leicht verständlichen Darstellung gegeben, und auch die abgedruckten Schemata erfüllen ihren Zweck, das Gesagte verständlicher zu machen, nicht. Nach der Darlegung der Grundoperationen mit den cossischen Zahlen läſst der Verf. die Wurzelausziehung folgen. Eigentümlich ist die hier vorkommende Bezeichnung einer auszuführenden Wurzelausziehung. Es wird vor dem Radikanden das Zeichen $\sqrt{aa}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^4}$ u. s. w. gesetzt, je nachdem die Quadrat-, Kubik-, Biquadratwurzel u. s. w. ausgezogen werden soll. So wird die Biquadratwurzel aus 18 mit $\sqrt{a^4} \cdot 18$ bezeichnet. Sodann wird die Rechnung mit den surdischen, binomischen und surdbinomischen Algorithmen erörtert und festgestellt, daſs die Coſs die Bezeichnung Binomium nur für die Verbindung zweier surdischen Zahlen oder einer solchen und einer ledigen Zahl und nicht wie jetzt für jeden zweigliederigen Ausdruck gebraucht. „Weil auch von Polygonal- und dergleichen Zahlen bei der Regula Coſs insgemein zu handeln fürfällt“,

so wird noch eine umfangreiche Behandlung der Polygonalzahlen der Aufgabensammlung des 2. und 3. Bandes vorausgeschickt. Wir finden da behandelt die gewöhnlichen Polygonalzahlen, die Polygonalcentralzahlen (vieleckte Mittelpunktszahlen), die Rechtecks- und Centralrechteckszahlen, welche vier Arten von Zahlen Flächenzahlen heifsen, weil sie ebene Flächen darstellen. (Auf Tafel II giebt der Verf. die den Zahlenreihen entsprechenden Figuren.) Den Flächenzahlen folgen die Kubikzahlen. Den Schlufs der Theorie der Polygonalzahlen bildet die Summierung der Quadrat- und der Kubikzahlen. Die Regel der Summierung findet sich nicht abgeleitet. Dies der Inhalt des ersten Teils. Der zweite Teil umfafst das ganze Gebiet der Gleichungen ersten Grades und der dritte Teil die Quadratcofs, also die Gleichungen zweiten Grades, bei deren Lösungen die Cossisten die negativen Resultate unberücksichtigt gelassen haben. Der Verf. teilt zum Schlufs einige Beispiele aus der gemeinen und der Quadratcofs mit und bedauert, dafs er wegen Mangels an Raum keine gröfsere Auswahl hat treffen können, da diese in verschiedener Beziehung für die damalige Zeit als Kulturbild dienen könnte.

8. Meiningen. Herzogl. Realgymnasium. Nr. 652. Realgymnasiallehrer Dr. Kircher, ***Ein Beitrag zur Bewegung unveränderlicher ebener Systeme, dargestellt nach den Principien der Grafsmannschen Ausdehnungslehre.*** 32 S. 2 Tafeln.

Noch kurz vor seinem Tode veröffentlichte Prof. Hermann Grafsmann einen Aufsatz: „Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre“ (Math. Annalen XII. Bd. 2. Heft) und bekannte sich in demselben zu der Ansicht, dafs die neueren Lehrbücher und Aufsätze über Mechanik ihn überzeugt hätten, dafs auch heute noch die Darstellung der Methoden, welche sich auf den Principien seiner Ausdehnungslehre aufbauen, ebenso förderlich sein werde, als sie es vor 37 Jahren gewesen wäre, wenn er damals zu ihrer Veröffentlichung Zeit und Gelegenheit gefunden hätte. In der geometrischen Bewegungslehre wird dargelegt, wie die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems definiert werden kann als das Rollen einer bestimmten Kurve Γ (Rolllinie) des beweglichen Systems auf einer bestimmten Kurve C (Leitlinie) der festen Ebene, indem hierbei die Punkte der Kurve C, die in der festen Ebene die Ortslinie der Momentancentra bilden, successive Centra der Drehung werden. Gleichwie Schell in seiner Abhandlung: „Über den Beschleunigungszustand des ebenen unveränderlichen, in der Ebene beweglichen Systems“ (Schlömilchs Zeitschr. für Math. Bd. XIX, S. 185 u. ff.), bestimmte Prof. Abbe (Jena), dessen Vorlesungen über Mechanik fester Körper dem Verf. Veranlassung gegeben haben, sich mit den Anschauungsweisen der Grafsmannschen Ausdehnungslehre bekannt zu machen, die Veränderung des augenblicklichen Bewegungszustandes eines ebenen Systems auch mittelst einer nach Lage der Achse und Winkelmafs der Beschleunigung, definierten Drehungsbeschleunigung, fafste dann aber die Beschleunigung eines Systempunktes gemäfs der Grafsmannschen Betrachtungsweise nach Lage und Gröfse als den geometrischen Unterschied zweier auf einander folgenden unendlich kleinen Rotationen auf. Diese Bestimmung des Beschleunigungszustandes der Systempunkte führte ihn auf Bewegungsgleichungen, welche interessante Anwendungen zulassen, namentlich da, wo ein Körper auf einem anderen so dahinrollt, dafs die Bahnen aller Punkte einer gegebenen Ebene parallel sind. Verf. beginnt mit der Aufstellung dieser Gleichungen unter Benutzung der einschlägigen Litteratur und zeigt dann, wie mit ihrer Hülfe die Lösung einer Reihe von Problemen — die Rollbewegungen eines homogenen Cylinders und eines Cylinders mit excentrisch liegendem Schwerpunkte auf der schiefen Ebene und in Rinnen von cylinderförmigen Konturen u. a. — eleganter und übersichtlicher sich gestaltet, als sie an der Hand der Eulerschen Bewegungsgleichungen gegeben werden kann. Um

auch solchen Kollegen verständlich zu sein, denen die Grafsmannschen Anschauungen fremd sind, entwickelt der Verf. zunächst die Gesetze der geometrischen Addition und Subtraktion und der äufseren Multiplikation von Strecken, giebt sodann ihre Anwendung auf die Bildung von Momentensummen und die Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung in der allgemeinen Fassung, der zufolge der Begriff der krummlinigen Bewegung sich unmittelbar erschliefst und nicht, wie sonst, durch Einführung willkürlicher Koordinaten, die mit der Sache nichts zu schaffen haben, verdunkelt wird.

4. Saalfeld. Herzogliches Realgymnasium. Nr. 653. Realgymnasiallehrer Dr. B. Trognitz, *Die mathematische Methode in Descartes' philosophischem Systeme.* 16 S.

In Heft I des 17. Jahrganges dieser Zeitschrift findet sich aus der Zeitschrift „Die Nation“ ein Aufsatz von Kurd Lasswitz abgedruckt, welcher die analytische Methode des René Descartes zum wesentlichen Inhalte hat. Der Verf. dieser Abhandlung hat sich die gleiche Aufgabe gestellt: darzulegen, wie Descartes in den verschiedenen Gebieten des menschlichen Wissens seine Methode angewendet hat, um zu einwandsfreien Resultaten zu gelangen. Die Ausführung erfolgt dem Charakter einer wissenschaftlichen Abhandlung entsprechend hier auf einer breiteren Grundlage. Die Anordnung des Stoffes, die klare Sprache und die treue Wiedergabe der Descartesschen Ideen legen Zeugnis davon ab, dafs der Verfasser sich der gestellten Aufgabe mit Liebe unterzogen hat. Zur schärferen Charakteristik der Descartesschen Denkweise werden des öfteren die eignen Worte des Philosophen vorteilhaft verwendet.

Der Verfasser schildert eingangs in warmen Worten die Vorzüge der Mathematik vor den übrigen Wissenschaften und beantwortet die Frage, wie Descartes dazu kam, die Mathematik als diejenige Grundlage hinzustellen, auf welcher allein ein sicheres Gebäude der Philosophie sich errichten lasse. Sodann folgt eine zutreffende Charakteristik der mathematischen Analysis und Synthesis, wobei besonders hervorgehoben wird, dafs die Analysis kausal verfährt, die Wirkungen aus den Ursachen hervorgehen läfst und im Anschlufs hieran wird auf das unsterbliche Verdienst des Descartes hingewiesen, welches sich derselbe durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, einer neuen Methode, welche *Chasles proles sine matre creata* nennen konnte, erworben hat. Wie die Mathematik von den einfachsten Sätzen, den Axiomen, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet, ausgeht und so auf einem sicheren Grunde den stolzen Bau ihrer unanfechtbaren Lehren aufführt, so geht Descartes auch beim Aufbau seiner Philosophie von der Intuition aus, einer Einsicht, welche durch keine frühere vermittelt, durch keine Schlufsfolgerung gewonnen wird, sondern eine im Lichte der Vernunft vollkommen klare Anschauung ist. Die Erkenntnis ist nach ihm synthetischer Natur, aber die Ableitung aller Wahrheiten aus einer vollkommen klaren und zweifellosen deduktiv. Als oberster Grundsatz bei der Erforschung der Wahrheit gilt, die zusammengesetzten Dinge in ihre einfachsten Teile zu zerlegen, weil nur diese deutlich eingesehen werden können.

Nach dieser einleitenden Charakteristik der mathematischen Methode unseres Philosophen zeigt nun der Verfasser, wie derselbe bei der Aufstellung seiner drei Principien mathematisch verfährt. Sein *„Cogito ergo sum“* wird übersetzt: „Ich habe Bewufstsein, also bin ich“ und dieser archimedische Stützpunkt seiner Philosophie wird mit dem neuen festen Koordinatensystem verglichen, auf ihn beziehen sich alle philosophischen Untersuchungen. Der Satz *„Cogito ergo sum“* ist ein axiomatischer Satz, er ist intuitiv gewifs und daraus folgt als Princip der Gewifsheit, dafs alles, was sehr klar und deutlich erkannt wird, wahr ist. Indem Descartes so die klare, deutliche Vorstellung als die Basis für die Einsicht in die

Wahrheit hinstellt und sein drittes Princip, das Dasein Gottes, auf das Kriterium der Wahrheit zurückführt, hat er der Existenz Gottes strenge mathematische Gültigkeit verliehen. Im dritten Beweis für die Existenz Gottes bedient sich Descartes des apagogischen Beweisverfahrens. Den Charakter der mathematischen Methode trägt auch der Beweis, dafs es noch andere Wesen in der Welt aufser uns geben mufs. Schliefslich wird gezeigt, dafs in der Entwickelung der kartesianischen Naturphilosophie die mathematische Methode in der Beweisführung vorherrscht. Indem Descartes das Wesen der Körper in der blofsen räumlichen Ausdehnung erkannt hat, war ihm die Materie ein Gegenstand der Mathematik geworden. Die Unendlichkeit der Welt, die Leugnung jeden leeren Raumes in derselben, die Bewegung etc. sind die natürlichen Konsequenzen der Gleichung: Materie gleich Ausdehnung.

Programme naturwissenschaftlichen und andern Inhalts.*)

Referent: Dr. H. Proebscholdt, ord. Lehrer am Realgymnasium in Meiningen.

Eisenach. Realgymnasium. Progr. Nr. 624. Ord. Lehrer Dr. Höhn: *Der Handfertigkeitsunterricht und die höheren Schulen.***)

Der Verfasser bespricht ein Thema, das in neuester Zeit vielfach in der Tagespresse erörtert worden ist, wenn auch gerade nicht in Bezug auf die höheren Schulen. Der einleitende gröfsere Teil der Abhandlung beschäftigt sich mit einem geschichtlichen Rückblick über den Entwicklungsgang der Frage des Handfertigkeitsunterrichts und den gegenwärtigen Stand derselben; es mag hier hinzugesetzt werden, dafs auch in den vierziger Jahren in einzelnen thüringischen Staaten dieser Unterrichtszweig in den Volksschulen eingeführt war, aber aus Mangel an Interesse und vornehmlich infolge der Bewegung von 1848 wieder aufgegeben wurde. Mit grofser Wärme schildert dann der Verfasser den Gewinn, den praktische Beschäftigungen für den Schüler der höheren Lehranstalten hinsichtlich der Schärfung der Sinne, der Charakterbildung und der körperlichen Erholung bringen, er sieht darin das heilsamste Gegenmittel gegen die Gewöhnung des innern Denkens und die Loslösung vom Beobachten. Den grofsen pädagogischen Wert der Handarbeiten wird wohl kein einsichtiger Beurteiler verkennen; der Referent möchte aber der Ansicht Raum geben, dafs der Verfasser (und mit ihm noch manche Persönlichkeit) aus Liebe zur Sache die Wirkung dieses Unterrichts in manchen Dingen überschätzt. Ohne jegliche manuelle Beschäftigung sind übrigens die Schüler an und für sich nicht, der gröfste Teil derselben verwendet sogar sehr viel Zeit auf gewisse Liebhabereien, (Laubsägen u. s. w.). Ein mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht, dem die ihm gebührende und notwendige Zeit zur Verfügung gestellt würde, könnte gewifs das leisten, was der Verfasser von einem neu einzuführenden Handfertigkeitsunterricht erhofft. Dafs der schwierigste Teil des Problems, die Beschaffung der Zeit, gegenwärtig kaum Aussicht auf Verwirklichung hat, wird am Schlusse der Arbeit mit Recht betont, zugleich aber angedeutet, dafs durch eine Reformation auf dem Gebiet des Sprachunterrichts Abhülfe geschafft werden könnte. Das ist richtig, nur könnte, wie bereits gesagt, die gewonnene Zeit in geeigneterer Weise verwertet werden; es wird leider aber noch sehr viel zu kämpfen sein, ehe sich die einfache Wahrheit Bahn bricht, dafs die erste und hauptsächlichste Aufgabe der Schule darin besteht, den Schüler zum Verständnis der Gegenwart und zum Arbeiten in derselben vorzubereiten.

---

*) Die im Programm zu Arnstadt angezeigte Abhandlung zoologischen Inhalts ist noch nicht erschienen. D. Ref.

**) Man vergleiche hiermit den Bericht über das Leipziger Seminar für Handfertigkeitsunterricht in ds. Hefte III. Abt. S. 543 u. f. D. Red.

C. Bibliographie.

Neue Auflagen.

(Nachtrag zur Bibliographie in Heft 6, S. 459.)

2. Naturwissenschaften.

Crüger, Dr., Grundriſs der Physik, m. Rücksicht auf Chemie als Leitfaden f. d. mittlere phys. Lehrstufe method. bearb. 22. Aufl. (244 S.) Lpz., Amelung. 2,10.

Mohn, Prof. Dr., Grundzüge der Meteorologie. Die Lehre von Wind und Wetter, nach den neuesten Forschungen dargest. 4. Aufl. Deutsche Orig.-Ausg. Mit 36 Karten. (364 S.) Berlin, Reimer. 6.

Weinhold, Prof. Dr., Physikalische Demonstrationen. Anleitung zum Experimentieren. 2. Aufl. (208 S.) In 3 Lfgn. Lpz., Quandt & Händel. à 7,50.

Credner, Oberbergr. Prof. Dr., Elemente der Geologie. 6. Aufl. (808 S.) Lpz., Engelmann. 15,00.

Krause, Dr., Schulbotanik. Nach method. Grundsätzen bearb. 2. Aufl. (231 S.) Hannover, Helwing. 2,20.

Krist, Dr., Anfangsgründe der Naturlehre. 16. Aufl. (276 S.) Wien, Braumüller. 2,50.

Milovan, Die Erde. Ihre Entstehung, Entwickelung, Umwandlung und ihr Ende. 3. Aufl. (102 S.) Graz, Cieslar. 1,00.

Arendt, Prof. Dr., Grundzüge der Chemie. Method. bearb. 2. verb. Aufl. (252 S.) Hamburg, Voſs. 2,00.

Jochmann u. Hermes, Grundriſs der Elementarphysik u. Elemente der Astronomie und mathem. Geographie. 10. Aufl. (444 S.) Berlin, Winkelmann. 5,30.

Krebs, Prof. Oberl. Dr., Leitfaden der Experimentalphysik. 2. Auflage. (476 S.) Wiesbaden, Bergmann. 4,60.

Schenkling, Taschenbuch für Käfersammler. 2. Aufl (236 S.) Lpz., Leiner. 2,80.

Bail, Oberl. Prof. Dr., Method. Leitfaden für den Unterr. in der Naturgeschichte. 7., bezw. 2. Aufl. Lpz., Fues. à 1,25.

3. Geographie.

Daniel, Dr. H. A., Illustr. kleineres Handbuch der Geographie. 2. Aufl. bearb. von Dr. Wolkenhauer. I. Bd. (646 S.) Lpz., Fues. 9,60.

—, Leitfaden für d. Unterr. in d. Geogr. 161. Aufl. v. Dir. Dr. Volz. (198 S.) Halle, Waisenhaus. 0,80.

Juli. August.

Erziehungs- und Unterrichtswesen.

Heinzelmann, Oberl. Dr., Über die Erziehung zur Freiheit. Ein pädag. Beitrag. (59 S.) Berlin, Wiegandt u. Grieben. 1,00.

Leisner, Lehrer O., Studien über die Einheit der Bildung. (182 S.) Lpz., Wartig. 2,40.

Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vom 5. Febr. 1887. (32 S.) Neuwied, Heuser. 0,50.

Schriften des deutschen Einheitsschulvereins. I. Heft: 1. Frick, Die Möglichkeit der höheren Einheitsschule. 2. Meyer, Mathematik und Naturwissenschaften in der Einheitsschule. 3. Hornemann, Die Pflege des Auges und der Anschauung in der E. Nebst einer Einleitung über die Ziele des deutschen Einheitsschulvereins und einer Bibliographie der E. — II. Heft: Hornemann, Die Zukunft unserer höheren Schulen. — (215 S.) Hannover, Meyer. 4,00.

Bütow, Zeitgemäfse pädagogische Aufsätze. (67 S.) Lpz., Rust. 1,00.
Daniel, Über die Langeweile. (24 S.) Emden, Haynel. 0,50.
Zopf, Der naturwissenschaftliche Gesamtunterricht (Natur- und Erdkunde) auf preufsischen Gymnasien beiderlei Art. Eine Streitschrift gegen das Bestehende. (88 S.) Breslau, Kern. 1,60.
Seydel, Prof. Dr., Die rechtliche Stellung der Lehrer an den bayerischen Realschulen. Ein Gutachten. (21 S.) Augsburg, Rieger. 0,40.
Vieweger, Das Einheitsgymnasium als psychologisches Problem behandelt, zugleich eine Lösung der Überbürdungsfrage auf psychologischer Grundlage. (90 S.) Danzig, Saunier. 1,00.

Mathematik.

A. Reine Mathematik.

1. Geometrie.

Vacat.

2. Arithmetik.

Neumann, C., Über die Methode des arithmetischen Mittels. (116 S.) Lpz., Hirzel. 3,20.
Reiff, R., Die Anfänge der Variationsrechnung. (9 S.) Tübingen, Fues. 0,20.
Selling, Prof. D., Eine neue Rechenmaschine. (51 S.) Berlin, Springer. 1,20.
Hengel, Prof. Dr. van, Lehrbuch der Algebra. Theoretisch-prakt. Anleitung zum Studium der Arithm. und Algebra. (489 S.) Freiburg, Herder. 5,00.
Jacobsen, Curieuse mathem. Aufgaben. Schleswig 1790. Neu herausg. (32 S.) Flensburg, Westphalen. 1,00. *)

B. Angewandte Mathematik.

(Astronomie. Geodäsie. Mechanik.)

Kerz, Plaudereien über die Kant-Laplacesche Nebularhypothese. (103 S.) Jena, Mauke. 3,00
Weber, Ing., Sternkarte mit drehbarem Horizonte. Lpz., Hinrichs. 0,50 (auf Pappe 6,00).
Moedebeck, Lieut., Die Luftschifffahrt in ihrer neuesten Entwickelung. Mit 16 Abb. u. 4 Plänen. (39 S.) Berlin, Mittler. 1,00.
Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1890. Herausg. v. Reichsamt des Innern. (264 S.) Berlin, Heymann. 1,50.
Kramerius, Prof., Repetitorium aus Geometrie und Mechanik. (173 S.) Wien, Pichler. 2,40.
Schönfeld, Dir. Dr., Bonner Sternkarten. 2. Serie. Atlas der Himmelszone zw. 1° u. 23° südl. Declination. Bonn, Marcus. 12,00.

Physik.

Voit, Prof. Dr., Joseph v. Fraunhofer. (20 S. mit Portr.) München, Litter.-art. Anst. 1,50.
Kohlrausch, Fr., Die gegenwärtigen Anschauungen über die Elektrolyse von Lösungen. (31 S.) Berlin, Springer. 1,00.
Morgenstern, Dir. Dr., Einführung in das Gebiet der Physik. Ein Hülfsb. f. d. Hand des Lehrers. (164 S.) Jena, Bufleb. 3,00.
—, dasselbe. Frageheft. Für die Hand des Schülers. (56 S.) Ebda. 1,00.

---

*) Man sehe d. Ztschr. lauf. Jahrg. Heft 5, S. 396/7. D. Red.

Mey, Dr., Lehrbuch der Contactelektricität (Galvanismus) mit 731 Erklärungen, 238 Fig., einem Formelverz. etc. Zum Gebrauch an höh. u. nied. Schulen. (440 S.) Stuttgart, Maier. 8,00.

Chemie.

Czyrniański, Prof. Dr., Ein Beitrag zur chemisch-physikalischen Theorie. (20 S.) Krakau, Friedlein. 1,00.
Geuther, Prof., Beispiele zur Erlernung der quantitativen chemischen Analyse. (63 S.) Jena, Döbereiner. 1,50.
Topf, Jodometrische Studien. (106 S.) Wiesbaden, Kreidel. 2,00.
Wislicenus, J., Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekülen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen. (78 S.) Lpz., Hirzel. 4,00.

Beschreibende Naturwissenschaften.

1. Zoologie.

Büchner, Prof. Dr. L., Thatsachen und Theorieen aus dem naturwissenschaftl. Leben der Gegenwart. (361 S.) Berlin, Allg. Ver. f. deutsche Litteratur. 6,00.
Janke, Dr., Die willkürliche Hervorbringung des Geschlechtes bei Mensch und Haustieren. (495 S.) Neuwied, Heuser. 11,00.
Bernecker, Reall., Kurzer Leitfaden der Naturgeschichte für die mittleren Klassen an Realschulen, Gymnasien etc. (164 S.) Tübingen, Osiander. 1,40.

2. Botanik.

Dennert, Dr., Die Bakterien. (50 S.) Heilbronn, Henninger. 1,00.
Cohn, Prof. Dr., Zur Biologie der Pflanzen. 5. Bd. 1. Heft. (244 S.) Breslau, Kern. 16,00.
Hansgirg, Prof. Dr., Physiologische und algologische Studien. (187 S.) Lpz., Felix. 25,00.
Kreutzer, Dr., Das Herbar. Anweisung zum Sammeln, Trocknen und Aufbewahren der Gewächse. (196 S.) Wien, Pichler. 2,00.
Sydow, P., Die Flechten Deutschlands. Anleitung zur Kenntnis und Bestimmung der deutschen Flechten. Mit zahlr. Abb. (331 S.) Berlin, Springer. 7,00.
Schramm, Oberl. Dr., Lehrbuch zum botanischen Unterricht. 1. Teil. Bäume und Sträucher. (150 S.) Dresden, Jaenicke. 2,00.
—, Übungsheft zum vorigen für Schüler in Gymnasien etc. (84 S.) Ebda. 1,00.
Zaengerle, Prof. Dr., Grundrifs der Botanik f. d. Unterricht an mittleren u. höheren Lehranstalten bearb. (240 S.) München, Taubald. 2,20.
Williams, Leitfaden der Botanik. (208 S.) Petersburg, Schmitzdorff. 3,00.

Geographie.

Rusch, Sem.-Prof., Beobachtungen, Fragen und Aufgaben aus dem Gebiete der elementaren astronomischen Geographie. (24 S.) Wien, Hölder. 0,40.
Pallmann, Doc. Prof. Oberl., Die Bewohnbarkeit der Tropen für Europäer. Eine kulturgeographische Studie aus den Quellen. (56 S.) Berlin, Lehmann. 1,50.
Fischer, Prof. Dr. Th., Die Fortschritte und die Entwickelung der geographischen Wissenschaften in den letzten 50 Jahren. Festrede, bei der 50j. Jubelfeier des Frankfurter Ver f. Geogr. 8. XII. 86 geh. (27 S.) Frankfurt a/M., Knauer. 1,50.

Neue Auflagen.

1. Mathematik.

Brockmann, weil. Oberl., Lehrbuch der elementaren Geometrie. 1. Teil: Planimetrie. 3. Aufl. (201 S.) Lpz., Teubner. 2,00.
Durège, Prof. Dr., Theorie der elliptischen Funktionen. Versuch einer elementaren Darstellung. 4. Aufl. (393 S.) Lpz., Teubner. 9,00.
Erler, Prof. Oberl. Dr., Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima bearb. 3. Aufl. (45 S.) Ebda. 1,20.
Wittstein, Prof. Dr., Lehrbuch der Elem.-Math. 1. Arithmetik. 8. Aufl. (217 S.) — 2. Planimetrie. 14. Aufl. (212 S.) Hannover, Hahn. à 2,00.
Heis, weil. Prof. Dr., Sammlung von Aufgaben aus der allg. Arithmetik. 72. Aufl. (403 S.) Köln, Du Mont-Schauberg. 3,00.
Bahnson, Realg. Prof. Dr., Leitfaden für den Unterr. in der Geometrie. 4. Aufl. (113 S.) Hamburg, Rudolphi. 2,00.

2. Naturwissenschaften.

De Cew, Die Konstruktion der magnetelektrischen u. dynamoelektrischen Maschinen. 5. Aufl., umgearb. u. vermehrt von Doc. Dr. Auerbach. (253 S.) Wien, Hartleben. 3,00.
Speyer, Dr. A., Schmetterlingskunde für Anfänger. 4. Aufl. Mit 16 Taf., farb. Abb. etc. (240 S.) Lpz., Oehmigke. 6,00.
Wünsche, Oberl. Dr., Excursionsflora etc. 5. Aufl. (424 S.) Leipzig, Teubner. 4,00.
Medicus, Reall. Dr., Illustrirtes Schmetterlings- und Raupenbuch. Mit 87 col. Abb. (104 S.) 2. Aufl. Kaiserslautern, Gotthold. 1,00.
Lenz, Prof. Dr., Gemeinnützige Naturgeschichte. 5. Bd. Das Mineralreich. 5. Aufl., bearb. von Oberl. Dr. Wünsche. (196 S.) Gotha, Thienemann. 5,20.
Pokorny, Dir. Dr., Ill. Naturgeschichte des Tierreiches. 20. Aufl., bes. von Proff. DD. Latzel und Mik. (269 S.) Prag, Tempsky. 2,40.
Kohlrausch, Prof. Dr. Fr., Leitfaden der praktischen Physik mit Anh.: Das absolute Mafssystem. 6. Aufl. (364 S.) Lpz., Teubner. 5,60.
Strasburger, Prof. Dr., Das botanische Praktikum. Anleitung zum Selbststudium der mikroskopischen Botanik. 2. Aufl. (685 S.) Jena, Fischer. 15,00.
Zwick, Insp. Dr., Leitfaden für den Unterricht in der Pflanzenkunde. 3 Kurse. (96 S. 127 S.) 5. Aufl. Berlin, Nicolai. (I.) 0,60. — (II. III.) 0,60.
Waeber, Lehrbuch der Physik mit bes. Berücksichtigung der physikalischen Technologie und der Meteorologie. 5. Aufl. (347 S.) Leipzig, Hirt & Sohn. 3,75.

3. Geographie.

Hirts geographische Bildertafeln. Von Dr. Oppel und Ludwig. 2. Tl. Typische Landschaften. 2. Aufl. (29 Taf. mit 15 S. Text.) Breslau, Hirt. 5,00.
Neue Karte von Afrika. 1 : 7 500 000. 4 Bl. Stuttgart, Maier. 8,00.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Das 150jährige Jubiläum der Universität Göttingen, August 1887.

Bericht vom Gymnasiallehrer Kahle in Göttingen.

Am 7. 8., und 9. August d. J. beging die **Georgia Augusta** die Feier ihres 150jährigen Bestehens in einer wenn auch nicht pomphaften, so doch recht ansprechenden und würdigen Weise. Es war von vornherein von einer Feierlichkeit gröſseren Stiles Abstand genommen worden, sodaſs z. B. Deputationen fremder Universitäten fehlten, und man würde wohl ganz davon abgesehen haben, wenn nicht seit der Annexion Hannovers der Stuhl eines Rektors der Universität verwaist dagestanden und sich bei diesem Anlaſs eine passende Gelegenheit geboten hätte, durch die von Sr. Majestät vollzogene Ernennung Sr. Königlichen Hoheit des Prinzen Albrecht von Preuſsen zum Rektor magnificentissimus der Georgia Augusta einen noch engeren Anschluſs an das Land, welchem die Georgia Augusta bereits seit 21 Jahren angehört, herzustellen. Dieser Ernennung gebührte auch eine feierliche Art der Begrüſsung und Einführung, und darin lag eben der Schwerpunkt des ganzen Festes.

Dasselbe begann am Sonntag den 7. August mit einem Gottesdienste in der St. Johanniskirche. Die Professoren im Ornate begaben sich in geschlossenem Zuge unter Glockengeläute von der Aula der Universität aus durch die Stadt nach der Kirche, kurz darauf traf auch Se. Königliche Hoheit daselbst ein und wurde von dem Prorektor und den Dekanen der vier Fakultäten auf seinen Sitz geleitet, den er neben dem Prorektor einnahm. Gleich beim Betreten des Gotteshauses durch den Prinzen setzte die Orgel mit einem feierlichen Vorspiel ein und der Gottesdienst begann mit einem Vortrag des 100. Psalms: „Jauchzet dem Herrn alle Welt“ durch die Singakademie unter Leitung des Komponisten Herrn Musikdirektors Professor **Hille**. Herr Konsistorialrat Professor **Schultz** hielt dann nach Beendigung des liturgischen Teiles eine ergreifende Festpredigt über 2. Kor. Kap. 10, Vers 17: „Wer sich aber rühmet, rühme sich des Herrn,“ worauf der Gesang der Gemeinde: „Nun danket alle Gott“ die Feier schloſs. Daran reihte sich ein von der Stadt veranstalteter Frühtrunk in der neuerdings künstlerisch ausgemalten Halle des Rathauses und auf dem Platze vor demselben, welcher durch eingesetzte Bäume und einen Kranz von Guirlanden und Wimpeln, sowie Tische und Bänke zu einer Reihe von Lauben umgeschaffen war. Auch Se. Königliche Hoheit nahm an demselben zuerst in der Rathaushalle teil und erging sich dann in ungezwungener Weise zwischen den dicht besetzten Kneiptischen und der auf und ab wogenden Menschenmenge, überall von stürmischen Hochrufen begrüſst. Den Nachmittag und Abend füllten ein Volksfest auf dem Hainberge vor der Stadt und eine zwanglose Vereinigung der Festgenossen in der Festhalle; an beiden nahm Se. Königliche Hoheit vorübergehend teil.

Die Festhalle war ein imposanter Bau mit einer Breite von 50, einer Tiefe von 60 m, aus fünf breiten sich abstufenden Schiffen bestehend, die an der Vorderfront des freieren Luftzuges wegen nur durch Draperieen geschlossen waren. Vor dem Hauptschiffe zwei Türme mit kuppelartiger Bedachung, über dem Mittelportale der deutsche Reichsadler, umgeben von einem Fahnenkranze der Reichsteile, für welche Göttingen Landesuniversität ist, und ein grofses Gemälde in Halbkreisform die Georgia Augusta darstellend als Frauengestalt inmitten der vier Fakultäten. Im Innern befand sich dem Haupteingange gegenüber eine mächtige Estrade, deren Hintergrund eine gemalte Waldpartie und vor ihr die Kolossalbüste Sr. Majestät des deutschen Kaisers, überragt von der Kaiserkrone, ausfüllten. Laubgewinde, Fahnen und Wappen schmückten aufserdem in geschmackvollster Weise den weiten Raum, der am Abend von 14 elektrischen Bogenlampen erleuchtet wurde.

Am Montag Morgen fand in der Aula der Universität ein Festaktus statt, bei welchem der Prorektor, Herr Professor Ritschl, eine Rede hielt, welche besonders die politischen Bestrebungen und Verwickelungen der Georgia Augusta in den letzten 50 Jahren beleuchtete und den Vorwurf der Römlinge, dafs Liberalismus und Socialismus als Konsequenzen des Luthertums aufzufassen seien, zu entkräften versuchte. Dann folgte eine Reihe von Ehrenpromotionen, von denen hier nur die Wundts zum Dr. u. jur., Rudolf von Bennigsens zum Dr. med. und Repsolds in Hamburg zum Dr. phil. erwähnt werden mögen. Die Gratulationen der Deputationen und die Überreichung einer grofsen Anzahl von Glückwunschadressen in künstlerischer Ausführung, eröffnet durch die Verlesung eines Erlasses Sr. Majestät des Kaisers und eines Telegrammes Ihr. Majestät der Kaiserin durch Herrn Minister von Gofsler, bildeten den Schlufs. Ein Diner der Universität für ihre Ehrengäste, sowie ein Abendfest bei Sr. Königlichen Hoheit, zu welchem etwa 500 Einladungen ergangen waren, beendigten die Feier an diesem Tage.

Am Dienstag Morgen bewegte sich ein Festaufzug sämtlicher Korporationen in vollem Wichs mit Einschlufs ihrer alten Herren durch die Hauptstrafsen der Stadt, welche in geradezu verschwenderischer Weise mit eingesetzten Bäumen, Laubgewinden, Wappen und Fahnen geschmückt war, und wurde dann von Herrn Professor von Wilamowitz-Möllendorff vor der Aula mit einer Ansprache begrüfst.

Am Abend versammelten sich sämtliche Festteilnehmer in der Festhalle zu einem solennen Kommers, welchem Se. Königliche Hoheit präsidierte. Nachdem derselbe durch das Lied: „Sind wir vereint zur guten Stunde" eingeleitet war, ergriff Se. Königliche Hoheit das Wort und brachte das erste Hoch auf Se. Majestät den deutschen Kaiser aus. Daran schlossen sich, unterbrochen von Liedern, eine grofse Anzahl anderer Trinksprüche: auf Se. Königliche Hoheit, ausgebracht von dem Präses der Studierenden, auf das deutsche Reich von Herrn Professor Dove, auf die Provinz Hannover von Herrn Minister von Gofsler, auf die Universität von Herrn Landesdirektor von Bennigsen (eine schwungvolle längere Rede, welcher stürmischer Beifall gezollt wurde), auf die alten Herren, auf den Reichskanzler Fürsten Bismarck von Herrn Professor Weyland, auf die Stadt Göttingen, endlich auf die Studentenschaft von Herrn Oberbürgermeister Merkel.

Am Mittwoch Nachmittag war noch eine Nachfeier in liebenswürdiger Weise von der Stadt Göttingen für die Festgenossen veranstaltet in dem reizend gelegenen Mariaspring sive Rauschenwasser, am Fufse des Plesseberges, einem Orte, dessen Bekanntschaft aus Heines Harzreise wohl bei jedem vorausgesetzt werden kann. Trotz des rauhen Wetters, das sogar einige Regengüsse brachte, waren gegen 6000 Personen in fröhlichster Stimmung unter dem Laubdache des Thalgrundes versammelt, und der Tanzplatz hätte die tanzenden Paare nimmer zu fassen vermögen, wenn nicht die ordnende Hand einiger Väter der Stadt immer eine Anzahl von Paaren

nach einigen Runden eliminiert und dadurch für die nachdringenden Platz geschaffen hätte.

Beim Einbruch der Dunkelheit rief ein Trompetensignal die Festgenossen ins Freie, um einen Blick auf die Ruine Plesse zu gewinnen, welche dann eine ganze Weile durch bengalisches Licht in den verschiedensten Farbenkombinationen erleuchtet wurde, ein Anblick so schön, dafs er vielleicht am lebendigsten unter den Erinnerungen an die Festtage sich den Teilnehmern eingeprägt haben wird.

Das Lehrerbildungs-Seminar für Handfertigkeits-Unterricht in Leipzig

und die damit verbundenen Ausstellungen im Juli und August 1887.

(Nach dem Leipziger Tageblatt 1887 Nr. 209. II. B. u. Nr. 240. I. B.)

I.

Ein recht interessantes, man kann wohl sagen für den Freund gesunden, wahren Fortschrittes im Erziehungswesen herzerhebendes Schauspiel boten (Juli 1887) die Räume der alten Thomasschule. Dem Pädagogen vom älteren Schrot und Korn, dem Verteidiger der alleinseligmachenden Wirkung des bisher unsern Unterricht so gut wie ausschliefslich beherrschenden Wortwissens und Wortlernens mag es freilich wie eine Entweihung geheiligter Räume erscheinen, wenn unten in dem grofsen Erdgeschofszimmer, wo einst ein Stallbaum den göttlichen Plato dozierte, junge, markige, klug dreinschauende, von allerwärts hergekommene Schulmänner unter Leitung eines ernsten graubärtigen Meisters hinter der Hobelbank stehen und mit Streichmafs und Säge arbeiten.

Das Stichwort von der Notwendigkeit der harmonischen Ausbildung des ganzen Menschen nach Körper und Geist wird zwar oft genug, aber nicht selten noch recht unverstanden und unnütz im Munde geführt. Nahe der ganze Unterricht für Kind, Jüngling und Jungfrau geht auf in Sprache, Wort, Begriff. Nahe alles läuft dabei auf Cult des Gedächtnisses und, wenn es hoch kommt, ein wenig diskursiven Denkens hinaus. Als wenn mit Reden, Denken und Wissen der Inhalt eines reichen Menschenlebens erschöpft wäre. Der Schaffungs- und Gestaltungstrieb und die Ausbildung seiner Organe werden als étwas das Gebiet der eigentlichen Pädagogik kaum Berührendes betrachtet. Dafür soll „das Leben die Schule sein". Nur kommt die Schule des Lebens leider zu spät, wenn die Lernschule diesen Trieb im besten Falle vernachlässigt, in der Regel gewaltsam verkümmert hat.

Mit der Nachholung dessen, was die Schule bis jetzt auf diesem Gebiete versäumt hatte, einen Anfang zu machen, das ist der Sinn des „Handfertigkeitsunterrichtes". Die schwersten sozialen Schäden haben einsichtigen Männern aus allen Lebenskreisen, darunter auch vorurteilsfreien Schulmännern die Augen darüber geöffnet, was hier zu thun sei. Der erste Anstofs kam aus Schweden, einem Lande, das überhaupt heute in Bezug auf Schuleinrichtungen auf unerreichter Höhe steht. Leipzigs rüstige Thätigkeit auf diesem Gebiete nimmt einen ungemein ehrenvollen Platz ein. Dem hiesigen Vereine für Verbreitung des Handfertigkeitsunterrichts verdankt man z. B. auch die Ausführung der glücklichen Idee eines Seminars zur Heranbildung von Handfertigkeitslehrern. Man hat die Sommerferienzeit für die Einrichtung zweier Kurse benutzt, eines Juli- und eines Augustkurses. Der erstere wurde von 27 Schulmännern aus allen Teilen Deutschlands, ja weit darüber hinaus, aus

Ungarn, den russischen Ostseeprovinzen etc., benutzt. Für den zweiten, den Augustkursus, waren 34 Teilnehmer angemeldet. Die Lernenden haben sich unter Anweisung der tüchtigen, erprobten Leiter des hiesigen Handfertigkeitskurses die Lehrbefähigung für ein, zwei oder drei Handfertigkeitsfächer angeeignet. Es sind dies Holzarbeiten, Pappearbeiten und eine für die Zwecke dieses Unterrichts ungemein geeignete Technik auf dem Gebiete der Plastik, nämlich der Kerbschnitt. In einem Saale des dritten Stockwerkes der alten Thomasschule waren die von den Teilnehmern des ersten dieser Kurse gefertigten Arbeiten Ende Juli öffentlich ausgestellt. Man mufste bei der Betrachtung der hübschen Sachen in der That darüber staunen, was Fleifs und natürliches Geschick bei richtiger Leitung in so kurzer Zeit auszurichten vermögen. Der erhoffte Segen dieses Lehrerseminars wird in der That zur Wahrheit werden. Wenn alljährlich eine so stattliche Anzahl so rüstiger Apostel der neuen Lehre hinauszieht und für ihre Ausbreitung sorgt, so kann es nicht fehlen, dafs bald ein neuer Morgen für unser Erziehungswesen herandämmern wird. A. W.

II.

Der zweite auch von vielen ausländischen Lehrern besuchte Lehrkursus schlofs ab am 27. August d. J. mit einer Ausstellung der Arbeitsprodukte (diesmal im geräumigen Saale des „Kaufmännischen Hauses“ in der Schulstrafse) und mit Diplomverteilung. Das Leipziger Tageblatt vom 28. August d. J. sagt hierüber:

„Der Besuch auch dieser Ausstellung vermag zu mannigfachen Betrachtungen anzuregen, sobald man sich nur über den eigentlichen Sinn und Wert dieser Bestrebungen Rechenschaft zu geben vermag. Es handelt sich hier um die ersten Anfänge einer unser Erziehungswesen tief erfassenden Reform, welche einem harmonischen Sichausgestalten des gesamten menschlichen Wesens zustrebt. Am deutlichsten wird ein Blick auf diese Ziele, wenn man gewisse, von jedem jeden Augenblick kontrollierbare seelische Vorgänge ins Auge fafst. Das Bewufstsein des Menschen mag nämlich mit einem noch so lebendig geschauten Inhalte erfüllt sein, es erlischt dies Leben sofort, sobald das durch Denkverknüpfung oder Association dazu gesellte Wort in der Seele aufblitzt und das Grau der Abstraktheit des leeren Wortes tritt an seine Stelle. Leider sind viele Menschen gar nicht mehr imstande, zu einer vollen, reichen, anschauenden Bewufstseinsentfaltung zu kommen. Sie können nur noch in den, wie sie meinen, inhaltsvollen, aber thatsächlich inhaltsleeren abstrakten Begriffen denken, und am Ende ist es so weit gekommen, dafs überhaupt die ganze Erziehung und Schulung einer blofsen Schulung für Wortdenken und Wortlernen gleichzuachten ist. Man hat freilich dem schliefslich zu arg und handgreiflich gewordenen Übel abzuhelfen gesucht durch den „Anschauungsunterricht“. Dieser vielgepriesene Anschauungsunterricht ist aber nur ein ganz schwacher Anfang zum Besseren. Der Anschauungsunterricht hebt die Jugend blofs bis an die hochgelegenen Fenster des Wortschulgefängnisses und läfst sie durch die Gitterstäbe in das volle frische Leben blicken.*) Dereinst in der „neuen Schule“ soll sie aber an der Hand des Lehrers wirklich hinaustreten in dasselbe. Die neue Schule soll für sie die Schule des allerdings auf Anschauung und Beobachtung gegründeten Selbsterfahrens und Selbstschaffens sein. Das jetzige System ist in der Hauptzahl seiner Vertreter noch unerschütterlich von seiner Vortrefflichkeit und seiner alleinseligmachenden Kraft überzeugt. Nur erst in den Köpfen verhältnismäfsig Weniger ist die Notwendigkeit des Einlenkens in andere Wege zur Klarheit geworden, und

*) Wir haben diese treffend ausgedrückte Stelle durch den Druck hervorheben lassen. D. Red.

als das sicherste Mittel, aus der alten Strafse in die neue einzulenken, hat man den **Handarbeitsunterricht** erkannt, einen Unterricht, bei dem es keineswegs darauf ankommt, das oder jenes bestimmte Handwerk, die oder jene bestimmte Fertigkeit oder Kunst zu lehren, sondern dem anschauenden Bewufstsein die Organe anzubilden, sich so zu sagen selbstschaffend zu verwirklichen und auszuleben, damit es nicht immer lediglich und ausschliefslich auf den Umsatz seines Inhaltes in Worte angewiesen sei.

Wirklich grofs ist das Verdienst, welches sich der „**Deutsche Verein für Knabenhandarbeit**" durch die Schaffung der „**Lehrerbildungsanstalt für Knabenhandarbeitsunterricht**" um die Ausbreitung der neuen Ideen erworben hat. Wenn jährlich der Ruf in die Lehrerwelt hinausgeht, an den in den Monaten Juli und August hier stattfindenden Kursen dieser Lehrerbildungsanstalt theilzunehmen, so sammeln sich jedesmal die Männer, denen das Segensreiche der neuen Strömung zum Bewufstsein gekommen ist. Sie geben sich hier an der Hand tüchtiger Meister mit Fleifs und — das lehrt ja die Ausstellung — mit glücklichem Erfolg dem Einüben des als pädagogisch am besten erkannten Lehrganges hin, klären und befestigen ihre Ansichten und Meinungen durch das Zusammenleben mit den Leitern der Anstalt und mit eifrigen Lerngenossen und gehen dann als begeisterte Apostel der neuen Lehre hinaus nach allen Weltgegenden, für sie zu wirken und zu werben. Die diesjährigen Kurse hatten 60, zum gröfsten Teil deutsche jüngere Lehrer hier versammelt. Die Teilnehmerzahl wird aber aller Voraussicht nach eine von Jahr zu Jahr zunehmende sein. So wird denn allmählich das deutsche Lehrertum von einem neuen fruchtbringenden Elemente durchdrungen werden, und vielleicht in 20 Jahren, wenn die heutigen jüngeren Kräfte in einflufsreicher leitender Stellung stehen, wird, so hoffen wir, unser ganzes Schulwesen schon aus einem völlig anderen Antlitz schauen. Das sind Zukunftsgesichter eines Beobachters, der schauend und denkend zwischen den Tischen der Ausstellung unserer Lehrerbildungsanstalt für Knabenhandarbeit wandelte." A. W.

Nachschrift der Redaktion. Der Herausgeber ds. Ztschr. hat dem nur hinzuzufügen, dafs die hier besprochene Ausstellung auf ihn einen angenehmen und sogar überraschenden Eindruck gemacht hat. Er ist erstaunt gewesen über die Kunstfertigkeit, mit der die ausgestellten Sachen (meist Holzschnitzereien, Holzgefüge und Papparbeiten) hergestellt waren. Wenn auch vielleicht das geübte Auge eines Kunstmodelltischlers oder eines Kunstbuchbinders noch kleine Mängel hier und da entdecken mochte, so waren diese doch den Augen des Laien nicht erkennbar und erschienen uns die Sachen nicht geringwertiger als die, welche man in einem bewährten Verkaufsgewölbe sieht und käuflich angeboten erhält.

Wir möchten aber bezügl. der angeblichen **Notwendigkeit** dieses Unterrichts dem beistimmen, was der Herr Referent der Programmschau in ds. Hefte (S. 536) über das, diesen Gegenstand behandelnde Eisenacher Programm sagt. Ganz abgesehen von der Überbürdung in allen höheren Schulen, giebt schon der **naturwissenschaftliche** Unterricht Gelegenheit genug zur Ausbildung der Handfertigkeit. Die männliche Jugend der niederen oder Volks-Schulen aber verschafft sich ohnehin schon selbst Hand- und Körperbewegung genug durch Spiel auf der Gasse und freien Plätzen, das leider durch übermütige Ausschreitungen (Gebrüll und Raserei) in gröfseren Städten (z. B. Leipzig) meist zu einer wahren Plage für vorübergehende Erwachsene und für Kranke wird.

Real-Gymnasien und Formal-Gymnasien.*)

Von Ernst Haeckel.

In einem Vortrage, welchen ich am 18. September 1886 in Berlin bei Gelegenheit der LIX Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte hielt, hatte ich versucht, meine Ansichten „über die allgemeinen Ziele der Unterrichts-Reform“ einem gemischten Kreise von Naturforschern und Schulmännern darzulegen.**) Da einige Sätze dieses Vortrags, namentlich in betreff der „Einheitsschule“, eine mifsverständliche Auffassung gefunden haben, und da andererseits die bedeutungsvolle Frage der deutschen Unterrichts-Reform — als eine der wichtigsten Aufgaben des neu erstandenen Deutschen Reiches, von Tag zu Tag dringender sich geltend macht, möge es mir gestattet sein, hier diejenigen Forderungen, welche mir zunächst erreichbar erscheinen, kurz zusammenzufassen.

Unsere sogenannten „klassischen Gymnasien“, welche bisher allein berechtigt sind, dem abgehenden Schüler das Zeugnis der geistigen Reife für das Studium aller Berufszweige auszustellen (— obgleich sie dieses unschätzbare Monopol längst nicht mehr verdienen —), will ich der Kürze halber als „Formal-Gymnasien“ bezeichnen, im Gegensatze zu den Real-Gymnasien. Diese Bezeichnung scheint deshalb zutreffender, weil das Hauptziel der ersteren immer ausschliefslicher in der Vollendung der formalen — und vorzugsweise der grammatikalen — Bildung gipfelt; „klassisch“ hingegen in höherem Sinne ist weder die Lehrmethode noch der Lehrerfolg unserer Formal-Gymnasien. Für das tiefere Verständnis des klassischen Altertums dürften nächst den Geschichtschreibern und Dichtern unsere Bildhauer und Maler, die weder Lateinisch noch Griechisch gründlich getrieben haben, im ganzen mehr geleistet haben, als unsere „klassischen Philologen“. Immer einseitiger hat sich bei den Letzteren der grammatikalische Sport als höchstes Bildungsziel an die Stelle des lebendigen Altertums-Studiums gesetzt.

Noch weniger als die Bezeichnung „klassisch“ dürften unsere heutigen Formal-Gymnasien die althergebrachte Bezeichnung humanistisch verdienen. Was man im fünfzehnten Jahrhundert „Humanismus“ nannte und seitdem als die höchste Blüte menschlicher Geistesbildung anzusehen sich gewöhnt hat, ist denn doch ganz etwas anderes, als was heutzutage auf diese Bezeichnung Anspruch hat. Der grofse Fortschritt, welchen die Humanisten vor vierhundert Jahren durch Neubelebung des klassischen Altertums-Studiums herbeiführten, war gewifs höchst verdienstlich. Aber er ist ungleich geringer, als der Riesenfortschritt unserer Weltanschauung, welchen wir den grofsen Entdeckungen der Naturwissenschaft im letzten halben Jahrhundert verdanken. „Humanismus“ können wir doch heute nur diejenige Bildung nennen, welche auf der gründlichen Erkenntnis des menschlichen Wesens nach allen verschiedenen Richtungen beruht; die „Stellung des Menschen in der Natur“ ist dabei von nicht geringerer Bedeutung, als die „Stellung des Menschen in der Geschichte“. Eine wahre humanistische Bildung kann heute nicht mehr durch das gründlichste Studium der griechischen und römischen Klassiker erworben werden, sondern nur durch Eindringen in den unermefslich weiten Erkenntniskreis, welchen uns das vergleichende, das Naturstudium erschliefst. Ebenso wenig als unsere heutigen Formal-Gymnasien die ausschliefslichen Quellen klassischer und humanistischer Bildung sind, ebenso wenig sind sie die alleinigen Träger idealer Bildung. Der wahre Idealismus im besten Sinne ist weit mehr gepflegt und entwickelt worden durch die deutschen

---

*) Von der Red. d. „Täglichen Rundschau“ uns freundlichst zum Abdruck abgelassen. D. Red. d. Z.

**) Vergl. N. 223 der „Täglichen Rundschau“ vom 24. September 1886, sowie pag. 333 des „Tageblattes der 59. deutschen Naturforscher-Versammlung.“ Anm. d. Verf.

Frauen und die deutschen Künstler, als durch die klassischen Philologen; und doch besitzen die ersteren kein „Zeugnis der Reife!" Wir im Gegenteil sind der Ansicht, dafs der wahre Idealismus nur durch lebendiges Verständnis der kräftig blühenden Gegenwart auf nationaldeutscher Grundlage sich entwickeln kann, und dafs die einseitige Vertiefung in das vergangene Ideal-Leben des klassischen Altertums dessen gröfster Gegner ist. Oder wären die grofsartigen Erfolge, welche die deutsche Real-Politik seit zwanzig Jahren errungen hat, vielleicht durch den kosmopolitischen Idealismus unserer klassisch gebildeten Volksvertreter erzielt worden?

Wie wenig die sogenannte humanistische und idealistische Bildung unserer „klassischen" Gymnasien imstande ist, den hoch gesteigerten Bildungsansprüchen unserer Zeit zu genügen, weiss jeder unbefangene Universitätslehrer, der die Zöglinge der ersteren mit dem „Zeugnis der Reife" in seinen Hörsaal und sein Laboratorium einziehen sieht. Der angehende Student glaubt zwar gewöhnlich, durch die genaue Bekanntschaft mit den Schriftstellern des römischen und griechischen Altertums befähigt zu sein, ohne weiteres in das erwählte Fachstudium einzutreten. Aber bald mufs er sich überzeugen, dafs der reiche Inhalt unseres modernen Kulturlebens dafür weit höhere Anforderungen stellt. Nicht allein die bewunderungswürdigen Fortschritte der Naturwissenschaften an sich, sondern auch die Thatsache, dafs alle Seiten unseres modernen Lebens von ihren theoretischen Erkenntnissen und praktischen Eingriffen tief berührt werden, macht eine allgemeine naturwissenschaftliche Vorbildung für die Studierenden aller Berufsfächer unerläfslich. Oder glaubt man, dafs unsere Theologen und Juristen darunter Schaden leiden, dafs sie mit den wichtigsten Erscheinungen der wirklichen und durch Beobachtung erkannten Welt näher vertraut werden?

Von diesem Gesichtspunkt betrachtet, kann der wesentliche Charakter der vielseitig erstrebten Einheitsschule von uns nur darin gesucht werden, dafs die Naturwissenschaft die allgemeine Grundlage bildet; nicht etwa im Gegensatz zur sogenannten „Geisteswissenschaft", sondern innig mit ihr verschmolzen und gegenseitig durchdrungen. Die Anthropologie mufs hier als das einigende Band einerseits die biologischen und physikalischen Lehrfächer, andrerseits die historischen und philologischen verknüpfen. Die unentbehrliche Zeit und Arbeitskraft für einen gesunden „naturwissenschaftlich-humanistischen" Unterricht in diesem Sinne kann aber nur dadurch gewonnen werden, dafs der gröfste Teil des bisherigen „philologisch-humanistischen" Lehrstoffes ausgeschieden wird. Wir verlangen also für die „Einheitsschule der Zukunft", dafs ihr Schwerpunkt in die Naturwissenschaft fällt, und dafs die eigentliche „Naturgeschichte" noch voransteht der Naturlehre; der Naturgeschichte (im weitesten Sinne) fallen die sämtlichen biologischen Fächer zu (— oder die mit Unrecht sogenannten „beschreibenden Naturwissenschaften"): Antropologie, Zoologie, Botanik, Entwickelungslehre der organischen Natur, aufserdem Geologie und Geographie; zur „Naturlehre" (im älteren Sinne) rechnen wir sämtliche physikalisch-mathematischen Disziplinen (Physik, Chemie, Astronomie, Mathematik). Die Anthropologie und Geographie verknüpft die ersteren naturgemäfs mit der Geschichte und Sprachkunde. Der Geschichtsunterricht soll das Hauptgewicht auf die innere vergleichende Kulturgeschichte legen nicht auf die äufsere Staatengeschichte. In Sprache und Litteratur ist das Deutsche in erste Linie zu stellen, demnächst das Englische, in dritte Linie das Französische und Lateinische; jedoch ist das Lateinische bedeutend zu beschränken, und höchstens ein drittel der bisher daran vergeudeten Zeit und Arbeitskraft darauf zu verwenden. Das Griechische ist als obligatorisches Unterrichtsfach ganz aus dem Gymnasialunterricht auszuscheiden; die Fachstudierenden, welche dasselbe nicht entbehren können (Philologen und

Theologen), müssen sich dasselbe ebenso aneignen, wie die Theologen bisher das Hebräische lernten. Das Englische, als unentbehrliche internationale Weltsprache und reiche Litteraturquelle, ist unter allen fremden Sprachen voranzustellen. Es gehört zu den vielen seltsamen und nur historisch erklärlichen Paradoxen unserer scholastischen Bildung, dafs wir von unseren Töchtern die vollständige Ausbildung im Englischen und Französischen verlangen, von unseren Söhnen aber nicht;*) und doch ist Beides für die letzteren viel wichtiger, als für die ersteren.

Die Einheitsschule in diesem Sinne, wie sie unser Ziel bildet, entfernt sich so sehr von dem bestehenden, durch Monopol privilegirten Formal-Gymnasium, dafs wir die Erreichung der ersteren durch Reform des letzteren in nächster Zukunft nicht hoffen können. Die historische Macht des Formal-Gymnasiums mit allen überlieferten Vorrechten und Vorurteilen des Mittelalters ist viel zu stark, als dafs eine Überwindung derselben durch die berechtigten Ansprüche der heutigen Naturwissenschaft in Aussicht stünde. Wie ein mächtiges, mit festen Mauern und hohen Türmen geschütztes Kastell der Ritterzeit ragt diese vormalvollendete Klosterschule in das blühende Leben des neunzehnten Jahrhunderts hinein, und die fruchtreichen Bäume der fortgeschrittenen Natur-Erkenntnis, welche dem sonnigen Boden des letzteren entspriefsen, vermögen zwar jene bemooste Burg mit ihren mächtigen Wipfeln in Schatten zu stellen, aber nur sehr langsam das feste Gefüge der klassischen Quadersteine mit ihren eindringenden Wurzeln zu lockern.**)

Nur aus diesem Grunde, weil ich das Idealbild der naturgemäfsen Einheitsschule für zunächst unausführbar halte, habe ich in meinem Berliner Vortrage im vorigen Jahre mich gegen dieselbe ausgesprochen Auch geht ja aus dem bekannten Programm des „Deutschen Einheitsschulvereins“ (vom 5. Oktober 1886) und aus ähnlichen Kundgebungen deutlich genug hervor, dafs die meisten (? D. Leitung***) Anhänger der Einheitsschule im wesentlichen das heutige Formal-Gymnasium festhalten und ihm nur durch geringe Koncessionen eine zeitgemäfse realistische Färbung geben wollen. Allein Zeit und Raum, Kraft und Interesse für den zeitgemäfsen Realunterricht kann nur dadurch gewonnen werden, dafs der gröfsere Teil des bisherigen formalen Gymnasial-Stoffes entfernt wird. Die Überbürdung der Schulen besteht, trotz alles Redens dagegen, noch fort, und wir können nur wünschen, dafs die Zahl der geistig anstrengenden Arbeitsstunden bei der Neugestaltung des höheren Schulwesens herabgesetzt wird. Dagegen ist es sehr wünschenswert, dafs mehr Zeit und Sorgfalt auf die körperliche Ausbildung verwendet wird. (Tägliches Turnen, viele Exkursionen, Übungen in Handarbeiten u. s. w.) Die Nachmittagsstunden sollten nur für diese und für leichtere, namentlich künstlerische und technische Beschäftigung benützt werden.

Für ganz verfehlt müssen wir die neueren Versuche halten, zu dem erwünschten Ziele der Einheitsschule dadurch zu gelangen, dafs man Real- und Formal-Gymnasium wieder einander nähert und den ersteren mehr formalen (insbesondere lateinischen), den letzteren mehr realen (namentlich physikalisch mathematischen) Unterrichtsstoff aufbürdet. Die eigenthümlichen Vorzüge beider Anstalten, die aus einer naturgemäfsen Arbeitsteilung hervorgegangen sind, werden dadurch verwischt, und die Anforderungen gesteigert, ohne befriedigendes Endergebnis. Wollte man wirklich in den Formal-Gymnasien sich entschliefsen, den realen Anforderungen der Gegenwart gerecht zu werden, so könnte die dazu erforder-

*) Sehr richtig! D. Red. d. Z.

**) Treffende Vergleichung! Wir haben sie deshalb durch den Druck hervorheben lassen. D. Red. d. Z.

***) Fragezeichen der Red. d. Täglichen Rundschau.

liche Zeit und Arbeitskraft nur durch Verzicht auf den gröſsten Teil des alt-klassischen Unterrichts, insbesondere auf die griechische Sprache, gewonnen werden. Damit würde aber das Formal-Gymnasium seine wesentlichste Eigentümlichkeit aufgeben.

Viel mehr Aussicht auf Verwirklichung, als der schöne Traum einer zeitgemäſsen Einheitsschule, scheint der Vorschlag eines zweiteiligen Gymnasiums zu haben. Der einheitliche Lehrplan bleibt für alle Schüler derselbe bis zu der Bildungs-Stufe, welche mit der Berechtigung zum Einjährig-Freiwilligen-Dienst abschlieſst (also bis zur heutigen Unter-Sekunda incl.) Dann tritt Gabel-Teilung in zwei vollkommen gleichberechtigte Zweige ein, in eine reale und eine formale Linie; in der Real-Linie bilden Naturwissenschaft und neuere Sprachen das Hauptobjekt, in der Formal-Linie das klassische Altertum und die alten Sprachen.*) Indessen wird auch diese Gabelteilung nur unter der Erfüllung von zwei Bedingungen als ein groſser und wünschenswerter Eortschritt gelten können, erstens, wenn für den gemeinsamen Unterricht bis zur Teilung das Griechische ausgeschlossen und das Lateinische wesentlich beschränkt wird zu Gunsten der neueren Sprachen und der Naturwissenschaft; und zweitens, wenn das Maturitäts-Zeugnis beider Linien volle Gleichberechtigung für alle Studien-Zweige einschlieſst. Wenn die Abiturienten der Real-Linie für das spätere erwählte Fach-Studium (etwa der Theologie oder Geschichte) der klassisch formalen Bildung bedürfen, so müssen sie sich diese ebenso nachträglich erwerben, wie dies thatsächlich bei den Abiturienten der Formal-Gymnasien mit der Naturwissenschaft geschieht, wenn sie Medizin studieren wollen.

Wir verkennen jedoch nicht, daſs auch die praktische Durchführung dieses Reform-Vorschlages auf groſse Hindernisse stoſsen wird. Zugleich fürchten wir, daſs auch in diesem Falle die althergebrachte Formal-Bildung, gestützt auf die Macht der Gewohnheit, bei Einrichtung der einheitlichen Vorbildungs-Klassen ihr historisches Übergewicht zu Ungunsten der Real-Bildung geltend machen wird.

Aus diesen und anderen Gründen, deren Erörterung hier zu weit führen würde, halten wir es unter den gegebenen Verhältnissen für das richtigste, zunächst die volle Gleichberechtigung der bestehenden Real-Gymnasien und Formal-Gymnasien zu erstreben, zugleich aber dahin zu wirken, daſs die eigenthümlichen Vorzüge beider Institute zu ihrer vollen Geltung gelangen. Bei dieser Gelegenheit würden wichtige Reformen für beiderlei Anstalten durchzuführen sein; denn das heutige Real-Gymnasium entspricht ebensowenig als das heutige Formal-Gymnasium allen Anforderungen, welche man nach den Grundsätzen sachgemäſser Arbeitsteilung und entsprechend den Fortschritten der Gegenwart an dasselbe stellen kann.

Das Real-Gymnasium muſs viel mehr Gewicht auf die biologischen Zweige der Naturwissenschaft legen, als bisher geschehen ist; Zoologie und Botanik, Anatomie und Physiologie, Anthropologie und Ethnographie, weiterhin aber auch Geologie und Geographie haben in den beiden letzten Dezennien so riesenhafte und für die allgemeine Bildung so bedeutungsvolle Fortschritte gemacht, daſs sie nicht mehr hinter der bevorzugten Physik und Chemie zurückstehen dürfen. Durch das einigende Band der heutigen Entwickelungslehre, das sie alle umschlingt und zu einer wahren Naturgeschichte erhebt, hat ihr Bildungswert unendlich gewonnen. Was den Sprachunterricht betrifft, so dürfte neben dem Englischen und Französischen auch das Italienische in den Lehrplan aufzunehmen, dagegen das Lateinische wesentlich zu beschränken sein. Die

*) Dies ist also die von uns bisher vertretene Form der Einheitsschule, welche in der That so groſse Vorzüge bietet und sich so leicht aus den jetzigen höheren Schulen entwickeln lieſse, daſs wir ihrer Verwirklichung nach wie vor mit Zuversicht entgegensehen.
Anm. d. Leitung d. T. B.

Methode des Sprachunterrichts mufs viel mehr, als bisher geschehen, auf die Vergleichung und Entwickelungsgeschichte der Sprachen Rücksicht nehmen.

Das Formal-Gymnasium andererseits soll zwar wie bisher das Hauptgewicht auf die klassische Philologie legen; es würde aber wesentlich gewinnen, wenn zum Unterricht im Griechischen und Lateinischen derjenige in Sanskrit träte. Durch die Methode der vergleichenden Sprachforschung würden die Qualen, welche der frische Knabengeist in der Zwangsjacke der grammatikalischen Dressur zu erleiden hat, wesentlich gemildert, und dem gründlichen Studium der alten Sprachen ein Interesse abgewonnen werden, welches dasselbe ohne die vergleichende und entwickelungs-geschichtliche Methode nicht besitzen kann. Für den ausgedehnten Geschichtsunterricht, den das Formal-Gymnasium in Anspruch nimmt, wäre dem entsprechend zu wünschen, dafs derselbe nicht so überwiegend wie bisher blofs das klassische Altertum berücksichtige, sondern weiter zurückgehend auch die Geschichte der älteren Kulturvölker, der Ägypter, Assyrer, Inder, u. s. w, behandele und die „Urgeschichte" nicht ignorire. Will man wirklich den Schwerpunkt der allgemeinen Bildung nicht in dem unendlich reichen Wissensgebiete der Gegenwart finden, sondern in der einseitigen Vertiefung in das Altertum, so sollte man wenigstens von diesem Gebiete ein möglichst allseitiges und umfassendes Gesamtbild zu erhalten streben.

Das neu aufblühende Deutsche Reich hat alle Veranlassung, die baldige Ausführung der höheren Unterrichts-Reform als eine seiner dringlichsten Lebensaufgaben zu betrachten. Die benachbarten Kulturvölker haben dieselbe zum Teil ernstlich begonnen, zum Teil schon durchgeführt. Entschliefst man sich nicht zur baldigen Beseitigung der mittelalterlichen Vorurteile, in denen unser Gymnasialwesen befangen ist, so werden wir von jenen überflügelt werden und die schwersten Nachteile zu erdulden haben. Jedenfalls sollten die deutschen Regierungen den Mut haben, wenigstens eine Probe mit der Gleichberechtigung der beiderlei Gymnasien zu machen. Mit welchem Rechte setzt man noch heute das veraltete Formal-Gymnasium so hoch über das aufblühende Real-Gymnasium, wenn man dem letzteren nicht Gelegenheit giebt, die Konkurrenz auch nur zu versuchen? Hoffen wir, dafs bald die staatliche Anerkennung der vollen Gleichberechtigung diese wichtige Frage löst.

Ein österreichischer Rechtslehrer über die Gymnasialbildung.*)

Im August v. J. hat der österreichische Unterrichtsminister von Gautsch an die Professorenkollegien der rechts- und staatswissenschaftlichen Fakultäten des Kaiserstaates einen Erlafs gerichtet, in dem er seine Absicht kund giebt, die juristische Studienordnung neu zu regeln. „Wenngleich die wesentlichen Grundgedanken der Studienordnung von 1855 sich bewährt haben und mit Befriedigung zu konstatieren ist, dafs gerade in neuerer Zeit von hervorragenden Fachmännern des Auslandes der in Österreich bestehenden Einrichtung der juristischen Studien vor den anderwärts geltenden der Vorzug zuerkannt wurde, so läfst es sich doch andererseits nicht verkennen, dafs in vielen Beziehungen eine Reform wünschenswert und geboten ist."

Der Minister richtete dann weiterhin an jede juristische Fakultät acht Fragen, deren Beantwortung bis zum 1. Januar 1887 an ihn eingereicht werden sollte. Diese meist umfangreichen Antworten sind jetzt

*) Aus der Täglichen Rundschau, Unterhaltungsbeilage. 1887. Nr. 186.

unter dem Titel: „Gutachten und Anträge zur Reform der juristischen Studien“ in Wien bei Karl Gorischek erschienen.

In einem dieser Gutachten giebt Dr. Puntschart, Professor der Rechtswissenschaft in Innsbruck, seine „in reicher Erfahrung erworbene“ Ansicht über die Mängel der Gymnasialbildung, welche für viele Leser auch dieser Zeitschrift von Interesse sein dürfte. Einige Hauptstellen des Gutachtens mögen deshalb hier ihre Stelle finden:

„Das oberste Princip der bestehenden Ordnung für die Gymnasialstudien ist die Gewinnung der allgemeinen Bildung.“ Allein „allgemein“ ist ein quantitativer Begriff. Im Sinne dieser Bildung wäre derjenige der Gebildetste, welcher den gröfsten Umfang des Wissens sich angeeignet hat. Damit aber wird die Bildung mit der Gelehrsamkeit identifiziert. Allein einen Menschen bilden heifst nicht, denselben mit reichem Wissen ausstatten, sondern seine sittlichen und intellektuellen Anlagen und Kräfte entwickeln, zu höherer Entfaltung bringen, den Naturmenschen auf eine höhere Stufe des sittlichen und geistigen Lebens erheben. Das Ergebnis solcher Bildung ist nicht die Gelehrsamkeit, sondern sittlicher Charakter und wissenschaftliche Denkfähigkeit. Die Gelehrsamkeit für sich allein giebt weder den sittlichen Charakter noch die wissenschaftliche Denk- und Produktionsfähigkeit, und ist vielmehr die Mutter der zahlreichen specifischen Charakterschwächen der blofsen Gelehrten.

Weil nun die in Rede stehende Studienordnung einen falschen Begriff der Bildung hat und unter der Bildung die Gelehrsamkeit versteht, so sind auch die zur Erreichung ihres Zieles gewählten Mittel nicht Mittel der Bildung, sondern der Gelehrsamkeit. Denn sie unterscheidet nicht den Bildungsstoff vom Wissensstoff. Es soll damit nicht gesagt sein, dafs die Disciplinen unseres Gymnasiums nur Wissens-, nicht aber auch Bildungsstoffe sind. Allein wenn Bildungsstoffe nur jene Materien des Wissens sind, welche am meisten geeignet erscheinen, durch methodische Vertiefung in dieselben die sittlichen und geistigen Anlagen und Kräfte des Menschen zu entwickeln und zu höherer Entfaltung zu führen, so haben offenbar für diese Bildung nicht alle jene Disciplinen den gleichen Wert, und dies gilt sogar von den einzelnen Teilen einer dazu sehr wohl geeigneten Disciplin.

Beispielsweise haben die rein linguistische Behandlung der römischen und griechischen Klassiker, die Übungen in der lateinischen und griechischen Stilistik am Obergymnasium, die Lektüre kriegsgeschichtlicher Partien der Klassiker, überhaupt die Kriegsgeschichte, weder für die sittliche, noch für die intellektuelle Bildung einen Wert, und doch wird damit so viel der kostbaren Zeit verloren! Ebenso läfst sich der Bildungsstoff vom Wissensstoff auch in den übrigen Gymnasialdisciplinen unterscheiden. So ist z. B. Kirchengeschichte reiner Wissensstoff und gehört in die Theologie.

Infolge dieses falschen Bildungsbegriffes entbehren auch die Lehrer einer festen Direktive für die Behandlung ihrer Disciplinen, und jeder derselben glaubt seine Disciplin desto besser zu vertreten, je mehr er von dem Wissensstoff, welcher ihn persönlich interessiert, dem Schüler bietet. Daher die beständigen Klagen über die Überbürdung der Schüler, und die seit Dezennien fortgesetzten Bemühungen und Beratungen zur Abhilfe dieser Klagen, die aber erfolglos bleiben mufsten, weil das oberste Princip dieser Studien falsch ist.

Diesem Princip der Gelehrsamkeit ist es zuzuschreiben, dafs die sittlichen und geistigen Kräfte der überwiegenden Mehrzahl der Schüler unentwickelt bleiben, dafs die Schüler weder für sittliches Leben, noch für wissenschaftliches Streben begeistert und gewonnen werden, in ihren Charakteren unveredelt und wissenschaft-

lich denkunfähig bleiben. Namentlich läfst sich die wissenschaftliche Denkfähigkeit nicht durch die Ausbreitung über reichen Wissensstoff, oder wohl gar über viele Wissensstoffe zu gleicher Zeit, sondern nur durch methodische Vertiefung in die einzelnen Wissensstoffe und ihren inneren Zusammenhang erreichen.

Sind nun schon die angedeuteten negativen Ergebnisse unserer Gymnasialstudien traurig genug, so ist es für die Universitätsstudien noch trauriger, dafs die Schüler für wissenschaftliches Leben und Streben sogar abgestumpft und mit Widerwillen gegen wissenschaftliche Thätigkeit erfüllt werden, mit Sehnsucht den Augenblick erwarten, in welchem sie von den drückenden Fesseln der Gymnasialordnung befreit und sofort in den Vollgenufs der Freiheit der Universitätsstudien und des bei so bewandten Umständen notwendig entarteten studentischen Vereinslebens gelangen sollen.

Erklärbar ist dieses System der blofsen Gelehrsamkeit daraus, dafs es eine gelehrte materielle Vorbereitung für die Universität, eigentlich für die theologische und philosophische Fakultät, geben wollte. Allein nachdem sich Schüler und Lehrer mit allerlei Wissensstoff bis zur Erschöpfung abgemüht haben, wird thatsächlich nicht einmal die materielle Vorbereitung für die Universität erreicht, während wirklich humanistische Gymnasien nicht blofs die notwendige materielle Vorbereitung, sondern auch die unumgänglichen sittlichen und intellektuellen Vorbedingungen für die Universitätsstudien hätten schaffen können."

Ernst oder Scherz?

Eine Stimme über die Abschaffung der Mathematik aus den Gymnasien.

In einem Artikel der Schlesischen Zeitung,*) betitelt „Mathematik und Humanität", wird folgendes ausgeführt:

Fast das ganze zweite Lebensdecennium derjenigen, welche sich dem höheren Staatsdienste zuwenden oder sich einem der sogenannten gelehrten Berufe widmen, wird durch das Gymnasium in Anspruch genommen. Man bedenke, was das heifst. Jenes Decennium bedeutet im Menschenleben etwa das, was die beiden ersten Frühlingsmonate im Jahreslaufe. Es ist die Zeit des Knospens und Keimens, die Zeit der Hoffnung und der Freude. Frage sich nun ein jeder, der unsere Lateinschule hinter sich hat, ob es wirklich Frühlingsmonde seines Lebens waren, die er auf ihr verbracht hat. Gewifs nur eine kleine Zahl besonders glücklich beanlagter Naturen wird diese Frage mit einem rückhaltlosen „Ja" beantworten. Der grofsen Mehrheit war der junge Lebensfrühling verdüstert, und nur der Hoffnungsmut, der glückliche Leichtsinn der Jugend half über die qualvollen Jahre hinweg. Denn weitaus der Mehrheit fehlte schon die Grundbedingung menschlichen Glückes: das gute Gewissen. Fast für jeden gab es einzelne Lehrzweige, in denen er vollständig darauf verzichtete, die zur Erreichung des Zieles gestellten Bedingungen anders als im Wege der Täuschung zu erfüllen.

Wir haben früher bereits darauf hingewiesen, dafs der beim Unterrichte in den alten Sprachen vorwaltende Formalismus für eine grofse Zahl hervorragend begabter Schüler Höllenqualen schafft. Es giebt Naturen, denen schon in der Jugend eine Eigentümlichkeit anhaftet, die im Alter ziemlich allgemein ist: ihr Gedächtnis bleibt hinter dem Verstande zurück,

*) Aus der Schlesischen Zeitung Nr. 598 vom 28. August 1887. D. Red.

es wird ihnen schwer, etwas zu behalten, bei dem man sich nichts denken kann. Auch die gescheitesten Leute müssen sich in höheren Lebensjahren auf Orts- und Personennamen lange besinnen, weil der Verstand hier dem Gedächtnis nicht zu Hülfe kommt, während ihr eigentliches Wissen ihnen treu bleibt, ihr Denkvermögen sich mit den Jahren sogar noch verschärft. Wenn nun beim heranreifenden Jünglinge schon ein solches Übergewicht des Verstandes über das mechanisch operierende Gedächtnis vorhanden ist, so wird demselben das Memorieren der Vokabeln und unregelmäfsigen Formen des lateinischen und des griechischen Zeitworts, später auch das der sogenannten Loci, die nur über das grammatische Denken hinweghelfen sollen, natürlich unsagbar viel schwerer als jenen Knaben, die mit einem leicht aufnehmenden Gedächtnis ausgestattet sind, dafür aber nicht selten gegen alles Denken eine instinktive Abneigung haben. Sobald erstere aber den Formen in der Lektüre begegnen, bei der ja auch der Verstand arbeitet, erkennen sie dieselben sofort. Wenn solche Schüler dann Sinn und Verständnis für den Schriftsteller bekunden, so sollte das eigentlich genügen. Leider aber ist dem anders. Nach den Individualitäten wird in unseren mittleren Gymnasialklassen gar nicht unterschieden.

Dies nur beiläufig. Wir wollen heute von einer anderen Tortur reden, einer Tortur, deren Milderung wir von der unsere Zeit auszeichnenden Humanität immer noch erhoffen. In den alten Sprachen erreicht schliefslich auch der mit weniger Befähigung für mechanisches Auswendiglernen ausgestattete, im übrigen aber wohlbegabte Schüler sein Ziel. Hat er sich erst bis Prima durchgequält, so geht es. Aber in einer anderen Disciplin, in der Mathematik, bringt eine sehr grofse Zahl von Schülern ein kostbares Stück Leben zum Opfer, ohne auch nur das geringste Resultat zu erreichen.

Im Laufe der Jahre haben uns hundert und mehr junge Leute Abiturientenzeugnisse vorgelegt, selbst solche mit leidlichen Censuren in der Mathematik, aber auf je zehn kam nicht einer, der sich auch nur mit den allerersten Anfangsgründen dieser Wissenschaft vollständig vertraut gemacht hätte.*) Indem wir diese Thatsache konstatieren, bemerken wir ausdrücklich, dafs es sich hier um jüngere Männer handelt, die sich neben ihrer klassischen Bildung neuere Sprachen und ein reiches Wissen

---

*) In einer Note sei es uns gestattet, ein weniges aus unserer Erfahrung mitzuteilen: Einem jungen Manne stellten wir folgende einfache Aufgabe aus der Zinseszinsrechnung: Wenn Berlin heute so und so viel Einwohner zählt und seine Bevölkerung jährlich um so und so viel Prozent wächst, wie grofs ist dieselbe am Ende des Jahrhunderts? Auf unsere Frage, ob er das rechnen könne, erfolgte die an sich schon bedenkliche Antwort: „Ich glaube." Als er eine Weile lang Rechenversuche gemacht hatte, diktierten wir ihm die Formel, griffen dann in unsere Bibliothek und gaben ihm eine Logarithmentafel. Das führte zu beiderseitiger Erlösung. Offen sagte er: „Wenn man dazu Logarithmen braucht, dann geht's nicht. Die schlug in unserer Klasse immer nur einer auf, der sie den anderen diktierte." Nach seinem Abiturientenzeugnisse hatte er in der Mathematik Befriedigendes geleistet. Seiner Mitteilung nach war es ihm beim Examen in der Trigonometrie — auch ohne Kenntnis der Logarithmen — sehr gut gegangen. Einzelne Formeln hafteten noch mechanisch in seinem Gedächtnis.

Einen anderen jungen Mann, der noch auf der Universität war, fragten wir, ob er den pythagoreischen Lehrsatz kenne? Seinem dreisten „Ja" folgte die weitere Frage, wie sich die Seite des Quadrates zur Diagonale verhalte. Antwort: „Das haben wir nicht gehabt." Es wurde ihm gesagt: wie 1 zu $\sqrt{2}$, und der Beweis erfordert. Auch den blieb er schuldig trotz seiner Kenntnis des Pythagoras.

Wieder ein anderer liefs uns erkennen, dafs er die Rangordnung der Species und die Bedeutung der Klammern nicht kenne. $(\sqrt[3]{8})$ war ihm ein unfafsbarer Begriff. $7 + 3 \times 4$ war für ihn 40.

Jüngst trafen wir im Gebirge mit einem der höheren Gesellschaftssphäre angehörenden Primaner, der unmittelbar vor der Reifeprüfung stand, zusammen. Als wir seine absolute Unkenntnis der ersten Elemente der Mathematik bemerkten und ihm rieten, wenigstens diese noch zu repetieren, gab er die Antwort: „Es wird nicht angehen und kaum nötig sein. Ich hoffe im Latein auf Gut, und dann gleicht es sich aus."

Nur ausnahmsweise haben wir erfreuliche Erfahrungen gemacht. So jüngst mit einem Oberprimaner des evangelischen Gymnasiums in Posen und vor einiger Zeit mit Abiturienten eines städtischen Gymnasiums in Breslau.

in der Geschichte, der Nationalökonomie und anderen Fächern angeeignet hatten, die dabei streng logisch dachten und — was unsere Gymnasien doch nur ausnahmsweise erzielen — sogar korrektes, klares, nicht phrasenhaftes Deutsch schrieben. Wir selbst legen auf die Geistesbildung, welche die Mathematik gewährt, hohen Wert, aber wir wollten viel lieber auf die Mathematik als Unterrichtsgegenstand an unseren Gymnasien gänzlich verzichten, als es bei dem gegenwärtigen Zustande belassen sehen. Unsere Gymnasiasten haben, wenn sie regelmäſsig aufsteigen, sieben Jahre hindurch mathematischen Unterricht, und zwar drei Jahre hindurch drei Stunden, vier Jahre hindurch vier Stunden die Woche. Nehmen wir nun das Schuljahr zu 41 Wochen an, so ergiebt dies 1025 Lehrstunden, in denen durchweg von Lehrern und Schülern die höchste geistige Anspannung erfordert wird. Zu dieser Stundenzahl tritt wenigstens noch die Hälfte für häusliche Arbeiten oder „um sich die Mathematik zu besorgen“, was also im ganzen etwa 1500 Stunden ausmacht, die all' denen aus dem Jugendleben zwecklos herausgerissen sind, welche, wie so viele, nie zur Herrschaft über die allerersten Elemente gelangen und darum dem weiteren Unterrichte nie folgen können. Es ist immerhin möglich, von einer fremden Sprache etwas zu erlernen, sogar zu einer gewissen Leistungsfähigkeit in derselben zu gelangen, auch wenn sich einige Grundregeln der Grammatik nicht zum Verständnis durchgerungen haben; sündigen wir doch in unserer eigenen Muttersprache oft genug gegen die Grammatik; es ist auch möglich, sich die neuere Geschichte Deutschlands in dem erforderlichen Maſse zu eigen zu machen, ohne mit der Geschichte der Merowinger vertraut zu sein, aber es ist absolut unmöglich, die Trigonometrie geistig zu erfassen, wenn nicht das volle Verständnis dafür erschlossen ist, daſs ein Sinus nichts anderes ist als eine absolute Zahl, ein Bruch. Aber wie wenige der Herren mit klassischer Bildung sind sich über solche Dinge klar!

Man sage nicht, daſs wir übertreiben, man verweise nicht auf die Hefte der Schüler, auf die Antworten, die in der Klasse gegeben werden, nicht auf die Ergebnisse der unter den Augen eines Regierungskommissars stattfindenden Abgangsprüfungen. Bei allem, was schriftlich zum Ausdruck gelangt, bleibt der geistige Autor zweifelhaft, zuweilen genügt ein einziger für eine ganze Klasse. Die mündlichen Antworten aber bestehen zumeist aus auswendig gelernten Lehrsätzen und Formeln und ebenso mechanisch eingepaukten Beweisen. Der Geist hat an dem Erlernten keinen Anteil, das Erlernte ist ephemerer Natur, und fürs Leben wird nichts gewonnen, am allerwenigsten logisches Denken.

Den vielfach ausgezeichneten Lehrern der Mathematik an unseren Gymnasien ist wahrlich kein Vorwurf zu machen. Ihnen ist eine unlösbare Aufgabe gestellt. Von den 40 bis 60 Schülern einer Klasse verzichten die meisten darauf, in der Mathematik etwas zu leisten, sei es, weil für die Versetzung die Erlernung des Klassenpensums im Griechischen und Lateinischen ausreicht, sei es, weil ihnen in dem frühen Alter, in welchem der mathematische Unterricht beginnt, die erforderliche Geistesanstrengung unbequem oder unmöglich ist. Diesen widerstrebenden Kräften gegenüber ist der Lehrer machtlos. Ganz abgesehen davon, daſs man niemanden zum Denken zwingen kann, muſs anerkannt werden, daſs bei einer so groſsen Schülerzahl die dem Lehrer zugemessene Zeit gar nicht reicht, um sich überzeugen zu können, ob bei dem einzelnen Schüler dasjenige Wissen und Können, auf welchem im Unterrichte fortgebaut werden soll, genügend festliegt. Alle Achtung vor Lehrern, denen es gelingt, auch nur den zehnten Teil ihrer Schüler zur vollen Beherrschung des Pensums zu bringen!

Wir bleiben dabei: für die groſse Mehrheit unserer die Gymnasien besuchenden Jugend sind die 1500 auf die Mathematik verwandten Stunden nur Stunden absolut nutzloser Qual. Diese

Zeit wäre besser, segensreicher verwandt, wenn jene Schüler die Stunden „schwänzten" und sich im Freien tummelten. Will man dem mathematischen Unterricht an den Gymnasien seinen obligatorischen Charakter nicht nehmen, so ändere man wenigstens das System. Der selige Lasker, der von der Sache etwas verstand, hat einmal ausgesprochen, dafs ein normal begabter junger Mensch die ganze Mathematik des Gymnasiums bei zwei Stunden Arbeit täglich binnen acht bis zehn Monaten erlernen könne. Und das ist richtig, aber nur unter der Voraussetzung, dafs der Lehrer es nur mit wenigen und willigen Schülern reiferen Alters zu thun hat. Dementsprechend lassen sich unsere öffentlichen Schulen nicht organisieren. Aber es würde doch schon viel erreicht werden, wenn bis zur Sekunda nur das bürgerliche Rechnen gepflegt und hier erst die eigentliche Mathematik in Angriff genommen würde, wenn dann ferner die Klassen so geteilt würden, dafs der Lehrer es höchstens mit zwanzig Schülern zu thun hätte, wenn endlich neben dem didaktischen Unterricht in besonderen Stunden ein, womöglich von anderen, jüngeren (? D. Red.) Lehrern geleiteter applicatorischer Unterricht einherginge, in welchem jeder Schüler praktisch zu zeigen hätte, was er verstanden hat und anwenden kann und was nicht.*) Es würde auch kein Unglück sein, wenn behufs gründlicherer Durcharbeitung der Lehrstoff beschränkt werden müfste. Bezweckt doch der mathematische Unterricht auf dem Gymnasium nur die Schulung des Geistes zum logischen Denken.

Wir bescheiden uns bei diesen Andeutungen; mögen Berufenere Besseres ersinnen. Das aber steht fest: dem schreienden Übel mufs abgeholfen werden, nicht um der Wissenschaft willen, sondern vor allem aus Rücksichten der Menschlichkeit.

Nachschrift der Redaktion. Wir richten an die Leser dieses Blattes, also zugleich an sehr viele noch im Amte befindliche Lehrer der Mathematik die ernste Frage: Steht es wirklich so schlimm mit den Erfolgen der mathematischen Lehrkunst, oder dürfen die vom Verf. angeführten Fälle nur als Ausnahmen betrachtet werden? Lassen sich denselben nicht weit mehr günstige Erfolge gegenüberstellen?

Eins aber wird man, falls die angeführte Aufserung des „Primaners" verbürgt ist, hieraus aufs neue lernen, nämlich: dafs die sogenannte „Kompensation", wie wir in ds. Ztschr. schon öfter ausgeführt haben, eine beklagenswerte, ja verdammenswerte Einrichtung ist. Denn der in der Mathematik faule und unwissende Abiturient glaubt ja durch das „Gut" im Latein seine mangelhaften mathematischen Kenntnisse auszugleichen! Ist dann die Mathematik noch „Hauptfach"? —

Zur Statistik der höheren Schulen.

Die nüchternen Zahlen der Schulstatistik im Centralblatt der preufsischen Unterrichtsverwaltung geben viel zu denken, sobald man die einzelnen Jahrgänge vergleicht. Gegen die eiserne Logik dieser Zahlen ist alle Sympathie und alle Antipathie, alle Agitation für und wider vollständig ohnmächtig. Werfen wir einen Blick auf die Abiturientenzahlen seit der preufs. Lehrplan-Reform von 1882, so ergiebt sich folgende Tabelle:

	Gymnasien.	Realgymnasien.	Obrreealschulen.	Summe.
1882/83	3460	679	61	4200
1883/84	3420	638	46	4104
1884/85	3583	623	34	4240
1885/86	3567	574	32	4173

*) So war der mathematische Unterricht, ehedem wenigstens, in der Artillerie- und Ingenieurschule organisiert.

Für das Gymnasium ergiebt sich eine Steigerung mit Schwankungen. Die Zunahme beträgt 107 oder 3 %, sie ist also für einen vierjährigen Zeitraum nicht bedeutend, besonders wenn man den Zuwachs der Bevölkerung mit in Anschlag bringt. Bei dem Realgymnasium findet dagegen eine regelmäfsige Abnahme statt, die sich auf 105 beläuft, was 15 % bedeutet. Wenn dies noch 20 Jahre lang fortdauern sollte, würde man etwa am Ende angelangt sein. Die Statistik sagt mit grofser Wahrscheinlichkeit voraus, dafs, wenn keine Berechtigungserweiterung stattfindet, eine gröfsere Anzahl ärmerer Städte sich entschliefsen mufs, auf die Oberklassen des Realgymnasiums zu verzichten oder zum Gymnasium überzugehen. Die Berechtigungserweiterung ist aber leider weniger wahrscheinlich geworden, nachdem man gesehen hat, wie die Standesinteressen der höheren Staatsbaubeamten mächtig genug waren, der Oberrealschule die wichtigste Berechtigung zu entziehen. So bedauerlich dies im Interesse der modernen Bildungsbestrebungen sein mag, schwerlich wird es sich sobald ändern lassen. Bei den Oberrealschulen handelte es sich um eine Einbufse von 29, d. h. von 47 %. Ob nach der Berechtigungsentziehung von 1886 der Herabgang langsamer wird, ist höchst unwahrscheinlich. Wenn nun trotzdem die Frequenz im obigen Zeitraume von 4120 auf 5120 gestiegen ist, so ist klar, dafs der Schwerpunkt dieser Anstalten in den Unterklassen liegt, die demnach in ihrer lateinlosen Einrichtung ein sehr gesundes Institut sind. So sympathisch wir auch diesen Schulen gegenüberstehen, so müssen wir es doch bei der augenblicklichen Sachlage für das Zweckmäfsigste erachten, bis auf weiteres auf die Oberklassen zu verzichten und den Stamm der heranwachsenden höheren Bürgerschulen und Realschulen zu verstärken, von denen besonders die ersteren eine vielversprechende Zukunft vor sich haben. Dagegen mufs man im Interesse der modernen Entwickelung davon abraten, durch Einführung des Latein die Schule nach antiker Richtung umzuformen. Schliefslich sei bemerkt, dafs im Jahre 1886 die Zahl der Gymnasien 259, die der Realgymnasien 89, die der Oberrealschulen 14 war, so dafs auf jedes Gymnasium durchschnittlich 14 Abiturienten kamen, auf jedes Realgymnasium $6\frac{1}{4}$, auf jede Oberrealschule $2\frac{1}{4}$. Die Durchschnittsfrequenz war bei den drei Gruppen der Reihe nach 309, 278, 366, am schwächsten also bei den Realgymnasien, am stärksten bei den Oberrealschulen. Im Jahre 1882 waren die entsprechenden Zahlen 309, 297, 343, so dafs die Realgymnasien auch in der Durchschnittsfrequenz abgenommen haben. Die Abiturienten bilden bei den drei Gruppen $4\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$ % der Schülerzahl. Die obigen Gesamtsummen der Abiturienten lassen eine schwache Abnahme erkennen, so dafs es der Bevölkerungszunahme gegenüber scheint, als ob man langsam anfangen wollte, auf das vollständige Absolvieren der höheren Lehranstalten zu verzichten und sich mit mittlerer Bildung zu begnügen, was bei der Überfüllung der Studienlaufbahnen von grofser wirtschaftlicher Bedeutung sein würde. Hlz.

Cavaleri oder Cavalieri?

Über Cavalieri findet sich in Poggendorfs biogr.-litt. Handwörterbuche folgende Notiz:

Cavalieri (nicht Cavaleri), Bonaventura Jesuit, Prof. d. Mathematik an d. Universität Bologna von 1629 an (* 1598 ib., † 1647 ib.), nicht zu verwechseln mit Cavalleri, Jesuit, Prof. d. Mathematik an d. Universität zu Cahors*) und später der Theologie zu Toulouse (* 1698, † 1768).

*) Dieser Ort ist im Register des neuen Guthe-Wagner nicht zu finden.

In Klügels math. Wörterbuch (Lpz. 1803) sind unter Art. Cavaleri (so ist dort geschrieben) die zwei Hauptwerke dieses Mathematikers angegeben:

1) *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Autore F. Bonaventura Cavalerio.* Bononiae 1635. 2. Ausg. 1653. Dieses Werk ist „erläutert" durch 2) *exercitationibus geometricis.* ib. 1647.

Die tiefsten Wasserfälle ein Seitenstück zu den höchsten Bauwerken.*)

Notiz von Dr. Wertsch in Spremberg.

Über die Dimensionen der berühmten Wasserfälle besteht bis jetzt eine eben so grofse Meinungsverschiedenheit wie über die Höhe der höchsten Bauwerke. Nachfolgende Tabelle bekannter Wasserfälle möchte eine Anregung zur Aufstellung einer vollständigen, resp. genaueren Übersicht sein. Es sind solche Fälle, die sich durch ihre Höhe und solche, die sich durch ihre Breite auszeichnen, unterschieden. Wenn ein Fall in mehreren Stufen herabstürzt, ist die Anzahl derselben durch eine in Klammer gesetzte Zahl angedeutet.

Elbfall im Riesengebirge	45	m hoch
Handeggfall im Haslithal	75	„ „
Anio (grofser Fall) bei Tivoli	96	„ „
Vöringfofs am Hardangerfjord	145	„ „
Gasteinerfälle (2) im Gasteiner Thal	148	„ „
Skjäggedalsfofs am Hardangerfjord	160	„ „
Tosafälle (3) im Val Formazza	165	„ „
Velinofälle (3) bei Terni	180	„ „
Rjukanfofs in Thelemarken	245	„ „
Vettisfofs am Sognefjord	260	„ „
Vermefofs im Romsdal	300	„ „
Krimlerfälle (3) im Ober-Pinzgau	350	„ „

Imatrafall in Finnland	45	m breit	10	m hoch**)
Elfkarleby bei Gefle	80	„ „	15	„ „
Trollhättafälle (4) in der Götaelf	100	„ „	33	„ „
Rheinfall bei Schaffhausen	115	„ „	30	„ „
Niagara im St. Lorenzstrom	600	„ „	54	„ „
Victoriafall im Zambesi	2500	„ „	120	„ „

Aufforderung,

die Herausgabe der Werke Galileis betreffend.

Unter den Auspicien Seiner Majestät des Königs von Italien und auf Kosten des Staats wird die Veröffentlichung einer neuen und vollständigen Ausgabe der Werke Galileo Galileis stattfinden. Mit der Redaktion

*) Man vgl. ds. Ztschr. XIII, 90; XIV, 478 und XVI, 478. D. Red.

**) Im Lehrbuche der Geographie von Guthe-Wagner, 4. Aufl., S. 645, ist dieser Wasserfall „wohl der grofsartigste Wasserfall Europas" genannt. Dieselbe Stelle findet sich in der 5. Aufl. dieses Buches, Tl. II, S. 393. (Die 5. Aufl. dieses Lehrbuches ist gegen die 4. sehr verändert, so dafs die gleichnamigen Stellen bei dem Mangel eines vergleichenden Orientierungsmittels schwer zu finden sind.) D. Red.

derselben betraut, richte ich an die Vorsteher von Archiven wie von öffentlichen und Privatbibliotheken, an Autographensammler, wie an alle Gelehrten die höflichste Bitte, mich durch den Nachweis von Galilei herrührender oder auf ihn bezüglicher Dokumente in der Ausführung des schwierigen Unternehmens unterstützen zu wollen.

Im Besondern kommen für die neue Ausgabe in Betracht: neben den Schriften Galileis, von ihm geschriebene und an ihn gerichtete Briefe sowie von andern Zeitgenossen gewechselte Briefe, die in irgend welcher Weise seine Person und seine Lehren berühren, sowie Dokumente jeder Art, die auf sein Leben und seine Werke Bezug haben.

Sehr erwünscht wird in erster Linie der Nachweis von ungedrucktem Material sein, aber nicht minder dankenswert jede Mitteilung über Originalmanuskripte oder aus der Zeit Galileis stammende Abschriften später gedruckter Texte, da auch diese insgesamt nicht ohne vorgängige sorgsame Vergleichung in der neuen Ausgabe reproduciert werden sollen.

Dr. Antonio Favaro,
Professor an d. kgl. Universität zu Padua.

Personalnachrichten.

1) An die Stelle des Hrn. Geheimrats Dr. Wiedemann, Prof. der physikal. Chemie in Leipzig, welcher den Lehrstuhl der Physik des in den Ruhestand getretenen geh. Hofrats Prof. Dr. Hankel, des bekannten Physikers, seit Ostern ds. J. eingenommen hat, ist berufen worden der Prof. der phys. Chemie Ostwald, vom Polytechnikum in Riga. (S. einen Art. im Leipz. Tagebl. 1887, Nr. 242, Beil. II.).

2) Der in den weitesten Lehrerkreisen durch Abfassung bewährter und vielbenutzter Lehrbücher der El.-Mathematik bekannte Lehrer der Mathematik und Prof. am Breslauer Elisabeth-Gymnasium Dr. L. Kambly ist am 18. August ds. J. im 76. Lebensjahre verstorben. Wir hoffen über ihn einen Nekrolog bringen zu können. (Ein Bildnis desselben brachte die Ztg. f. h. Unterr.-Wesen, Jahrg. 1884, Nr. 51).

Fragekasten.

47) Dr. W. in Sp. Giebt es eine gedruckte Zusammenstellung der Sonnen- und Mondfinsternisse, die sich in den letzten beiden Jahrhunderten ereignet haben?

Fragen über physiologische Wirkungen der Elektricität.

48) K. S. in U.-O. *a*) Wird der Mensch getötet, wenn er direkt am Kopfe vom Blitze getroffen wird, wobei der Blitz eine deutliche Spur zurückläſst? Oder ist es möglich, daſs er am Leben bleiben kann?

b) Ist die Sphäre bekannt, innerhalb welcher elektrische Entladungen stattfinden können, ohne, daſs sie Störungen im menschlichen Körper hervorrufen? Und wenn diese Sphäre bekannt, läſst sie sich genau in Grenzen einschlieſsen?

c) Ist beim Einschlagen des Blitzes im menschlichen Körper ausschlieſslich die Trennung und Wiedervereinigung der entgegengesetzten Elektricitäten im Innern des menschlichen Körpers das zerstörende Element? Oder wirkt hier noch eine andere Kraft? Giebt es darüber eine mathematisch-physikalische Abhandlung?

d) Was ist der sogenannte „kalte Schlag" beim Gewitter? Giebt es darüber eine wissenschaftliche Abhandlung?

Antwort der Redaktion: Wir verweisen den Fragesteller vorläufig auf Heim, Zentralblatt für Elektrotechnik Bd. 9, 1887. Nr. 26, S. 624. Ferner auf *Lumière électrique,* spez. die Mitteilungen von *Arsouval*. Gründlich dürften diese Fragen doch wohl nur dann beantwortet werden, wenn ein vom Blitz Getroffener am Leben bleibt und bei vollem Bewufstsein über die Katastrophe Auskunft geben kann. Denn absichtlich wird doch wohl niemand — und gewifs auch der Fragesteller nicht — sich einem so gefährlichen Experiment aussetzen wollen!

49) Hlz. in H. Ein bekannter schöner Beweis des Pascalschen Lehrsatzes für den Kreis stützt sich auf den Satz von den Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise, die in 4 Gruppen zu dreien auf einer geraden Linie liegen. (Vgl. z. B. Steiner-Geiser.) Die Lehrbücher übergehen aber die darin liegende Schwierigkeit, dafs die drei als Ähnlichkeitspunkte aufzufassenden Punkte nicht selbstverständlich eine geradlinige Gruppe bilden. In der Regel heifst es: „die Punkte sind Ähnlichkeitspunkte, liegen also auf gerader Linie."

Wie läfst sich der fehlende Nachweis bequem liefern?

Zum Antwortkasten.

(Heft 6, S. 479.)

(Antwort auf die Frage Nr. 44 von Dr. A.)

Es sei noch aufmerksam gemacht auf: Edmund Schlögelhofer, (Prof. der Mathematik am k. k. Obergymnasium zu Seitenstetten), Compendium der Geschichte der Mathematik. I. Tl. (59 S.) geht von Thales bis zur Eroberung Alexandriens. — II. Tl. (48 S.) bis Huyghens. — III. Tl. (56 S.) von Leibnitz bis in die neueste Zeit. Ohne Angabe des Verlegers. Druck von A. Halauska in Waidhofen a. d. Ibbs. 1876.

Das einheitliche Format der Schulprogramme.

In Bezug auf unsere Anmerkung Heft 6 ds. Jahrg. S. 480*) schreibt uns ein Mitarbeiter Folgendes:

„Eine Verfügung des preufs. Unterrichts-Ministers aus dem J. 1875 sagt, dafs künftig alle Programme in gleichem Format gedruckt werden sollen und dafs, sobald dasselbe festgesetzt sein würde, die Teubner'sche Verlagsbuchhandlung eine Formatprobe an alle Lehranstalten versenden würde. Letzteres ist im September 1875 geschehen. Das Format ist (nach der Beschneidung) $25\frac{1}{2}$ cm : $20\frac{1}{2}$ cm. Unseres Wissens haben alle an dem Programmaustausch beteiligten Staaten des deutschen Reichs dieses Format acceptiert — aufser Bayern."

Auf eine Anfrage bei der Verlagshandlung wurde uns die Richtigkeit dieser Mitteilung bestätigt. D. Red.

*) Man wolle unsern dort ausgesprochenen Wunsch nicht etwa — wozu manche geneigt sein dürften — für „kleinliche Nörgelei" halten; wer, wie eine Redaktion, viele solcher Programme aufbewahren soll und nicht den Raum einer k. Univ.-Bibliothek zur Verfügung hat, wird unsern Wunsch begreiflich finden. —

Bei der Redaktion eingelaufen.

Feaux, Rechenbuch und geometrische Anschauungslehre. Achte Aufl. bearb. von Busch. Paderborn-Münster, Schöningh 1887.
Müller, Die Elemente der ebenen Trigonometrie. Metz, Scriba (o. J.).
Lolling, Die Quadratur des Zirkels. Hamburg, Kramer 1887.
Plank, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Leipzig, Teubner 1887.
Leunis, Schulnaturgeschichte I. Zoologie (bearbeitet von Ludwig). Hannover, Hahn 1887.
Rosenberger, Die Geschichte der Physik. Tl. III. Abt. 1. Braunschweig, Vieweg 1887.
Kohlrausch, Physik des Turnens. Hof, Lion 1887.
Grashof, Theoretische Maschinenlehre. 3. Bd. 3. Lief. Hamburg-Leipzig, Vofs 1887.
Meister, Flora von Schaffhausen (wissensch. Progr.-Beilage s. unten). Schaffhausen, Meier 1887.
Naturhistorischer Schulatlas, 5. Aufl. Leipzig, Brockhaus 1885.
Zeitschriften und Programme. Schlöm. Zeitschr. XXXII, 5. — Nouv. Ann. III. ser. 1887, Juli, August, September. — C.-O. XV, 7—8.*) — Päd. Archiv XXIX, 5. 6. 7. 8. — Zeitschr. f. R.-W. XII, 7—8. — Zeitschr. f. Schulgeogr. VIII, 10. — Berichte d. freien d. Hochstifts zu Frankfurt a/M. III, 3—4. — Jahresberichte: Wien, Gymn. zu d. Schotten (lat. Abhandlung).**) — Schaffhausen (wissensch. Beilage): Die Flora von Schaffhausen s. o. — Linz, Staatsoberrealschule 1886/7 (math. Abh. von Schmid, Form, Anziehung u. Beschaffenheit der Erde.)
Eingelaufene Beiträge: Anonymus. Bem. zu W.s Art. — B. in F. Pythagoreische Gleichung (m. F.). — Br. in W. Bem. zu W.s, T.s und Anonym. Art. — v. D. in L. (Holland). Sep.-Abdr. 10 Stück. H. f. Orig.-Art. brieflich. Kleinere Notizen gratis. — O. in Rem. Polygone und Polygramme. — R. in O. Alte Programme z. Pythagoräer („Zündhölzchenbeweis“). — S. in B. und an einige Andere: Warum geben Sie denn Ihre Adressen in Ihrem Sommeraufenthalt nicht genau an? Die Sendungen kamen wieder zurück! Weiteres im nächsten Hefte. — Z. in L. Zur Lehre von den Komplexionen.

Bis zum 1. Okt. waren für das Aufg.-Rep. noch eingelaufen Aufl. von: Brockmann 675. 684. End 684. 685. 692. 693. Hodum 670. 672—675. 679—680. 683—687. 689. 692b—693. 697. Meyer (Dresden) 662. 664. 674. Stoll 702—707. 711—712. Treumann (Livland) 693. 705. Züge (Lingen) 692. 697.

NB. Wir bitten die Herren Verfasser von Aufsätzen dieses Jahrgangs und überhaupt die Leser für das 8. Heft um Mitteilung etwa aufgefundener Druckfehler.

---

*) Erscheint von jetzt ab wieder in Monatsheften.
**) Wir bitten, uns blose Schulnachrichten oder Programmabhandlungen altphilolog. Inhalts nicht zu senden. D. Red.

Beiträge zur algebraischen Analysis.

Von Dr. O. Schlömilch, Geh.-Rath a. D.

Vorbemerkung. C. G. J. Jacobi äufserte einmal: „auf Sperlinge soll man nicht mit Kanonen schiefsen", womit er selbstverständlich sagen wollte, dafs es Ungeschick verrät, wenn einfache Aufgaben mit grofsen Hülfsmitteln angegriffen werden. Leider geschieht dies sehr oft, und um nur ein Beispiel anzuführen, erinnere ich daran, dafs in vielen Lehrbüchern der analytischen Geometrie die Existenz der Hyperbelasymptote durch die Transformation

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{bx}{a}\left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}\right\}$$
$$= \frac{ab}{2}\left\{\frac{1}{x} + \frac{a^2}{4x^3} + \frac{a^4}{8x^5} + \cdots\right\}$$

also mittelst des binomischen Satzes für gebrochene Exponenten bewiesen wird, wogegen die Gleichung

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

unmittelbar zum Ziele führt.

Aus Beobachtungen dieser Art sind die nachstehenden kleinen Analysen entsprungen; sie sollen zeigen, wie anscheinend schwere Aufgaben mit elementaren Hülfsmitteln gelöst werden können.

I. Für unendlich wachsende n sucht man den Grenzwert des Ausdrucks

$$U_n = \frac{1}{1^\varepsilon} + \frac{1}{2^\varepsilon} + \cdots + \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{n^{1-\varepsilon} - 1}{1 - \varepsilon},$$

worin ε ein positiver echter Bruch sein soll. Hierzu dienen die für $0 < a < b$ und $0 < \mu < 1$ geltenden Ungleichungen*)

*) In meinem „Übungsbuch zum Studium d. höh. Anal.", I. Tl., S. 4 d. 3. Aufl., habe ich die obigen Ungleichungen aus dem elementaren Satze hergeleitet, dafs die Division $(b^m - a^m) : (b - a)$ bei ganzen positiven m aufgeht.

1) $$\mu a^{\mu-1} > \frac{b^\mu - a^\mu}{b-a} > \mu b^{\mu-1}, \qquad (2$$

aus denen folgt

3) $$\frac{1}{k^\varepsilon} > \frac{(k+1)^{1-\varepsilon} - k^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} > \frac{1}{(k+1)^\varepsilon}. \qquad (4$$

Nimmt man in Nr. 3) der Reihe nach $k = 1, 2, 3, \cdots n$ und addiert alle entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$U_n > \frac{(n+1)^{1-\varepsilon} - n^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon},$$

wonach U_n positiv bleibt.

Es ist ferner

$$U_n - U_{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\varepsilon} - n^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)};$$

wird hier die Ungleichung Nr. 4) für $k = n$ angewendet, so ergiebt sich

$$U_n - U_{n+1} > 0, \quad U_n > U_{n+1},$$

mithin successive

$$U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > \cdots,$$

d. h. bei wachsenden n nimmt U_n fortwährend ab. Diese Abnahme beginnt mit dem Werte $U_1 = 1$, kann aber (wegen $U_n > 0$) nicht in das Gebiet des Negativen, also nur bis zu einer bestimmten Grenze $G \geqq 0$ gehen.

Setzt man

$$V_n = \frac{1}{1^\varepsilon} + \frac{1}{2^\varepsilon} + \cdots + \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{(n+1)^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon},$$

so wird

$$V_n - V_{n+1} = \frac{(n+2)^{1-\varepsilon} - (n+1)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}$$

und nach Nr. 1) für $k = n + 1$

$$V_n - V_{n+1} < 0, \quad V_n < V_{n+1},$$

$$V_1 < V_2 < V_3 < V_4 < \cdots;$$

demgemäfs wächst V_n gleichzeitig mit n. Diese Zunahme beginnt mit

$$V_1 = 1 - \frac{2^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon},$$

welcher Ausdruck positiv ist, wie sich aus Nr. 3) für $k = 1$ ergiebt.

Endlich beachte man, dafs

$$U_n - V_n = \frac{(n+1)^{1-\varepsilon} - n^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

ist, woraus nach Nr. 3) und 4) folgt

$$\frac{1}{n^\varepsilon} > U_n - V_n > \frac{1}{(n+1)^\varepsilon};$$

diese Relationen geben $\operatorname{Lim}(U_n - V_n) = 0$ und zeigen, dafs U_n und V_n gegen die gemeinschaftliche Grenze G konvergieren, U_n durch Abnahme, V_n durch Zunahme. Demgemäfs liegt G immer zwischen U_n und V_n.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{1}{1^\varepsilon} + \frac{1}{2^\varepsilon} + \frac{1}{3^\varepsilon} + \frac{1}{4^\varepsilon} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\varepsilon}$$
$$- \frac{2}{2^\varepsilon}\left\{\frac{1}{1^\varepsilon} + \frac{1}{2^\varepsilon} + \cdots + \frac{1}{n^\varepsilon}\right\}$$
$$= \frac{1}{1^\varepsilon} - \frac{1}{2^\varepsilon} + \frac{1}{3^\varepsilon} - \frac{1}{4^\varepsilon} + \cdots - \frac{1}{(2n)^\varepsilon},$$

erhält man noch

$$2^{1-\varepsilon} U_n - U_{2n} = \frac{2^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} - \left\{\frac{1}{1^\varepsilon} - \frac{1}{2^\varepsilon} + \cdots - \frac{1}{n^\varepsilon}\right\},$$

und durch Übergang zur Grenze für $n = \infty$

$$G = \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{2^{1-\varepsilon} - 1}\left(\frac{1}{1^\varepsilon} - \frac{1}{2^\varepsilon} + \frac{1}{3^\varepsilon} - \cdots\right), \tag{5}$$

wobei die eingeklammerte unendliche Reihe konvergiert, freilich sehr langsam.

Beiläufig bemerkt, findet sich mittelst der Integralrechnung

$$G = 1 + \frac{\varepsilon}{12} - \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{720} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\cdots(\varepsilon+4)}{30\,240}$$
$$- \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\cdots(\varepsilon+6)}{1\,209\,600} + \cdots$$

wobei G immer zwischen zwei auf einander folgenden Summen der Reihe enthalten ist.

II. Für $0 < a < b$ und ganze positive m gelten bekanntlich die Ungleichungen

$$ma^{m-1} < \frac{b^m - a^m}{b-a} < mb^{m-1}. \tag{6) \quad (7}$$

Aus der ersten ergiebt sich, wenn $a = 1$, $b = 1 + \frac{z}{m}$ und der Grenzwert für $m = \infty$ genommen wird,

$$z < e^z - 1 \text{ oder } e^z > 1 + z.$$

Die zweite Ungleichung liefert analog für $a = 1 - \frac{z}{m}$, $b = 1$

$$1 - e^{-z} < z \quad \text{oder} \quad e^z < \frac{1}{1-z},$$

wobei $0 < z < 1$ sein mufs. Durch Logarithmierung der beiden vorigen Resultate erhält man

$$8) \qquad l(1+z) < z < l\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad (9$$

Es sei nun zur Abkürzung

$$U_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - ln;$$

die Ungleichung 8) giebt dann für $z = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}$, durch Addition der entstehenden Spezialfälle und nach Subtraktion von ln

$$U_n > l\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

woraus folgt, dafs U_n immer positiv bleibt. Man hat ferner

$$U_n - U_{n+1} = l\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1};$$

wegen Nr. 9) ist rechter Hand der Subtrahend kleiner als der Minuend, daher $U_n > U_{n+1}$ und

$$U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > \cdots.$$

Bei wachsenden n nimmt also U_n fortwährend ab, kann aber nach dem vorigen nicht negativ werden und mufs folglich gegen eine bestimmte Grenze $G \geqq 0$ konvergieren.

Auf analoge Weise findet man, dafs der Ausdruck

$$V_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - l(n+1)$$

von seinem Anfangswerte $V_1 = 1 - l2 = 0,3\cdots$ an fortwährend zunimmt.

Weil endlich

$$\text{Lim}\,(U_n - V_n) = \text{Lim}\, l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

ist, so konvergieren U_n und V_n gegen die gemeinsame Grenze G und zwar U_n durch Abnahme, V_n durch Zunahme. Irgend zwei zusammengehörige Werte von U_n und V_n enthalten daher G zwischen sich, z. B.

$$U_{20} = 0{,}60\,201 > G > 0{,}55\,322 = V_{20},$$

wonach G nahezu $\frac{1}{2}(U_{20} + V_{20}) = 0{,}577$ ist.

III. Setzt man zur Abkürzung

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad P_n = \frac{1}{n^\mu} S_n$$

und berücksichtigt die Relation

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1},$$

so erhält man

$$10)\qquad P_n - P_{n+1} = \frac{(n+1)^\mu - n^\mu}{(n+1)^\mu n^\mu} S_n - \frac{1}{(n+1)^{\mu+1}},$$

wobei die Fälle $\mu > 1$, $\mu = 1$ und $1 > \mu > 0$ zu unterscheiden sind.

Im ersten Falle gilt für $0 < a < b$ der bekannte Satz

$$b^\mu - a^\mu > \mu (b - a) a^{\mu - 1},$$

und mit Hülfe desselben folgt

$$P_n - P_{n+1} > \frac{1}{n(n+1)^\mu} \left\{ \mu S_n - \frac{n}{n+1} \right\}.$$

Wegen $\mu > 1$ und $S_n > 1$ ist die rechts stehende Differenz positiv mithin $P_n > P_{n+1}$ und

$$P_1 > P_2 > P_3 > P_4 > \cdots.$$

Demnach nimmt P_n von seinem Anfangswerte $P_1 = 1$ an fortwährend ab; da aber P_n nicht negativ werden kann, so mufs es gegen eine bestimmte Grenze $G \geq 0$ konvergieren.

Im Falle $\mu = 1$ ist

$$P_n - P_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \left\{ S_n - \frac{n}{n+1} \right\};$$

die vorigen Schlüsse gelten auch hier.

Im dritten Falle $0 < \mu < 1$ erhält man aus Nr. 10) durch Anwendung von Nr. 1)

$$P_n - P_{n+1} < \frac{1}{n(n+1)^\mu} \left\{ \mu S_n - \frac{n}{n+1} \right\}.$$

Da μ weniger, S_n anfangs nicht viel mehr als die Einheit beträgt, so kann die rechts stehende Differenz bei kleinen n negativ sein; in der That ist z. B. für $\mu = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} S_1 - \frac{1}{2} < 0, \quad \frac{1}{3} S_2 - \frac{2}{3} < 0, \quad \frac{1}{3} S_3 - \frac{3}{4} < 0.$$

Solange demnach $\mu S_n - \frac{n}{n+1}$ negativ bleibt, solange ist $P_n < P_{n+1}$ und

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < \cdots;$$

daher nimmt P_n anfangs zu.

Durch Anwendung von Nr. 2) ergiebt sich ferner aus Nr. 10)

$$P_n - P_{n+1} > \frac{1}{n^\mu (n+1)} \left\{ \mu S_n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu \right\}.$$

Bekanntlich wächst S_n mithin auch μS_n gleichzeitig mit n ins Unendliche; bei hinreichend grofsen n wird daher $\mu S_n > 1$ und die rechts stehende Differenz positiv. Tritt dieser Fall für $n = k$ ein, so ist dann

$$P_k > P_{k+1} > P_{k+2} > P_{k+3} > \cdots$$

Die anfängliche Zunahme von P_n geht also nur bis zu einem bestimmten Maximum; nachher nimmt P_n fortwährend ab ohne negativ zu werden und konvergiert daher gegen eine Grenze $G \geqq 0$.

Beispielweis ist für $\mu = \frac{1}{3}$

$$P_1 = 1;\ P_2 = 1{,}19\,055;\ P_3 = 1{,}27\,116;\ P_4 = 1{,}31\,242; \cdots$$
$$\cdots P_8 = 1{,}35\,893;\ P_9 = 1{,}36\,003;\ P_{10} = 1{,}25\,951; \cdots$$

das Maximum entspricht hier dem Werte $k = 9$.

Zur Bestimmung von G dient die Gleichung

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n},$$

wonach $S_{2n} - S_n > \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ und $< \frac{1}{1}$ ist. Durch Division mit mit n^μ folgt hieraus

$$\frac{1}{2n^\mu} < 2^\mu P_{2n} - P_n < \frac{1}{n^\mu};$$

für $n = \infty$ gehen diese Relationen in die Gleichung über

$$2^\mu G - G = (2^\mu - 1) G = 0 \text{ also } G = 0.$$

Will man das Maximum von P_n genau bestimmen, so mufs man die aus der Integralrechnung bekannte Formel

$$S_n = C + ln + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \cdots$$

anwenden, worin $C = 0{,}5772\,156$ die Konstante des Integrallogarithmus bezeichnet. Denkt man sich rechter Hand n als kontinuierliche Variabele und setzt

$$\frac{d(n^{-\mu} S_n)}{dn} = 0,$$

so erhält man die Bedingung

$$ln = \frac{1}{\mu} - C - \left(\frac{1}{\mu} + 1\right)\frac{1}{2n} + \left(\frac{2}{\mu} + 1\right)\frac{1}{12n^2} - \cdots$$

und daraus die successiven Näherungswerte

$$ln_1 = \frac{1}{\mu} - C, \quad ln_2 = ln_1 - \left(\frac{1}{\mu} + 1\right)\frac{1}{2n_1} + \cdots$$

oder in gewöhnlichen Logarithmen

$$\log n_1 = 0{,}4342\,945 \cdot \frac{1}{\mu} - 0{,}2506\,816,$$

$$\log n_2 = \log n_1 - 0{,}217\,147\left(\frac{1}{\mu} + 1\right)\frac{1}{n_1} + \cdots$$

u. s. w.

Beispielweis sei $\mu = \frac{1}{5}$; es ergiebt sich $n_1 = 82$, $n_2 = 81$ und durch Benutzung von Nr. 13)

$$P_{80} = 2{,}066\,965; \; P_{81} = 2{,}067\,010; \; P_{82} = 2{,}066\,995,$$

wonach in der That P_{81} das Maximum von P_n darstellt. Die nachherige Abnahme geht übrigens sehr langsam, denn für $n = 1\,000\,000$ ist erst $P_n = 0{,}908$.

IV. Die bekannte, für $n = \infty$ geltende und viele Anwendungen gestattende Formel

$$\operatorname{Lim} \frac{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots + n^\mu}{n^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu + 1}$$

wird meistens durch Summierung der im Zähler stehenden Reihe bewiesen; dieser Weg ist aber nur bei den Werten $\mu = 1, 2, 3$ bequem, für gröfsere μ führt er zu Weitläufigkeiten, bei gebrochenen μ wird er völlig ungangbar. Noch umständlicher gestaltet sich hiernach die Bestimmung von

$$\operatorname{Lim} \frac{S_n}{n^{\mu+1}},$$

worin S_n die Summe der allgemeineren Reihe

$$a^\mu + (a + b)^\mu + (a + 2b)^\mu + (a + 3b)^\mu + \cdots$$
$$\cdots + (a + \overline{n - 1}b)^\mu$$

bedeuten möge; dagegen ist folgende Herleitung sehr einfach.

Für $\alpha < \beta$ und $\varkappa > 1$ bestehen die Ungleichungen*)

$$1) \qquad \varkappa\alpha^{\varkappa - 1} < \frac{\beta^\varkappa - \alpha^\varkappa}{\beta - \alpha} \quad \text{und} \quad \varkappa\beta^{\varkappa - 1} > \frac{\beta^\varkappa - \alpha^\varkappa}{\beta - \alpha};$$

*) Siehe Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Einleitung, Grenzwerte.

aus der ersten folgt für

$$\alpha = a + qb, \quad \beta = a + (q+1)b,$$

wobei a, b, q positiv sein mögen,

$$2) \qquad (a+qb)^{\varkappa-1} < \frac{(a+\overline{q+1}\,b)^{\varkappa} - (a+qb)^{\varkappa}}{\varkappa b};$$

die zweite Ungleichung liefert für

$$\alpha = a + (q-1)b, \quad \beta = a + qb$$

und unter gleichen Bedingungen

$$3) \qquad (a+qb)^{\varkappa-1} > \frac{(a+qb)^{\varkappa} - (a+\overline{q-1}\,b)^{\varkappa}}{\varkappa b}.$$

Nimmt man in Nr. 2) der Reihe nach $q = 0, 1, 2, \cdots n-1$, addiert alle entstehenden Ungleichungen und dividiert mit $n^{\varkappa}$, so erhält man

$$4) \qquad \frac{a^{\varkappa-1} + (a+b)^{\varkappa-1} + \cdots + (a+\overline{n-1}\,b)^{\varkappa-1}}{n^{\varkappa}}$$

$$< \frac{1}{\varkappa b}\left\{\left(\frac{a}{n} + b\right)^{\varkappa} - \left(\frac{a}{n}\right)^{\varkappa}\right\}.$$

Auf gleiche Weise findet man, wenn zu der Gleichung $a^{\varkappa-1} = a^{\varkappa-1}$ die aus Nr. 3) für $q = 1, 2, \cdots n-1$ entstehenden Relationen addiert werden*)

$$5) \qquad \frac{a^{\varkappa-1} + (a+b)^{\varkappa-1} + \cdots + (a+\overline{n-1}\,b)^{\varkappa-1}}{n^{\varkappa}}$$

$$> \frac{a^{\varkappa-1}}{n^{\varkappa}} + \frac{1}{\varkappa b}\left\{\left(\frac{a-b}{n} + b\right)^{\varkappa} + \left(\frac{a}{n}\right)^{\varkappa}\right\}.$$

Für $n = \infty$ folgt nun aus Nr. 4) und 5)

$$6) \qquad \operatorname{Lim} \frac{a^{\varkappa-1} + (a+b)^{\varkappa-1} + \cdots + (a+\overline{n-1}\,b)^{\varkappa-1}}{n^{\varkappa}} = \frac{b^{\varkappa-1}}{\varkappa},$$

wobei $\varkappa > 1$ sein mufs.

Eine völlig analoge Betrachtung knüpft sich an die Ungleichungen

$$\lambda\alpha^{\lambda-1} > \frac{\beta^{\lambda} - \alpha^{\lambda}}{\beta - \alpha}, \quad \lambda\beta^{\lambda-1} < \frac{\beta^{\lambda} - \alpha^{\lambda}}{\beta - \alpha},$$

die für $\alpha < \beta$ und $0 < \lambda < 1$ gelten. Der Vergleich mit Nr. 1)

---

*) Man kann nicht mit $q = 0$ beginnen, weil $(a-b)^{\varkappa}$ möglicherweise imaginär wird, wenn man nicht die unnütz beschränkende Voraussetzung $a > b$ machen will.

zeigt, daſs man nur $\varkappa$ durch λ zu ersetzen und die Ungleichheitszeichen gegen einander zu vertauschen braucht, daſs also zum Vorschein kommt

$$7)\qquad \operatorname{Lim}\frac{a^{\lambda-1}+(a+b)^{\lambda-1}+\cdots+(a+\overline{n-1}b)^{\lambda-1}}{n^{\lambda}}=\frac{b^{\lambda-1}}{\lambda}.$$

Setzt man in Nr. 6) $\varkappa=\mu+1$ mithin $\mu>0$, in Nr. 7) $\lambda=\mu+1$ mithin $0>\mu>-1$, so hat man zusammengenommen

$$8)\qquad \operatorname{Lim}\frac{S_n}{n^{\mu+1}}=\frac{b^{\mu}}{\mu+1},\quad a>0,\ b>0,\ \mu>-1.$$

V. Es bezeichne Q_n das arithmetische und R_n das geometrische Mittel der n Potenzen

$$a^{\mu},\ (a+b)^{\mu},\ (a+2b)^{\mu},\ \cdots\ (a+\overline{n-1}b)^{\mu};$$

wegen $Q_n=S_n:n$ ist dann

$$\frac{Q_n}{R_n}=\frac{S_n}{n\left[\sqrt[n]{a(a+b)\cdots(a+\overline{n-1}b)}\right]^{\mu}}$$

oder hiermit identisch

$$\frac{Q_n}{R_n}=\frac{S_n}{n^{\mu+1}}\left[\frac{2}{\dfrac{2a-b}{n}+b}\cdot\frac{a+\frac{1}{2}(n-1)b}{\sqrt[n]{a(a+b)\cdots(a+\overline{n-1}b)}}\right]^{\mu}.$$

Im letzten Bruche bedeutet der Zähler das arithmetische, der Nenner das geometrische Mittel der Gröſsen

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ \cdots\ a+(n-1)b,$$

und von diesem Quotienten ist bekannt, daſs er gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}e$ konvergiert.*)

Hiernach ergiebt sich

$$\operatorname{Lim}\frac{Q_n}{R_n}=\frac{b^{\mu}}{\mu+1}\left(\frac{e}{b}\right)^{\mu}=\frac{e^{\mu}}{\mu+1}$$

also eine Verallgemeinerung des eben erwähnten Satzes.

VI. Eine Anwendung des vorigen bildet die Grenzbestimmung des Produktes

$$P_n=\left[1+\frac{\mu}{n}l\left(\frac{n}{a}\right)\right]\left[1+\frac{\mu}{n}l\left(\frac{n}{a+b}\right)\right]\left[1+\frac{\mu}{n}l\left(\frac{n}{a+2b}\right)\right]\cdots$$
$$\cdots\left[1+\frac{\mu}{n}l\left(\frac{n}{a+(n-1)b}\right)\right],$$

*) Ebendas.

worin a, b und μ positiv sein mögen. Wird zur Abkürzung

$$\varepsilon_q = \frac{\mu}{n} l\left(\frac{n}{a+qb}\right)$$

gesetzt, so handelt es sich um den Grenzwert von

$$P_n = (1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots\cdots(1+\varepsilon_{n-1})$$

und darin ist wegen der positiven a, b, μ

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots\cdots > \varepsilon_{n-1}.$$

Die Verbindung der Identität

$$\varepsilon_0 = \mu\left(\frac{ln}{n} - \frac{la}{n}\right)$$

mit dem Satze $\operatorname{Lim}\frac{ln}{n} = 0$*) zeigt ferner, dafs ε_0 gegen die Null konvergiert; dieselbe Eigenschaft besitzen um so mehr ε_1, ε_2, $\cdots$ ε_{n-1}. Hiernach läfst sich der Anfangswert von n so grofs wählen, dafs sämtliche ε von Hause aus echte Brüche sind.

Nimmt man die Logarithmen und berücksichtigt die bekannten, für echt gebrochene positive x geltenden Ungleichungen

$$l(1+x) < x, \quad l(1+x) > \frac{x}{1+x} > x - x^2,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} lP_n &< \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}, \\ lP_n &> \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} \\ &\quad -(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon^2_{n-1}). \end{aligned}$$

Die im Subtrahenden vorkommende Quadratsumme ist positiv und kleiner als $n\varepsilon_0^2$ d. i. zufolge des Wertes von ε_0

$$0 < \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 \cdots + \varepsilon^2_{n-1} < \mu^2\left\{\frac{(ln)^2}{n} - 2la\frac{ln}{n} + \frac{(la)^2}{n}\right\},$$

---

*) Aus der bekannten, auf elementarem Wege leicht beweisbaren Relation $e^z > 1 + z > z$ ergiebt sich durch Erhebung auf die $(p+1)$te Potenz, falls $p+1$ positiv ist,

$$e^{(p+1)z} > z^{p+1}$$

und für $e^{(p+1)z} = \omega$

$$\omega > \left(\frac{l\omega}{p+1}\right)^{p+1} \quad \text{oder} \quad \frac{(l\omega)^p}{\omega} < \frac{(p+1)^{p+1}}{l\omega}.$$

Andererseits ist, $\omega > 1$ vorausgesetzt,

$$\frac{(l\omega)^p}{\omega} > 0.$$

Für unendlich wachsende ω geben diese Ungleichungen

$$\operatorname{Lim}\frac{(l\omega)^p}{\omega} = 0, \quad (p > -1).$$

und hieraus ergiebt sich

$$\operatorname{Lim}(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}^2) = 0.$$

Demnach konvergiert lP_n gegen denselben Grenzwert wie die Reihensumme

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}$$

$$= \mu l \left\{ \frac{n}{\sqrt[n]{a(a+b)(a+2b)\cdots(a+\overline{n-1}b)}} \right\}$$

$$= \mu l \left\{ \frac{2}{b + \frac{2a-b}{n}} \cdot \frac{a + \frac{1}{2}(n-1)b}{\sqrt[n]{a(a+b)\cdots(a+\overline{n-1}b)}} \right\};$$

wie in Nr. V. ist der Grenzwert des eingeklammerten Produktes $= \frac{e}{b}$ mithin

$$\operatorname{Lim} P_n = \left(\frac{e}{b}\right)^{\mu}.$$

VII. Die Lambertsche Reihe. Bekanntlich hat Lambert (Architektonik, S. 507) über die Reihe

$$1) \quad S = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \cdots, \quad (-1 < z < +1)$$

bemerkt, dafs sie, nach Potenzen von z geordnet, die Form annimmt

$$S = T_1 z + T_2 z^2 + T_3 z^3 + T_4 z^4 + \cdots,$$

worin T_n die Anzahl der Teiler von n (inkl. 1 und n) bezeichnet, wonach für Primzahlen und nur für diese $T_n = 2$ ist. Da man keine Summenformel für die Reihe kennt, so bleibt im gegebenen Falle nur die numerische Berechnung von S übrig; diese ist zwar bei kleinen z leicht, bei einigermafsen grofsen (d. h. der Einheit naheliegenden) z dagegen sehr weitläufig; so hat z. B. in Nr. 1) für $z = 0{,}5$ erst das 20te Glied den Wert 0,000 001, für $z = 0{,}9$ würde man über 87, für $z = 0{,}99$ über 900 Glieder brauchen, um nur vier richtige Dezimalstellen zu bekommen. Diese Beobachtungen haben zu den nachstehenden Transformationen der Lambertschen Reihe Veranlassung gegeben.

a. Zunächst erwähnte Clausen (Crelles Journ. III) die Umgestaltung

$$2) \qquad S = \frac{1+z}{1-z} z + \frac{1+z^2}{1-z^2} z^4 + \frac{1+z^3}{1-z^3} z^9 + \cdots,$$

deren Beweis von Scherk (Crelle IX) geliefert worden ist und zwar durch folgende sehr einfache Schlüsse.

Schreibt man die Entwickelungen der einzelnen Glieder von Nr. 1) ohne weiteres unter einander, so hat man

$$\begin{array}{rl} S = & z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \\ & + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \cdots \\ & + z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + \cdots \\ & + z^4 + z^8 + z^{12} + z^{16} + \cdots \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \, ; \end{array}$$

Die Vereinigung der ersten Horizontalreihe mit der ersten Vertikalkolonne giebt

$$z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \cdots = \frac{1+z}{1-z} z,$$

und von der vorigen Doppelreihe bleibt übrig

$$\begin{array}{l} z^4 + z^6 + z^8 + \cdots \\ + z^6 + z^9 + z^{12} + \cdots \\ + z^8 + z^{12} + z^{16} + \cdots \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

Nimmt man wiederum die erste Reihe und die erste Kolonne zusammen, so entsteht

$$z^4 + 2z^6 + 2z^8 + 2z^{10} + \cdots = \frac{1+z^2}{1-z^2} z^4,$$

und als Rest bleibt

$$\begin{array}{l} z^9 + z^{12} + \cdots \\ + z^{12} + z^{16} + \cdots \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot , \end{array}$$

wo sich wieder dasselbe Verfahren anwenden läfst, das schliefslich zu Nr. 2) führt.

Diese Transformation gewährt zwar bei kleinen z einen wesentlichen Vorteil, nicht aber bei grofsen z, wie z. B. im Falle $z = 0{,}99$, wo erst das 36te Glied den hinreichend kleinen Wert 0,0000 123 erlangt.

b. Als Gegenstück zur Clausenschen Transformation habe ich die folgende angegeben*)

$$3) \qquad S = \frac{C - ll\left(\frac{1}{z}\right)}{l\left(\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{4} - C_1\, l\left(\frac{1}{z}\right) - C_3 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^3 - \cdots;$$

*) Sitzungsberichte d. K. S. Gesellsch. d. W., Jahrg. 1861, S. 120, und in anderer Form: Compendium der höheren Analysis, Bd. II, S. 238.

darin bedeutet C die Konstante des Integrallogarithmus nämlich

$$C = 0{,}57721\,566,$$

und die Koeffizienten C_1, C_3, C_5, etc. hängen von den Bernoullischen Zahlen B_1, B_3, B_5, etc. ab nach den Formeln

$$C_1 = \frac{(B_1)^2}{2.1.2} = \frac{1}{144}, \quad C_3 = \frac{(B_3)^2}{4.1.2.3.4} = \frac{1}{86\,400},$$

$$C_5 = \frac{(B_5)^2}{6.1.2\ldots 6} = \frac{1}{7\,620\,480}, \text{ u. s. w.}$$

Liegt nun z nahe an 1, so differiert $l\left(\frac{1}{z}\right)$ wenig von der Null, und da überdieſs die Koeffizienten C_1, C_3, etc. rasch abnehmen, so bedarf es nur einer geringen Anzahl von Reihengliedern, um eine bedeutende Genauigkeit zu erreichen, z. B.

$$z = 0{,}99; \quad l\left(\frac{1}{z}\right) = l\left(\frac{100}{99}\right) = 0{,}0100\,5034,$$

$$ll\left(\frac{1}{z}\right) = l(0{,}0100\,5034) = -(4{,}6001\,4881),$$

$$S = \frac{0{,}5772\,1566 + 4{,}6001\,4881}{0{,}0100\,5034} + \frac{1}{4} - \frac{0{,}0100\,5034}{144},$$

wobei $C_3\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^3$ wegen seiner auſserordentlichen Kleinheit weggelassen wurde; es ist demnach, auf mindestens 7 Dezimalen genau,

$$S = 515{,}3931\,4626.$$

Vorerst soll gezeigt werden, daſs es nur einer kleinen Aufopferung von Genauigkeit bedarf, um die Formel 3) einfacher und daher auch bequemer zu gestalten. Läſst man nämlich die mit C_1, C_3, etc. behafteten Glieder weg und setzt $z = 1 - y$ wo y ein echter Bruch ist, so wird

$$S = \frac{1}{4} + \frac{C - ll\left(\frac{1}{1-y}\right)}{l\left(\frac{1}{1-y}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{C - l\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \cdots\right)}{y + \frac{1}{2}y^2 + \cdots}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{C - ly - l\left(1 + \frac{1}{2}y + \cdots\right)}{y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}y + \cdots};$$

bei groſsen z beträgt y so wenig, daſs nahezu

$$l\left(1 + \frac{1}{2}y + \cdots\right) = \frac{1}{2}y, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2}y} = 1 - \frac{1}{2}y$$

genommen werden kann; es bleibt daher

$$S = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)(C - ly) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y,$$

und hieraus folgt bei Weglassung von $\frac{1}{4}y$ und wegen $y = 1 - z$ die Näherungsformel

$$4) \qquad S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z}\left\{C + l\left(\frac{1}{1-z}\right)\right\} - \frac{1}{4}.$$

Beispielweis giebt dieselbe für $z = 0{,}99$

$$S = \frac{199}{2}\{C + l100\} - \frac{1}{4} = 515{,}3974,$$

was von dem genauen Werte nur wenig differiert.

Nicht ohne Interesse dürfte nun der Nachweis sein, dafs die bekannten Potenzenreihen für $l(1+y)$ und $l(1-y)$ vollkommen ausreichen, um die Formel 4) zu entwickeln.

c. Unter der Voraussetzung $b > a > 0$ und wenn vorübergehend zur Abkürzung

$$e^b - 1 = B \quad \text{und} \quad e^{b-a} - 1 = \beta$$

gesetzt wird, ist identisch

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-b}} = \frac{1}{1 - \frac{(b-a)B - b\beta}{b(B - \beta)}};$$

durch Logarithmierung mit Rücksicht auf die Ungleichung $l\left(\frac{1}{1-u}\right) > u$ folgt hieraus

$$l\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-b}}\right) > \frac{(b-a)B - b\beta}{b(B - \beta)}.$$

Läfst man im Nenner rechter Hand das positive β weg, so wird der Nenner gröfser, mithin um so mehr

$$l\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-a}}{1 - c^{-b}}\right) > \frac{b-a}{b} - \frac{\beta}{B}$$

oder vermöge der Bedeutungen von B und β

$$5) \qquad \frac{e^{b-a} - 1}{e^b - 1} > \frac{b-a}{b} - l\left(\frac{b}{a}\right) + l\left(\frac{1 - e^{-b}}{1 - e^{-a}}\right).$$

Um eine analoge Relation zu erhalten, setze man

$$e^a - 1 = A, \quad 1 - e^{-(b-a)} = \alpha$$

und logarithmiere die Identität

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-b}} = 1 + \frac{(b-a)A - a\alpha}{a(A + \alpha)};$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung $l(1+v) < v$ wird dann

$$l\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{1-e^{-a}}{1-e^{-b}}\right) < \frac{(b-a)A - a\alpha}{a(A+\alpha)}$$

und stärker, wenn man im Nenner rechter Hand das positive α wegläfst,

$$l\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{1-e^{-a}}{1-e^{-b}}\right) < \frac{b-a}{a} - \frac{a}{A}$$

oder

$$6)\qquad \frac{1-e^{-(b-a)}}{e^{a}-1} < \frac{b-a}{a} - l\left(\frac{b}{a}\right) + l\left(\frac{1-e^{-b}}{1-e^{-a}}\right).$$

Die Ungleichungen 5) und 6) gehen für

$$a = qx,\quad b = (q+1)x,$$

wobei q und x positiv sein mögen, über in

$$7)\qquad \frac{e^{x}-1}{e^{(q+1)x}-1} > \frac{1}{q+1} - l\left(\frac{q+1}{q}\right) + l\left(\frac{1-e^{-(q+1)x}}{1-e^{-qx}}\right),$$

$$8)\qquad \frac{1-e^{-x}}{e^{qx}-1} < \frac{1}{q} - l\left(\frac{q+1}{q}\right) + l\left(\frac{1-e^{-(q+1)x}}{1-e^{-qx}}\right);$$

diese Relationen lassen sich auf folgende Weise verwerten.

Da bekanntlich $1-e^{-x}$ weniger als x beträgt, so ist $x:(1-e^{-x})$ ein unechter Bruch, der Logarithmus desselben positiv und

$$1 > 1 - l\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)$$

wofür geschrieben werden möge

$$\frac{e^{x}-1}{e^{x}-1} > \frac{1}{1} - l\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right).$$

Addiert man hierzu die aus Nr. 7) für $q = 1, 2, 3, \cdots (n-1)$ entspringenden Ungleichungen, so erhält man

$$(e^{x}-1)\left\{\frac{1}{e^{x}-1} + \frac{1}{e^{2x}-1} + \cdots + \frac{1}{e^{nx}-1}\right\}$$

$$> \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - ln - lx + l(1-e^{-nx}).$$

Bei unendlich wachsenden n konvergiert die rechte Seite gegen den Grenzwert $C - lx$, und daher ist

$$\frac{1}{e^{x}-1} + \frac{1}{e^{2x}-1} + \frac{1}{e^{3x}-1} + \cdots > \frac{C-lx}{e^{x}-1}.$$

Aus Nr. 8) ergiebt sich eine analoge Beziehung, wenn

$q = 1, 2, 3, \cdots n$ genommen, alles addiert und der Grenzwert für $n = \infty$ bestimmt wird, nämlich

$$\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^{2x} - 1} + \frac{1}{e^{3x} - 1} + \cdots < \frac{C - l(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}}.$$

Für $e^{-x} = z$ geht die linke Seite in die Lambertsche Reihe über, deren Summe wieder S heifsen möge; es gelten demnach die beiden Ungleichungen

$$9) \quad S > \frac{z}{1-z}\left\{C - ll\left(\frac{1}{z}\right)\right\}, \quad S < \frac{1}{1-z}\left\{C + l\left(\frac{1}{1-z}\right)\right\}.$$

Die erste derselben gestattet noch eine Vereinfachung. Bei positiven echt gebrochenen y ist nämlich

$$l\left(\frac{1}{1-y}\right) = y\left(1 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}y^3 + \cdots\right)$$
$$< y\left(1 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \cdots\right)$$

d. i.

$$l\left(\frac{1}{1-y}\right) < y\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{1-y}\right);$$

nimmt man beiderseits die Logarithmen und benutzt rechter Hand die Ungleichung $l(1+v) < v$, so erhält man

$$ll\left(\frac{1}{1-y}\right) < ly + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{1-y}$$

und für $1 - y = z$

$$ll\left(\frac{1}{z}\right) < l(1-z) + \frac{1-z}{2z}.$$

Die erste Ungleichung in Nr. 9) wird nun stärker, wenn man den Subtrahenden $ll\left(\frac{1}{z}\right)$ durch den hier angegebenen gröfseren Ausdruck ersetzt; es ist daher

$$S > \frac{z}{1-z}\left\{C + l\left(\frac{1}{1-z}\right)\right\} - \frac{1}{2}$$

und wie früher

$$S < \frac{1}{1-z}\left\{C + l\left(\frac{1}{1-z}\right)\right\}.$$

Das arithmetische Mittel der beiden extremen Werte führt nun zu der unter Nr. 4) angegebenen Näherungsformel.

Kleinere Mitteilungen.

Nochmals die Trennung des physikalischen Lehrstoffs in zwei Kurse.

Von Dr. H. Thieme in Posen.*)

Die Herren Hoffmann und Richter stimmen (Heft 7, S. 493 und 494) meiner Ansicht von der Notwendigkeit der Trennung des physikalischen Unterrichts in zwei Kurse zu.

Die Frage, wie weit diese Teilung auch im Lehrbuch zur Geltung kommen soll, steht dem gegenüber in zweiter Linie. Selbstverständlich ist es möglich, auch mit einem Lehrbuch zu unterrichten, welches jene Trennung nicht besitzt, wenn im Lehrplan der Anstalt genau festgesetzt ist, welche Paragraphen des Lehrbuchs auf jeder Stufe durchzunehmen sind; letzteres ist wegen der Möglichkeit des Lehrerwechsels notwendig, auch wenn der gesamte Physikunterricht in einer Hand liegt. Für das Gymnasium mag ein Lehrbuch ohne Teilung in Kurse allenfalls auch genügen, da hier zwischen dem Unterricht in Sekunda und Prima kein so wesentlicher Unterschied besteht.

Das Realgymnasium, von dem ich auch in meiner vorigen Note in erster Linie gesprochen hatte, ist infolge seiner gröfseren Stundenzahl für Physik in der Lage, sowohl den Kursus der Sekunda als auch den der Prima umfassender zu gestalten; es kommt deswegen hier auch eine viel gröfsere specifische Differenz zwischen beiden Kursen zur Geltung. Ein zweckmäfsig eingerichtetes Lehrbuch sollte auf diesen Unterschied Rücksicht nehmen.

Ein Schulbuch soll nicht blofs ein wissenschaftliches Lehrbuch in kurzer Form sein, die Erfordernisse des Unterrichts vor allem müssen für dasselbe mafsgebend sein. Das Schulbuch soll den

---

*) Der Hr. Verfasser bemerkt u. a. noch in seinem Begleitbriefe: Nach meinen Beobachtungen (in Programmen u. s. w.) steht die Methodik des physikalischen Unterrichts heute hinter der des Unterrichts in der Chemie und in den beschreibenden Naturwissenschaften zurück; die Praxis schwankt vielfach scheinbar zweck- und grundlos hin und her. Diese Thatsache findet ihre Erklärung in dem Mangel einer festen Tradition im physikalischen Unterricht, und dieser wieder in der Beschaffenheit der physikalischen Lehrbücher, welche meist dem Unterricht nicht genügend angepafst sind.

Unterricht von Stufe zu Stufe begleiten und den Lehrstoff auf jeder Stufe in der Gestalt bieten, in welcher der Schüler ihn zu seinen häuslichen Wiederholungen braucht. Der Schüler, welcher die ersten Physikstunden erhält, und derjenige, welcher schon 2—3 Jahre Physik getrieben hat, stehen auf einem recht verschiedenen Standpunkte; eine Darstellung, die beiden genügen soll, lässt beide zu kurz kommen.

Der Zusammenhang des Lehrstoffs läſst sich auch bei getrennten Kursen durch geeignete Repetitionen sehr wohl aufrecht erhalten. Dafür erreicht man den Vorteil, daſs dem Sekundaner nicht zuviel zugemutet wird, daſs man dem Primaner mehr bieten darf, ohne zu fürchten, über das Verständnis des Schülers hinauszugehen, daſs dann auch der in Prima neu durchgenommene Lehrstoff sich scharf als solcher abhebt, daſs auch der Primaner nicht blos Wiederholung des Früheren zu erhalten glaubt.

Die Schwierigkeit der Trennung des Leichteren und Schwereren ist ja klar, doch muſs auch jetzt schon jene Trennung an jeder Anstalt erfolgen — trotz dieser Schwierigkeit und trotz der Lehrbücher, welche den Unterrichtsgang unberücksichtigt lassen. Warum soll nun jeder neue Lehrer oder auch nur jede Anstalt diese Schwierigkeit für sich allein lösen, so wie es die jeweiligen Vertreter des Fachs gerade zu thun imstande sind? Warum soll dafür die Arbeit und Erfahrung von Kollegen, welche Lehrbücher verfassen, nicht verwertet werden? Die Erfahrung, daſs man mit dem Verfasser eines Lehrbuchs in den Ansichten nicht übereinstimmt, macht der denkende Lehrer oft; mancher Lehrer unterrichtet am liebsten ohne jedes Lehrbuch, und trotzdem ist die Einführung von Lehrbüchern vorgeschrieben.

Die bisherige Beschaffenheit der Lehrbücher hat meiner Überzeugung nach dem Unterricht der Physik nicht wenig geschadet; hauptsächlich infolge dieser Einrichtung fehlt es bisher in der Physik, wie die Mitteilungen in den Programmen zeigen, an der für ein Lehrfach so wertvollen festen Tradition, zu der die meisten übrigen Lehrfächer schon gelangt sind.

Nochmals „Winkelgrad“ und „Bogengrad“.

(Zusatz zu unserm Art. in Hft. 5, S. 344 u. f. d. l. Jhrgs.)

Herr Rektor Hertter in Göppingen (Württemberg) theilt uns mit, daſs in dem von ihm herausgegebenen Buche: O. v. Fischers methodische Grammatik des Schulrechnens (2. Aufl. Stuttgart 1884), auf das wir s. Z. noch zurückzukommen gedenken, die von uns geforderte Unterscheidung gemacht sei. Auf S. 76—77 des genannten Werkes steht nämlich:

„Die Mafseinheit für die Winkelmessung ist der Winkelgrad $= \frac{1}{360}$ des Vollwinkels, diejenige für die Kreisbogenmessung der Bogengrad $= \frac{1}{360}$ der Vollkreislinie, d. h. des Umfangs.

Der Winkelgrad ist also ein Winkel, der Bogengrad ein Bogen, wie dies nach § 18, 4 a*) nicht anders sein darf. Wenn ich sage, ein Kreisbogen habe 45 Grade, so heifst dies, genau ausgedrückt, seine Länge sei $= 45$ mal $\frac{1}{360}$ vom ganzen Kreisumfang; hat ein Winkel 45^0, so heifst dies, er sei $45 \cdot \frac{1}{360} = \frac{1}{8}$ des Vollwinkels.

Hierbei tritt ein durchgreifender Unterschied beider Arten von Graden zu tage; der Bogengrad kann jetzt noch auf seine wahre Gröfse, d. h. seine Länge in irgend einem Längenmafs untersucht werden, der Winkelgrad nicht. Die wahre Länge eines Bogengrads hängt ab von der Länge seines Kreisumfangs; ist dieser bestimmt, so erhält man die Länge des Bogengrads durch Division mit 360. Über die wahre Länge eines Kreisbogens erfährt man also aus der Anzahl seiner Grade zunächst noch gar nichts.

Anmerkung. Wenn in der Geometrie gesagt wird, der Bogen diene als Mafs des Winkels, so könnte man leicht auf die irrige Annahme geraten, der Bogen liege der Winkelmessung zu Grunde. Dies hätte selbstverständlich keinen Sinn (§ 18, 4 a). Diese weder anschaulich noch wissenschaftlich richtige Redensart will vielmehr blofs besagen, aus der Anzahl der Winkelgrade eines Zentriwinkels wisse man auch die Anzahl der Bogengrade seines Bogens. Hierbei ist aber ausdrücklich der in der Geometrie bewiesene Satz vorausgesetzt: So viele Winkelgrade ein Zentriwinkel, so viele Bogengrade hat auch sein Bogen. Um von der Winkelmessung auf die Bogenmessung, oder umgekehrt, überzugehen, habe ich also gleichsam über diesen Satz als Brücke zwischen beiden hinüberzuschreiten; gerade wie ich, um vom Rauminhalt einer Wassermasse zu ihrem Gewicht zu kommen, über den Satz zu schreiten habe, dafs ein Kubikdezimeter Wasser ein Kilogramm schwer ist. Bogengrad und Winkelgrad sind so wenig ein und dasselbe als Rauminhalt und Gewicht; eins kann daher auch nicht als Mafs des andern dienen.

Es empfiehlt sich sehr, diese Unterscheidung auch im Unterricht festzuhalten."

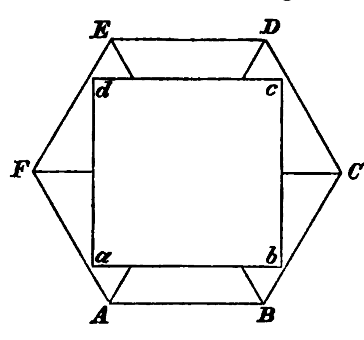
---

*) „Jede Gröfse kann nur durch eine ihr gleichartige gemessen werden".

Ein stereometrisches Problem.*)

Von Geheimrat Dr. Schlömilch in Dresden.

Wenn ein Würfel, dessen Kante $ab = 1$ ist (s. Fig.), mit einer seiner Begrenzungsflächen auf eine horizontale Ebene gelegt wird, so bildet seine Horizontalprojektion ein Quadrat $abcd$ mit der Seite 1; wird dagegen derselbe Würfel so auf die Spitze gestellt, dass eine seiner körperlichen Diagonalen vertikal steht, so bildet seine Horizontalprojektion ein regelmässiges Sechseck $ABCDEF$ mit der



Seite $AB = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und den Hauptdiagonalen AD, BE, CF. Wie man leicht bemerkt, läfst sich jenes Quadrat so in dieses Sechseck einsetzen, dafs es ganz innerhalb des letzteren liegt, und dafs die Umfänge beider Vielecke keinen Punkt gemein haben. Solcher Lagen giebt es sogar unendlich viele, von denen die Figur den speziellen Fall zeigt, wo $ab \parallel AB$ ist. Die Differenz der Flächen $ABCDEF$ und $abcd$ ist nun eine allseitig zusammenhängende Ringfläche, und hieraus folgt der stereometrische Satz: „ein Würfel kann durch einen ihm congruenten Würfel so hindurchgeschoben werden, dafs vom letzteren ein allseitig zusammenhängender ringförmiger Körper übrig bleibt."

Daran knüpft sich die naheliegende Frage, ob die vorgenannte Eigenschaft des Würfels auch den übrigen regelmäfsigen Körpern zukommt.

Ein Urteil Napoleons I. über den Mathematiker Laplace.

Mitgeteilt von Dr Holzmüller i. Hagen (W.).

Von allgemeinerem Interesse dürfte folgendes Urteil Napoleons I. über Laplace sein, welches sich in seinen Memoiren (deutsch bei G. Reimer, 1875), Bd. I, Seite 78 findet.

„Laplace: Im Innern kam Laplace an die Stelle des Ministers Quinette. Er war ein Geometer vom ersten Range, der sich aber bald als ein mittelmäfsiger Administrator bewährte. Bei seiner ersten Arbeit wurden die Konsuln gewahr, dafs sie sich geirrt hatten. Laplace fand nie den wahren Gesichtspunkt einer Frage, suchte überall Spitzfindigkeiten, hatte nichts als problematische Ideen, und wendete den Geist des unendlich Kleinen auf die Verwaltung an."

*) Vgl. im Aufgaben-Rep. die Aufgabe Nr. 672 in Heft 3 ds. Jahrgs. S. 197 und die zugehörige Lösung in diesem Hefte S. 595. D. Red.

Sprech- und Diskussions-Saal.

Zu dem Aufsatze des Herrn Dr. Heinrich Vogt in Heft 7. S. 481 u. f.

Von W. Fr. Schüler in Ansbach.

Im genannten Aufsatze findet sich auf Seite 483 die Anmerkung:

„Einen ähnlichen Weg schlägt Schüler ein in: 'die Fallinie und die Planetenbahnen als involutorische Punktreihen auf Grund des Prinzips der Erhaltung der Kraft elementar behandelt', Progr. der Königl. Realschule Freising 1881; Aufl. 2, 1882; aber die eine Bedingung, auf die er S. 34 kommt, reicht nicht aus, um die Bahnkurve als Kegelschnitt zu definieren."

Damit die geehrten Leser den Inhalt dieser Anmerkung auf seine Richtigkeit prüfen können, folgt hier der Beweis des zweiten Keplerschen Gesetzes wörtlich, wie er in der zitierten Schrift gegeben ist unter Hinzufügung erläuternder Bemerkungen.*)

25. „Das Problem der Planetenbewegung ist mit dem vorigen (dem Problem des freien Falles) identisch. An die Stelle der Erde tritt die Sonne und an Stelle des fallenden Körpers der Planet. Wegen seiner grofsen Wichtigkeit wollen wir dasselbe aber doch noch besonders behandeln. Die Übereinstimmung der Resultate mit den durch die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung gefundenen wird uns dann eine Gewähr sein für die Richtigkeit der zu Grunde gelegten Prinzipien und der darauf gegründeten Methode.

Es sei also jetzt M die Masse der Sonne, m die Masse eines Planeten, der in der Entfernung r_0 von der Sonne einen Impuls in beliebiger Richtung erhalte, dessen Arbeit h' sei. Bezeichnet dann a die kürzeste Entfernung des Planeten von der Sonne, so ist die Gesamtwirkung**) der letzteren auf den Planeten offenbar:

$$\frac{Mm}{a}.\text{***)}$$

*) Wir haben diese Bemerkungen, die der Herr Verfasser in Klammern hinzugefügt hatte, um den Text nicht zu sehr zu zerreifsen, als Anmerkungen setzen lassen. D. Red.

**) Die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Planeten aus der Entfernung a bis an die Grenze des Wirkungsraumes der Sonne zu heben.

***) Man könnte dieselbe auch $\frac{Mm}{a}$ + const. setzen.

Demnach ist der Arbeitsvorrat in der ursprünglichen Entfernung r_0 gleich:

$$\frac{Mm}{a} - \frac{Mm}{r_0}$$

vor der Bewegung, und in einer beliebigen andern Entfernung r ist er daher:

$$\frac{Mm}{a} - \frac{Mm}{r_0} + \left(\frac{Mm}{r_0} - \frac{Mm}{r}\right) = \frac{Mm}{a} - \frac{Mm}{r}.$$

Die lebendige Kraft in der genannten Entfernung ist:

$$h' - \left(\frac{Mm}{r_0} - \frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2} mv^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und zwar einerlei ob durch den Impuls der Planet von der Sonne entfernt oder ihr genähert wird.*)

Die Gleichung der Bewegung ist also

$$\frac{Mm}{r} + \frac{Mm}{r'} = \frac{Mm}{a} + \frac{Mm}{r_0} - h'$$

oder wenn man vorübergehend

$$\frac{Mm}{a} + \frac{Mm}{r_0} - h' = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

setzt:

$$\frac{Mm}{r} + \frac{Mm}{r'} = h \text{**)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Nun ist bekanntlich die Gleichung eines Kegelschnittes in Polarcoordinaten mit dem Brennpunkte als Pol und der großen Achse als Polarachse, wenn p den Parameter und S den Polarwinkel bedeutet

$$r = \frac{p}{2} \frac{1}{1 - e \cos S}.$$

Dem radius vector r', welcher r conjugiert ist, entspricht der Polarwinkel $180 + S$. Es ist also:

$$r' = \frac{p}{2} \frac{1}{1 + e \cos S}$$

und folglich hat man:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{4}{p} \text{***)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

---

*) In dem einen Falle ist nämlich der Klammerausdruck negativ, im andern positiv.

**) r' ist die Entfernung jenes Punktes auf dem radius vector des Punktes r von der Sonne, in welchem das Potential gleich dem Arbeitsvorrat des Punktes r ist. Siehe S. 21 der Schrift. Die Gleichung drückt daher das Prinzip der Erhaltung der Kraft aus in einer Form, wie sie wohl zuerst von mir gegeben wurde. Die Gleichung (20) ist giltig für alle Punktepaare r, r' auf den durch die Sonne in der Ebene der Bahn gelegten Geraden.

***) Durch diese Eigenschaft allein ist allerdings ein Kegelschnitt nicht definiert, wie in der Anmerkung richtig gesagt ist. Nimmt man

Es erfüllt somit ein jeder Kegelschnitt die Bedingung (20) und wir haben den Satz:

> Die Planetenbahn ist ein Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkte die Sonne steht.

Durch Gleichsetzung der rechten Seiten von (20) und (21) erhält man den Parameter des Kegelschnittes:

$$p = \frac{4Mm}{h}.$$

Wenn ferner a die kürzeste Entfernung des Planeten von der Sonne bedeutet, so ist, wenn a' den radius vector des andern Scheitelpunktes bezeichnet, die halbe grofse Achse A des Planeten:

$$\frac{1}{2}(a + a') = A.$$

Nun ist aber nach (20):

$$\frac{Mm}{a} + \frac{Mm}{a'} = h,$$

woraus folgt:

$$a' = \frac{Mm}{ah - Mm}$$

$$A = \frac{1}{2}(a + a') = \frac{a^2 h}{2(ah - Mm)}.$$

Bezeichnet nun e die Excentrizität des Kegelschnittes, so ist bekanntlich:

$$A^2 = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{1}{(1 - e^2)^2}.$$

Daraus folgt:

$$e^2 = \frac{A - \frac{2Mm}{h}}{A}$$

---

aber noch die Richtung der Tangente im Punkte r als gegeben an, so ist der Kegelschnitt vollständig bestimmt; denn der Brennpunkt, die beiden Punkte in den Entfernungen r und r' von ihm auf einer durch ihn gehenden Geraden und die Tangente in einem dieser Punkte vertreten zusammen die notwendigen fünf Bestimmungsstücke. Die physikalischen Bedingungen des Problems der Planetenbewegung stimmen aber mit diesen geometrischen überein: Der Ort der Sonne (Brennpunkt), die Anfangsstellung des Planeten (der Punkt r_0), die durch das Prinzip der Erhaltung der Kraft gegebene zweite Stellung des Planeten auf dem verlängerten Radius vector von r_0 (der Punkt r') und die Richtung des Impulses (nach dem Axiom von Huyghens die Tangente der Bahn im Punkte r_0). Jede Kurve, welche diesen Bedingungen gemäfs sich konstruieren läfst, mufs die Eigenschaft haben, dafs ihre Schnittpunkte mit jeder in der Ebene der Bahn durch den Mittelpunkt der Sonne gelegten Geraden sich wechselseitig entsprechen nach (20); diese involutorische Bedingung erfüllen aber nur die Kegelschnitte. Siehe übrigens auch No. 24 dieser Schrift. Dort ist gezeigt, dafs die Bahnkurve von jeder durch den Mittelpunkt der Sonne gezogenen Geraden nur in zwei Punkten geschnitten wird gemäfs dem Prinzipe der Erhaltung der Kraft.

oder mit Benutzung des obigen Wertes von A und Reduktion

$$e = \frac{2Mm}{ah} - 1.$$

Nun ist bekanntlich ein Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem seine Excentrizität kleiner, gröfser oder gleich der Einheit ist.

Die Criterien

$$\frac{2Mm}{ah} - 1 \lesseqgtr 1$$

entscheiden also darüber, ob die Planetenbahn eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist. Dieselben nehmen mit Benutzung des Wertes von h die einfache Gestalt an:

$$\frac{Mm}{a} \lesseqgtr \frac{Mm}{a} + \frac{Mm}{r_0} - h'$$

oder

$$h' - \frac{Mm}{r_0} \lesseqgtr 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Die Gröfse auf der linken Seite dieser Ungleichung ist aber die Konstante in dem Ausdruck für die lebendige Kraft (18) und somit haben wir den Satz:

Die Planetenbahn ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem die Konstante der lebendigen Kraft negativ, positiv oder der Null gleich ist.

Vorstehende Ungleichung, in der Form

$$h' \gtreqless \frac{Mm}{r_0}$$

geschrieben, liefert denselben Satz in der Form:

Die Planetenbahn ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem in der ursprünglichen Entfernung die lebendige Kraft kleiner, gröfser oder gleich dem Potential ist.

Wir schliefsen diesen Abschnitt, indem wir das darin Gesagte zusammenfassen in den Worten:

Der freie Fall und die Centralbewegung lassen sich aus ein und demselben Gesichtspunkt betrachten. Die Bahnen bei beiden Bewegungen sind involutorische Punktreihen erster, beziehungsweise zweiter Ordnung. Lebendige Kraft und Arbeitsfähigkeit in konjugierten Punkten entsprechen sich wechselseitig. Beide Bewegungen lassen sich ineinander projizieren.*)

---

*) Wie hieraus ersichtlich, ist nirgends vom Newtonschen Gravitationsgesetze die Rede. Dafs dieser Beweis des II. Keplerschen Gesetzes

Entgegnung auf vorstehende Bemerkungen.

Von Dr. H. Vogt in Breslau.

In der Anmerkung meiner Abhandlung, welche Herrn Schüler Veranlassung zu obenstehender Mitteilung giebt, habe ich behauptet, dafs die Bedingung $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h$, welche er zwischen den Radien-Vektoren solcher Bahnpunkte herleitet, deren Verbindungsgerade durch das Anziehungscentrum S geht, nicht ausreicht, die Bahnkurve als Kegelschnitt zu definieren. Diese Formel enthält nämlich gar keine Bestimmung darüber, nach welchem Gesetze die einzelnen Vektorenpaare r und r' sich auf die durch S gehenden Strahlen zu verteilen haben.

Durch sein Zugeständnis „durch diese Eigenschaft allein ist allerdings ein Kegelschnitt nicht definiert“ giebt Herr Schüler mir thatsächlich recht. Aber er sucht die Kegelschnittseigenschaft seiner Bahnkurve dadurch zu retten, dafs er auf die gegebene Bewegungsrichtung im Punkte r hinweist, und so zieht er im Verlauf derselben Anmerkung sein Zugeständnis wieder zurück. Er übersieht, und selbst die oben zitierten Worte geben schon dieser Verschiebung Raum, dafs es sich nicht darum handelt, aus gegebenen Elementen einen Kegelschnitt zu bestimmen, sondern festzustellen, ob die Kurve überhaupt ein Kegelschnitt ist oder nicht. Sein Fehler ist die unberechtigte Umkehrung eines richtigen Satzes. Richtig ist: „es erfüllt jeder Kegelschnitt die Bedingung $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h$“; falsch ist: „diese involutorische Beziehung erfüllt nur der Kegelschnitt.“

Wenn ich, von einer Anfangslage r_0 des Strahls durch S ausgehend, denselben von 0^0 bis 180^0 drehe, alle diese Strahlen, welche eine Halbebene füllen, durch eine beliebige Kurve K abgrenze, so dafs auf jedem ein Vector von beliebiger Länge r abgeschnitten wird, jeden Strahl über S verlängere um ein Stück r', wo $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h$ ist, so erhalte ich durch die Endpunkte der Vektoren r' eine Kurve K' in der zweiten Halbebene. Die Kurven K und K' zusammen erfüllen die involutorische Bedingung (20); auch habe ich es in der Gewalt, sie als stetige Kurven zu wählen, die in jedem Punkte eine Tangente haben, ja ich kann auch in beliebigen Punkten die Tangenten willkürlich wählen, und trotzdem wird wohl kein Mensch behaupten, dafs sie ihrer involutorischen Eigenschaft wegen oder wegen der vorher fixierten Punkte und Tangenten einen Kegelschnitt bilden müssen.

---

ein elementarer ist, wird wohl nicht bestritten werden können, denn es ist hiezu nicht nur keine höhere Rechnung, sondern eigentlich gar keine Rechnung erforderlich, indem durch blofse Operationen mit den der Rechnung zu Grunde gelegten Begriffen das Ziel ebenfalls erreicht wird. Diese Bemerkung möchte ich insbesondere den zitierten Worten Günthers und Moussons auf S. 484 des Vogtschen Aufsatzes entgegensetzen.

Nachbemerkung des Verfassers. Ich will die Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne auf die Herleitung des Newtonschen Gesetzes von G. Helm in Grunerts Archiv LXIII S. 326 aufmerksam zu machen, die ich erst jetzt kennen lerne. Dieselbe führt die Bewegung mit Anziehung zum Brennpunkt auf die mit Anziehung zum Mittelpunkt der Ellipse zurück, ist eine wohlgelungene Modernisierung des zweiten Newtonschen Beweises (Princip. math. I prop. XI idem aliter) und braucht wie dieser nur den Begriff der Krümmung und des Krümmungsradius, nicht die Ausrechnung des Krümmungsradius durch die Elemente der Ellipse.

Geographische Schmerzen.

(Die dritte Dresdener Elbbrücke im Daniel-Volz und das alte Wien im Egli, zwei Seitenstücke zum „Glauchauer Schafteich". Als Anhang drei allgemeine geographische Schwächen.)

Vom Herausgeber.

Wie notwendig es ist, dafs Verfasser geographischer Lehrbücher mitunter eine Reise machen, um zu sehen, ob die Angaben in ihrem Werke, besonders auch die topographischen und statistischen, noch mit der Wirklichkeit übereinstimmen, oder dafs sie, falls ihnen eine Reise nicht möglich ist, Mitarbeiter an wichtigen Orten werben, das hat uns wieder einmal die zufällige Entdeckung einiger starker topographischer Schnitzer in angesehenen Lehrbüchern der Geographie gezeigt.

Die Königl. Haupt- und Residenzstadt Dresden hat bekanntlich drei Elbbrücken: die alte „Augustusbrücke" nächst der Brühlschen Terrasse, die neuere sogen. „Marienbrücke", zugleich Eisenbahnbrücke, und die neueste, oberhalb der alten, die sogen. frühere Ziegelvorstadt, jetzt „Johannstadt", mit der Neustadt verbindende, zu Ehren des Königs Albert „Albert-Brücke" genannt. Das Lehrbuch der Geographie von Daniel-Volz (64. Aufl., Halle 1885) kennt aber S. 405 nur die ersteren zwei, die letztere noch nicht, obschon dieselbe schon seit 10 (sage zehn) Jahren dem Verkehr übergeben ist. Dies erinnert uns an die Geschichte vom „Glauchauer Schafteich", welche wir in dieser Zeitschr. Bd. VI, 411 (1875) zum besten gegeben haben.*)

*) Da dieser Bd. d. Zeitschr. vielleicht nicht in den Händen aller Leser ist, so sei hier kurz wiederholt, dafs in einer sächsischen Spezialgeographie „Engelhardts Vaterlandskunde", die im Jahre 1866 von Prof. Flathe in Meifsen in 9. Aufl. neu bearbeitet wurde, folgende Stelle vorkommt: „Der nahe Schafteich mit vier Inseln gehört zu den gröfsten Teichen Sachsens." Aber dieser weiland „Schafteich" war schon 1860 nicht mehr zu sehen, da bereits auf seiner Ausfüllung der — Bahnhof zu Glauchau stand. Also nach sechs Jahren (1866) noch ein solcher Irrtum! Man vergl. auch ds. Zeitschr. XII, 303.

Ein Seitenstück zu dieser ignorierten Elbbrücke bietet nun Egli in seiner neuen „Erdkunde" für höhere Schulen 7. (umgearbeitete!) Aufl. St. Gallen, 1887. Der Verfasser hat dort die Neugestaltung Wiens (seit 1858!) nicht berücksichtigt. Der Rezensent in der Zeitschr. f. Schulgeographie 1887, Hft. 12, S. 378 sagt hierüber: „er (Egli) schildert noch das alte Wien mit seinem berühmten Glacis und dem verblichenen 36 Vorstädten".*) Wenn so tüchtigen Autoren, wie die genannten sind, derartige Schnitzer unterlaufen, was muſs man da erst von weniger tüchtigen erwarten?

Auch in dem Lehrbuche der Geographie von Guthe-Wagner (5. Aufl. 1882—83), einem Werke, in welchem man nach Anlage und Umfang doch schon gröſsere Ausführlichkeit erwarten darf, ist die Topographie stiefmütterlich behandelt. Denn, was z. B. dort T. II, S. 708 über Dresden mitgetheilt wird, ist äuſserst dürftig, es ist weniger, als das im Daniel-Volz Gebotene, und das (S. 743) über Wien Gesagte ist ungenügend und zudem unklar.

Wir kommen daher aufs neue zu unserem schon im Jahre 1875 gemachten Vorschlage zurück: es möchten die Spezialgeographieen deutscher Länder von einem Vereine der Lehrer des Landes nach einheitlichem Plane verfaſst werden (s. VI, 455 u. f.). Denn diese könnten die etwaigen Veränderungen und Umgestaltungen ihres Orts am besten beobachten und Ende jedes Jahres dem Bearbeiter des Buches (Hauptredakteur) einsenden. Aus diesen Spezialgeographieen lieſse sich dann eine Geographie von Gesamt-Deutschland herstellen, und diese könnte auf dieselbe Weise kontrolliert werden.

Bei dieser Gelegenheit sei es gestattet, noch auf einige andere Schwächen in geographischen Lehrbüchern hinzuweisen:

1) die wenig einheitliche, ja oft geradezu widersprechende Orthographie und Grammatik. So schreibt z. B. Daniel-Volz: **K**onstanz und auf Sydows Schulatlas steht **C**onstanz.**) Ferner liest man der Tiber und auch die Tiber u. drgl. m.

2) der Mangel einer Tabelle über die gebräuchlichen geographischen Maſse. Ist diese nicht nötiger, als z. B. der lat. Vers *„Sunt aries gemini"* etc.? (Daniel-Volz, 64. Aufl., S. 5.)

3) Der Mangel oder wenigstens die Dürftigkeit veranschaulichender (mnemotechnischer) graphischer Darstellungen (s. dagegen z. B. die Schulgeographie von Kirchhoff 1882. S. 144/5. 214—215); Stromlängen und dergl.

---

*) Auch andere Fehler werden dort gerügt, z. B. daſs Fiume Ungarn einverleibt ist.

**) Man lese, was wir bezüglich der Orthographie Kassel im Anschluſs an Schlömilch (XVII, 188) hierüber in Heft 3, S. 159 dieses Jahrgs. gesagt haben.

Etwas Altes, das aber immer wieder aufgefrischt zu werden verdient.

(Die Graphik beim mathemat.-naturw., insbesondere beim arithmetischen Unterricht.)

Vom Herausgeber.

Wir erhielten von mehreren Seiten her kleine Artikel über die Unterstützung der Arithmetik, bezw. des arithm. Unterrichts durch graphische Darstellungen etwa unter der Überschrift: „bildliche Darstellung arithmetischer Verhältnisse" oder ähnlich. Unter Hinweis auf Artikel von Hauck und Höfler in ds. Ztschr. wird darin (freilich mehr angedeutet als) ausgeführt, auf welche Punkte etwa diese Zeichnungshilfen sich erstrecken müfsten. Hingewiesen wird auf die Koordinaten-Methode*), auf das Zeichnen der Netze in der Stereometrie**), ferner auf die geometrische Veranschaulichung von arithmetischen Sätzen, wie etwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, ferner auf die Konstruktion von Ausdrücken wie x^2, $\sqrt{x}$, x^3, $\sqrt[3]{x}$ (wir dürfen wohl hinzufügen: $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$ ..... und viele andere)***), weiter auf die Logistica (logarithmische Linie) und die Sinuscurve. Auch die Physiklehrer sollten — so meinen die Verfasser — ausgiebigeren Gebrauch machen von der Graphik und es wird z. B. erinnert an Thermometer- und Barometer-, und Hygrometer-Curven, ferner an Isobaren, Wetterkarten und an Darstellungen in der Akustik.

Wir haben hierzu Folgendes zu bemerken: Dieses Kapitel der — wie wir es nennen möchten — mathematischen und physikalischen Didaktik ist auch in dieser unsrer Zeitschrift schon oft berührt, angeregt und sogar in besondern Artikeln ausführlich behandelt worden.†) Aber auch besondere Schriften sind diesem

---

*) Hierfür hat Bardey in seinen arithmetischen Aufgaben, Leipzig 1882, S. 264 einen besondern Abschnitt XXXIII „Graphische Darstellungen".

**) Dieses Netzzeichnen ist ein notwendiger (integrierender) Teil der Stereometrie, der gar nicht als besondere (aufserordentliche) graphische Unterstützung dieses Teils der Geometrie aufzufassen ist. Das Zeichnen der Körpernetze ist, wie ich schon in Heft 7, S. 519 bemerkte, die Brücke einerseits zur darstellenden Geometrie, andrerseits zur Oberflächenberechnung der Körper. Ein Lehrgang der Stereometrie oder ein Unterricht, welcher diesen Teil der Stereometrie vernachläfsigt, ist als höchst mangelhaft zu verurteilen.

***) Siehe die Abschnitte über „Konstruktion algebraischer Ausdrücke" in: Mehler, Hauptsätze der Elem.-Mathematik 15. Aufl. S. 61. — Kambly, Elem.-Mathem. (Planimetrie) 46. Aufl. S. 87. — Reidt, Die Elemente d. Mathematik 9. Aufl., II. T. (Planimetrie) S. 124 Anhang 5.

†) Abgesehen von dem Kapitel über die „Lehrmittel" sehe man I, 212; II, 488; III, 55 u. 336; XIII, 272.

Gegenstande gewidmet.*) Wir wollen aber nicht unterlassen, ergreifen vielmehr gern aufs neue die Gelegenheit, auf die uns gewordene Anregung das Thema in Erinnerung zu bringen. Denn in den gangbaren Lehr- und Übungsbüchern sieht man von der graphischen Arithmetik herzlich wenig oder meist — gar nichts! Möglich, dafs der Gegenstand in einzelnen Programmen einigermafsen ausführlich behandelt ist. Selbst die schätzbare „Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen" von Reidt (Berlin, Grote. 1886), in der man einen hierauf bezüglichen Abschnitt erwartet, läfst den Suchenden im Stich; höchstens berührt sie den Gegenstand bei Auflösung der Gleichungen (S. 153) und bei der geometrischen Reihe (156). Auch in desselben Verfassers neuen sehr empfehlenswerten „Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra" (Berlin, Grote 1884) konnten wir keinen diesbezügl. Abschnitt finden.**) Noch weniger findet sich hierüber in dem den gleichen Zweck verfolgenden aber weit weniger erreichenden Buche von „Wittstein, die Methode des mathematischen Unterrichts" (Hannover, Hahn 1879), das überhaupt einen falschen Titel führt (sollte heifsen „geometrischen" statt „mathematischen"). Von jetzt ab aber sollte kein neues Lehrbuch der Arithmetik oder auch keine neue Auflage eines schon vorhandenen erscheinen, ohne diesen Gegenstand schulmäfsig zu behandeln, d. h. die ohnehin abstrakte Arithmetik durch die weit weniger abstrakte, weil anschaulichere, Geometrie und durch die Graphik zu unterstützen und sie so dem Lernenden zu erleichtern. Wir meinen jedoch, dafs ein tüchtiger und erfahrener Lehrer schon von selbst diese graphische Hilfe beim arithmetischen Unterricht benützen wird. Thut er es nicht, so beweist er damit, dafs er in der mathematischen Lehrkunst noch weit zurück ist. Man kann ihm freilich nicht zurufen er solle sich „sein Lehrgeld wiedergeben lassen"; denn er hat ja keins gezahlt für solche Unterweisungen, wie sie im Hochschulseminar (mit Übungsschule!) den jungen akademisch gebildeten Lehrern gegeben werden müfsten. Denn leider fehlen diese Anstalten immer noch, nachdem ohnlängst das Friedrichstädter Volksschullehrer-Seminar in Dresden sein 100jähriges Jubiläum gefeiert hat. Aber die Herren Schulräte, wenn sie überhaupt in dieser Sache „raten" können, d. h. wenn sie etwas davon verstehen und nicht blos Theologen und Philologen sind, könnten ihnen doch einige Fingerzeige hierzu geben, wie sie denn auch die Lehrmittelsammlungen der Privatschulen in

*) Wenk, die graphische Arithmetik und ihre Anwendungen auf die Geometrie. Berlin 1879 (rezens. XI, 293). — v. Ott, Das graphische Rechnen und die graphische Statik. I. Teil: Das graphische Rechnen. Prag 1879 (rezens. XII, 276). — Reuschle, Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen. Stuttgart 1884.

**) Der Rezensent (Suur) beider Bücher unterläfst leider (s. Heft 7, S. 507—514) hierauf aufmerksam zu machen.

Augenschein nehmen und den traurigen Zustand, in dem die meisten dieser Sammlungen sich befinden, einmal gründlich beheben sollten.

Trotz allem, was bereits über diesen Gegenstand geschrieben und gesprochen worden ist, würde doch eine zusammenfassende (prägnante) Darstellung des für die Schule Notwendigen und Geeigneten aus dem Gebiete der graphischen Didaktik und zwar abgeteilt nach Stufen (Klassen) und mit Rücksicht auf neuere Lehrmittel und die bereits vorhandene Litteratur (einschl. d. Art. in ds. Ztschr.) eine Arbeit sein, die von den noch in der Praxis stehenden Kollegen und besonders auch von Anfängern in der mathem. Lehrkunst dankbar hinzunehmen wäre.

Aber blose Andeutungen (oder Anregungen), so gut sie auch gemeint sein mögen, können uns nicht genügen und auch nichts nützen. Wir konnten uns daher zur Aufnahme der erwähnten kleinen Artikel nicht entschliefsen; denn es könnten solche Arbeiten leicht von scharfen Beurteilern mit kritischen Augen angesehen und als „oberflächlich" verurteilt werden; es könnten uns deshalb — wie das mitunter schon geschehen ist — aus den Kreisen der Leser ds. Ztschr. ausgesprochene an Vorhalte oder Vorwürfe grenzende Bedenken zugehen.

Wir fühlen uns daher gedrungen, bei dieser Gelegenheit unsere in dieser Ztschr. schon so oft ausgesprochene Mahnung in Erinnerung zu bringen: bei Aufsätzen die Arbeiten der Vorgänger zu berücksichtigen*). Denn wer die Arbeiten seiner Vorgänger ignoriert, darf sich nicht wundern, wenn den seinigen Gleiches widerfährt! —

Nachschrift. Wir würden den Lesern ds. Z. dankbar sein, wenn sie uns weitere Schriften über dieses wichtige Kapitel der Mathematik bezeichnen wollten, damit wir sie denjenigen, welche hierüber einen eingehenden Artikel zu liefern gewillt sind, in ds. Bl. bekannt geben. Wir vermuten, dafs auch einzelne Programme diesen Gegenstand behandeln; denn in den Programmen liegt manche Perle begraben.

Ebenso würden wir Hinweise auf lesenswerte geographische Schilderungen aus besseren Zeitschriften (N. fr. Pr., Grenzboten etc.) zur Belebung des geogr. Unterrichts dankbar entgegennehmen. Denn bei dem Mangel an Geographielehrern, welche den Stoff völlig u. z. Tl. aus eigner Anschauung beherrschen, wird dieser Unterricht häufig noch so erteilt, dafs er das Schmuckbeiwort „ledern" verdient. Dafs dabei auch dem Humor sein Recht wird, werden wir in einem nächsten Artikel „die Komik in der Geographie" zeigen. Auch hierzu sind Beiträge willkommen.

*) Selbstverständlich — falls es solche giebt, und der Gegenstand nicht völlig neu ist — was doch nur selten stattfinden dürfte.

Zum Aufgaben-Repertorium.*)

Redigiert von Prof. Dr. LIEBER-Stettin und C. MÜSEBECK-Waren.

A. Auflösungen.

666. (Gestellt von Kober XVIII$_2$, 133.) Gegeben ist ein Parallelogramm $CEDF$; die Parallele durch D zu EF treffe CE in A und CF in B, und ein durch C gehender beweglicher Strahl treffe ED in M und FD in N; dann ist $AM \parallel BN$. Zieht man $CX \parallel AM$, so ist $C(BAMX)$ harmonisch.

Beweis. $\frac{EA}{FN} = \frac{CE}{FN} = \frac{EM}{FC} = \frac{EM}{FB}$; und da $\sphericalangle AEM = NFB$, so ist $\triangle AEM \sim NFB$. Da nun $EA \parallel FN$ und $EM \parallel FB$, so mufs auch $AM \parallel NB$ sein. Trifft CX die Verlängerung von DE in G, so ist $\triangle CEG \cong AEM$ und daher $EG = EM$, folglich ist $C(GMEF)$ oder $C(BAMX)$ harmonisch.

BEYENS. EMMERICH. FUHRMANN. HELM. HODUM. KOBER. LENGAUER. v. MIORINI. STEGEMANN. TAUBERTH. WACHTER.

667. (Gestellt von Emmerich XVIII$_2$, 133.) Man sucht die Kanten eines gleichflächigen Tetraeders, wenn die Oberfläche f, der Radius r der Umkugel und a) das Volumen v, b) der Radius ϱ der Inkugel gegeben sind.

1. Auflösung. Da $v = \frac{1}{3} f\varrho$ ist, so macht es keinen Unterschied, ob r, f, v oder r, f, ϱ gegeben. Da das Tetraeder gleichflächig sein soll, so sind immer je zwei gegenüberliegende Kanten einander gleich und es seien x, y, z die Kanten des Tetraeders; ξ, η, ζ seien die Verbindungslinien der Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten, also die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Flächendiagonalen x, y, z, welches man demnach erhält, wenn man durch je zwei gegenüberliegende Tetraederkanten parallele Ebenen legt. Mithin ist $\eta^2 + \zeta^2 = x^2$, $\zeta^2 + \xi^2 = y^2$,

---

*) Im Aufg.-Rep. des vorigen (7.) Heftes ist leider ein recht störendes Versehen vorgekommen. Wir haben dasselbe dadurch gut zu machen gesucht, dafs wir das Blatt (S. 503/4) haben neu drucken lassen, sodafs es statt des früheren (zu vernichtenden) eingeklebt werden kann.

D. Red. d. Z.

$\xi^2 + \eta^2 = z^2$. Da die Umkugel des Tetraeders auch die des Parallelepipedons ist, so ist $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4r^2$ (1). Eine Tetraederfläche ist $\frac{1}{4}f$, mithin $-x^4 - y^4 - z^4 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2x^2y^2 = f^2$, oder wenn x, y, z durch ξ, η, ζ ausgedrückt werden $\eta^2\zeta^2 + \zeta^2\xi^2 + \xi^2\eta^2 = \frac{1}{4}f^2$ (2). Das Parallelepipedon besteht aus dem Tetraeder mit dem Volumen v und vier kongruenten Pyramiden, deren jede das Volumen $\frac{1}{6}\xi\eta\zeta$ hat. Mithin ist $\xi\eta\zeta = \frac{2}{3}\xi\eta\zeta + v$ oder $\xi\eta\zeta = 3v$, also $\xi^2\eta^2\zeta^2 = 9v^2$ (3). Aus (1), (2) und (3) ergiebt sich, dafs ξ^2, η^2, ζ^2 die Wurzeln der Gleichung $z^3 - 4r^2z^2 + \frac{1}{4}f^2 z - 9v^2 = 0$ sind.
Bermann. Emmerich. Fuhrmann. Hodum.

2. Auflösung. Da die Mittelpunkte der Umkugel und Inkugel zusammenfallen, so ist, wenn mit r_1 der Radius des Umkreises einer Seitenfläche bezeichnet wird, $r_1 = \sqrt{r^2 - \varrho^2} = \frac{\sqrt{r^2f^2 - 9v^2}}{f}$. Der Inhalt einer Seitenfläche ist daher $= \frac{xyz}{4r_1} = \frac{xyzf}{4\sqrt{r^2f^2 - 9v^2}}$; da f viermal so grofs ist, so ist $xyz = \sqrt{r^2f^2 - 9v^2}$ (1). Ferner ist $x^2 + y^2 + z^2 = 8r^2$ (2) und wie in der 1. Auflösung nachgewiesen $-x^4 - y^4 - z^4 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2x^2y^2 = f^2$. Quadriert man (2), addiert hierzu (3), so erhält man $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = \frac{1}{4}(64r^4 + f^2)$. Mithin sind x^2, y^2, z^2 die Wurzeln der Gleichung

$$z^3 - 8r^2z^2 + \frac{1}{4}(64r^4 + f^2)z - (r^2f^2 - 9v^2) = 0.$$

Beyens. Emmerich. Lengauer. Schmidt (Spremberg). Stoll.

668. (Gestellt von v. Schaewen XVIII$_2$, 133.) Zeichne das Netz der geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, von welcher gegeben ist die Gesamtoberfläche $= m^2$ und entweder die Höhe $= h$ oder die Seitenkante $= s$ oder der Radius der Inkugel $= \varrho$.

Auflösung. S sei die Spitze der Pyramide, SO die Höhe, AB eine Grundkante, C die Mitte von AB. Verlängere OC um $CD = SC$. Es sei $\frac{1}{2}m\sqrt{2} = k$.

a) Gegeben ist $SO = h$. Man kann $\triangle SOD$ zeichnen aus $SO = h$ und $OD = \sqrt{h^2 + k^2}$, daher auch SC und OC und damit das Netz. Die Aufgabe ist stets lösbar.

b) Gegeben ist $SA = s$. Man kann $\triangle ADO$ zeichnen aus $AD = s$, $\sphericalangle DOA = 45^0$ und dem Flächeninhalt $\frac{k^2}{4}$. Das Netz besteht aus acht solchen Dreiecken. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $k < s\sqrt{2}$ oder $m < 2s$ ist.

c) Gegeben ist der Radius der Inkugel $= \varrho$. Man kennt die Grundkante als eine der Katheten des Dreiecks, dessen Hypotenuse $= k$, dessen Höhe $= 2\varrho$ ist. Daher ist $\triangle SOC$ und somit auch das Netz zu zeichnen. Man erhält zwei verschiedene Lösungen, jenachdem man die gröfsere oder die kleinere Kathete als Grundkante wählt. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $k > 4\varrho$.

BERMANN. EMMERICH. FUHRMANN. HODUM. LENGAUER. STEGEMANN.

669. (Gestellt von Szimányi XVIII$_3$, 197.) Ist $x_1 + x_2 + \cdots x_n = a$ (wo $x_1, x_2, \cdots x_n$ wenigstens nicht alle gleich sind), so ist $a)\ \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^2$; $b)\ \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots x_n^3}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^3$.

Man setze $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = b$; $x_1^3 + x_2^3 + \cdots x_n^3 = c$.

$a)$ 1. Beweis. Es ist $a^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \cdots + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + \cdots + (x_3 - x_4)^2 + \cdots = nb$, folglich $a^2 < nb$, wo die x positiv oder negativ sein können.

SIMON (Berlin). STOLL (Bensheim).

Dieser Beweis findet sich in Klügels math. Wörterbuch V, Seite 543 und in Cauchys Algebraischer Analysis, Nota 2, Lehrsatz 15.

2. Beweis. Es ist $x_1^2 + x_2^2 > 2x_1x_2$, $x_1^2 + x_3^2 > 2x_1x_3$, $\cdots\cdots x_1^2 + x_n^2 > 2x_1x_n$, $x_1^2 + x_3^2 > 2x_1x_3, \cdots\cdots x_2^2 + x_n^2 > 2x_2x_n \cdots\cdots$ Addiert man diese Ungleichungen und dann noch auf beiden Seiten $x_1^2 + \cdots x_n^2 = x_1^2 + \cdots x_n^2$, so erhält man $nb > a^2$, mithin ist $\frac{b}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^2$.

EMMERICH (Mülheim a. d. R.). FUHRMANN (Königsberg i. Pr.). WACHTER (Schaarbeek bei Brüssel).

3. Beweis. Setzt man $x_1 = \frac{a}{n} + \alpha_1$, $x_2 = \frac{a}{n} + \alpha_2, \cdots x_n = \frac{a}{n} + \alpha_n$, wo $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n = 0$ sein mufs, so ist $\left(\frac{a}{n} + \alpha_1\right)^2 + \cdots \left(\frac{a}{n} + \alpha_n\right)^2 = n\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{2a}{n}(\alpha_1 + \cdots \alpha_n) + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$; folglich, da $\alpha_1 + \cdots \alpha_n = 0$, $x_1^2 + \cdots x_n^2 > n\left(\frac{a}{n}\right)^2$.

DREES (Oldenburg). MEINEL (Fürth). VON MIORINI (Bielitz). NISETEO (Zara). SZIMÁNYI (Trenchin).

$b)$ 1. Beweis. Es ist $ab + x_1(x_1 - x_2)^2 + x_1(x_1 - x_3)^2 + \cdots x_1(x_1 - x_n)^2 + x_1^2x_2 + \cdots + x_1^2x_n + x_2(x_2 - x_3)^2 + \cdots + x_2^2x_3 + x_2^2x_4 + \cdots + x_3(x_3 - x_4)^2 + \cdots + x_3^2x_4 + \cdots = nc$, aber nur unter der Voraussetzung, dafs alle x positiv sind; folglich ist $ab < nc$; da nach $a)$ $a^2 < nb$, so erhält man durch Multiplikation beider Ungleichungen $a^3 < n^2c$ oder $\frac{c}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^3$.

2. Beweis. Nach No. 552, XVII, 356 ist $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 > 3x_1x_2x_3$; ferner $x_1^3 + x_2^3 + x_4^3 > 3x_1x_2x_4, \cdots$ Addiert man diese Ungleichungen, so erhält man $\binom{n-1}{2} c > 3(x_1x_2x_3$

$+ x_1 x_2 x_4 + \cdots)$ (1.) Ferner ist $x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 > x_1 x_2$; multipliziert man beide Seiten mit $x_1 + x_2$, so ergiebt sich $x_1^3 + x_2^3 > x_1 x_2 (x_1 + x_2)$, ebenso $x_1^3 + x_3^3 > x_1 x_3 (x_1 + x_3)$ u. s. w. Durch Addition dieser Ungleichungen erhält man $(n - 1)\, c > x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \cdots x_2^2 x_1 + \cdots$ (2.) Multipliziert man (1) mit 2, (2) mit 3, addiert dann beide und aufserdem auf beiden Seiten c, so ergiebt sich $2\binom{n-1}{2} c + 3(n-1)\, c + c > a^3$ oder $n^2 c > a^3$ und daher $\frac{c}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^3$.

3. **Beweis.** Ähnlich wie a) 3. Beweis.
Dieselben wie bei a).

670. (Gestellt von Emmerich XVIII$_3$, 197.) In jedem sphärischen Dreieck, dessen Seiten nicht alle einander gleich sind, ist $2 \operatorname{tg} \varrho < \operatorname{tg} r$, wo ϱ der Radius des Inkreises, r der des Umkreises ist.

1. **Beweis.** Es ist $\operatorname{tg} r = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}$

und $$\cot \varrho = \frac{\sin s}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}};$$

also $$\operatorname{tg} r \cot \varrho = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}.$$

Der rechts stehende Quotient wird ein Minimum für $a = b = c$, also $s - a = s - b = s - c = \frac{a}{2}$ und mithin für diesen Fall $\operatorname{tg} r \cot \varrho = 2$. Für alle anderen Dreiecke ist $\operatorname{tg} r \cot \varrho > 2$ oder $\operatorname{tg} r > 2 \operatorname{tg} \varrho$.
Fuhrmann. Meinel.

2. **Beweis.** Nach No. 302, XV, 34 ist $\sin \delta^2 = \sin r^2 \cos \varrho^2 - 2 \sin r \cos r \sin \varrho \cos \varrho$, wo δ den Abstand der Mittelpunkte des Um- und Inkreises bezeichnet; mithin $\frac{\sin \delta^2}{\cos r^2 \cos \varrho^2} = \operatorname{tg} r^2 - 2 \operatorname{tg} r \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{tg} r (\operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} \varrho)$. Da der Ausdruck links eine positive Gröfse ist, so mufs auch der rechts eine solche sein.
Emmerich. Fuhrmann. Hodum (Stafsfurt). Stoll.

671. (Gestellt von Thieme XVIII$_3$, 197.) Die Lote, welche man von einem Punkte der Höhe eines schiefen Kreiskegels auf die Geraden des Kegels fällen kann, haben ihre Fufspunkte in einem Kreise (Wechselschnitt).

Beweis. C sei die Spitze des Kegels, ABC der Achsenschnitt, CD die Höhe. Fällt man von einem Punkt der Höhe, z. B. von D auf die Kegelkanten CE, CE_1, ... die Senkrechten DF, DF_1, ..., so liegen F, F_1, ... auf der über CD als Durchmesser beschriebenen Kugel. Da ferner $CD^2 = CE \cdot CF = CE_1 \cdot CF_1 = \cdots$ ist, so liegen E, E_1, ... F, F_1, ... auf einer Kugel. F, F_1, ... liegen also auf zwei verschiedenen Kugeln, mithin auf ihrer Durchschnitts-

linie, einem Kreise. — Da nun die Mittelpunkte beider Kugeln in der Ebene des Achsendreiecks liegen müssen, so wird der Mittelpunkt des Durchschnittskreises die Verbindungslinie der Fufspunkte der von D auf die längste und kürzeste Kegelkante gefällten Lote halbieren; daher ist diese Verbindungslinie Durchmesser des Durchschnittskreises und dieser selbst ein Wechselschnitt.

Bermann (Liegnitz). Drees. Emmerich. End (Würzburg). Fuhrmann. v. Miorini. Nisetro. Stegemann (Prenzlau). Stoll. Vollhering (Bautzen). Wachter. Züge (Lingen).

Von Meinel mit analytischer Geometrie bewiesen.

672. (Gestellt von Schlömilch XVIII$_3$, 197.) Ein Würfel kann durch einen ihm kongruenten Würfel so hindurchgesteckt werden, dafs der von letzterem übrig bleibende Rest einen allseitig zusammenhängenden ringförmigen Körper bildet. Es fragt sich, ob die genannte Eigenschaft des Würfels nur diesem oder auch anderen regulären bezw. unregelmäfsigen Körpern zukommt.

In Müttrich Sammlung stereometrischer Aufgaben (Königsberg 1869) ist die Frage für den Würfel gelöst in der Aufgabe 149, für das reguläre Tetraeder in Aufgabe 151 und für das reguläre Oktaeder in Aufgabe 153. — Hodum hat die Aufgabe ähnlich gelöst.

673. (Gestellt von Weinmeister XVIII$_3$, 197.) Auf dem Mantel eines Umdrehungscylinders (r, h) ist eine Schraubenlinie von n Gängen gezogen. An irgend einer Stelle sind zwei aufeinanderfolgende Schraubengänge durch eine Ganghöhe verbunden, und es ist über letzterer nach aufsen zu ein gleichseitiges Dreieck so angebracht, dafs seine erweiterte Ebene durch die Cylinderachse geht. Wird nun dieses Dreieck längs der Schraubenlinie verschoben und dreht sich zugleich seine Ebene um die Achse, so beschreibt es ein schiefes Schraubengewinde. Man soll den körperlichen Inhalt V der aus diesem Gewinde und dem Cylinder zusammengesetzten Schraubenspindel berechnen.

1. Auflösung. Jede durch die Achse der Schraubenspindel gelegte Ebene durchschneidet das Gewinde in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $\frac{h}{n}$. Dies würde auch der Fall sein, wenn das gleichseitige Dreieck sich nicht in einer Schraubenlinie bewegen, sondern um die Achse drehen würde. Daher hat ein Gang des Schraubengewindes denselben Kubikinhalt wie der durch Rotation des gleichseitigen Dreiecks um die Achse der Schraubenspindel entstehende Körper. Nach der Guldinschen Regel findet man hierfür $\frac{\pi h^2}{2n^2}\left(r\sqrt{3}+\frac{h}{2n}\right)$ und der Inhalt des ganzen aus n Gängen bestehenden Gewindes beträgt demnach $\frac{\pi h^2}{2n}\left(r\sqrt{3}+\frac{h}{2n}\right)$; mithin $V=\pi h\left(r^2+\frac{hr}{2n}\sqrt{3}+\frac{h^2}{4n^2}\right)$.

Drees. Hodum. v. Miorini. Raschig (Schneeberg). Stegemann. Vollhering. Wachter.

2. **Auflösung.** Das Volumen eines abgeschrägten Cylinders ist $sF \sin\alpha$, wo mit s die Verbindungslinie der Schwerpunkte seiner Endflächen und mit α der Winkel bezeichnet wird, unter welchem die Schnittfläche F gegen die Seitenkante geneigt ist. Man lasse nun den Schwerpunkt eines beliebigen ebenen Flächenstücks f eine Schraubenlinie durchlaufen; f liege dabei immer in einer Ebene, welche durch die Cylinderachse geht und behalte seine Lage gegen letztere während der Bewegung bei. Das so entstandene Schraubengewinde läfst sich dann in unendlich viele Teile teilen, von welchen ein jeder als abgeschrägter Cylinder aufgefafst werden kann. Man kann daher auf alle Teile obige Formel anwenden und erhält durch Vereinigung derselben die für das ganze Gewinde giltige Formel. Weiterhin ergiebt sich durch Abwickeln des Cylindermantels, dafs $s \sin\alpha$ der Projektion des vom Schwerpunkt durchlaufenen Weges auf die Grundfläche des Cylinders gleich ist. Im vorliegenden Fall ist diese Projektion $= 2\pi n\left(r + \frac{h\sqrt{3}}{6n}\right)$ und somit $V = \pi h\left(r^2 + \frac{hr}{2n}\sqrt{3} + \frac{h^2}{4n^2}\right)$.

Weinmeister (Tharand).

3. **Auflösung.** Die Basis des gleichseitigen Dreiecks durchläuft bei einer Umdrehung eine Fläche gleich $2\pi r\frac{h}{n}$ und die Spitze eine Linie von der Länge $\pi\left(2r + \frac{h}{n}\sqrt{3}\right)$. Den Wulst, welchen das gleichseitige Dreieck beschreibt, denken wir uns durch Ebenen, welche durch die Achse gehen, in eine sehr grofse Anzahl, z. B. x Teile zerlegt; dann ist jeder Teil des Wulstes bei unendlich grofsem x ein schief abgeschnittenes Prisma, oder es besteht aus einem Prisma, dessen Grundfläche das gleichseitige Dreieck und einer Pyramide, in der zwei Seitenflächen von dem gegebenen gleichseitigen Dreieck gebildet werden. Der Inhalt des Prismas ist $\frac{1}{2}\frac{h}{n}\frac{h\sqrt{3}}{2n}\cdot\frac{2\pi r'}{x} = \frac{\pi r\sqrt{3}}{2n}\left(\frac{h}{n}\right)^2$. Die Pyramide hat fünf gleiche Kanten $\frac{h}{n}$ und eine Kante gleich $\frac{\pi}{x}\left(2r + \frac{h}{n}\sqrt{3}\right) - \frac{2\pi r}{x} = \frac{\pi h\sqrt{3}}{nx}$. Als Grundfläche nehmen wir das gleichseitige Dreieck, also $\left(\frac{h}{n}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$;

dann ist die Höhe $\frac{\pi\sqrt{3}}{x}\frac{h}{n}\sqrt{1 - \frac{3\pi^2}{x^2}}$

und der Inhalt $\frac{\pi}{4x}\left(\frac{h}{n}\right)^3\sqrt{1 - \frac{3\pi^2}{x^2}}$.

Die Summe der x Prismen und x Pyramiden ist

$$\frac{\pi r\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{h}{n}\right)^3\sqrt{1 - \frac{3\pi^2}{x^2}},$$

also wird der Wulst für $x = \infty$ gleich $\frac{\pi r\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{h}{n}\right)^3$.

Addiert man hierzu den Inhalt des Cylinders $\pi r^2 h$, so erhält man den Inhalt der ganzen Spindel.

MEINEL. v. MIORINI ähnlich, aber, wie auch EMMERICH und STEGEMANN, mit Integralrechnung.

674. (Gestellt von Simon XVIII$_3$, 198.) Von einem beliebigen Punkt einer Dreiecksseite ausgehend, stumpfe man die drei Ecken des Dreiecks durch die gebrochene Linie $PQRS$ gleichschenklig ab (P und S auf BC, Q auf AB, R auf AC). a) P, Q, R, S liegen auf einem Kreise, der mit dem Inkreise koncentrisch ist. b) Setzt man die Konstruktion von S aus in derselben Richtung fort, so liegen auch die weiteren Punkte T und U auf demselben Kreise. c) $PS = QT = RU$. d) PS, QT, RU werden durch die Berührungspunkte des Inkreises des gegebenen Dreiecks halbiert.

Beweis. *a*) Die Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks ABC sind Mittelsenkrechte für PQ, QR, RS; daher ist der Mittelpunkt des Inkreises gleichweit entfernt von P, Q, R, S. *b*) R, S, T, U liegen nach *a*) auf einem mit dem Inkreise koncentrischen Kreise. Haben aber zwei koncentrische Kreise einen Punkt gemeinsam, so sind sie identisch. *c*) $PS = QT = RU$ als Sehnen, welche vom Mittelpunkte gleiche Entfernung haben; dieselbe ist gleich dem Radius des Inkreises von ABC. *d*) Die Sehnen PS, QT, RU werden durch die vom Mittelpunkt des Inkreises auf dieselben gefällten Senkrechten halbiert.

BERMANN. DREES. EMMERICH. HODUM. MEINEL. MEYER (Dresden). v. MIORINI. NISETEO. SIMON. STEGEMANN. VOLLHERING.

675. (Gestellt von Sporer XVIII$_3$, 198.) Innerhalb (oder aufserhalb) eines Kreises M sind zwei Punkte P und Q gegeben. Es soll auf dem Kreise ein Punkt C so bestimmt werden, dafs $\sphericalangle PCQ$ einen gröfsten (oder kleinsten) Wert annimmt.

Auflösung. Man konstruiere die beiden Kreise K_1 und K_2, welche durch P und Q gehen und den gegebenen Kreis berühren; dann sind die Berührungspunkte C_1 und C_2 die gesuchten Punkte. Liegen nämlich P und Q so, dafs PQ den gegebenen Kreis M schneidet, so ist $\sphericalangle PC_1Q$ ein Maximum; denn nimmt man einen anderen, aber auf derselben Seite der Geraden PQ liegenden Punkt X des Kreises M an, so schneidet wenigstens einer der Schenkel des Winkels PXQ, etwa PX, den Bogen PC_1Q des Kreises K_1 in einem Punkte Y. Nun ist $\sphericalangle PXQ < PYQ$ und $\sphericalangle PYQ = PC_1Q$, daher $\sphericalangle PXQ < PC_1Q$. Ebenso läfst sich beweisen, dafs $\sphericalangle PC_2Q$ ein Maximum ist. Man kann aber auch $\sphericalangle PC_2Q$ als negativ ansehen, weil der Schenkel C_2P, wenn er in die Lage C_2Q gelangen soll, in entgegengesetzter Weise gedreht werden mufs wie der Schenkel CP, wenn er in die Lage CQ gelangen soll; nach dieser Anschauungsweise ist $\sphericalangle PC_2Q$ ein Minimum. — Schneidet PQ den

Kreis nicht, so sind beide Werte des Winkels positiv und man erhält für die äußsere Berührung den kleinsten, für die innere den gröſsten Winkel.

BERMANN. BROCKMANN (Cleve). EMMERICH. FUHRMANN. GLASER (Homburg v. d. H.). HODUM. MEINEL. VON MIORINI. SPORER. (WEINGARTEN). STEGEMANN. VOLLHERING.

Stoll beweist den Satz mit Hülfe von analytischer Geometrie.

676. (Gestellt von Emmerich XVIII_3, 198.) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben eine Ecke A, der Grebesche Punkt K und a) der Mittelpunkt H des Umkreises, b) der Schwerpunkt E.

Die Aufgaben, zu denen die Herren Glaser und Meinel Lösungen eingesendet haben, waren bereits gedruckt, als die Programmabhandlung des Herrn Aufgabenstellers (Realgymnasium in Mühlheim a. d. Ruhr 1887), in welchem die Aufgaben unter Nr. 7 und 3 gelöst sind, erschien. Aus diesem Grunde wird daher von einer Mitteilung der Lösungen abgesehen.

677. (Gestellt von Artzt XVIII_3, 198.) a) In welchem Falle ist ein Dreieck seinem Mittelliniendreieck ähnlich? In einem solchen Dreieck b) ist $\cot\vartheta = \frac{3c^2}{4F} = \frac{3\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}$. c) berührt CK den Kreis mit dem Durchmesser HK, CE den mit dem Durchmesser EH' (E Schwerpunkt, H' Höhenschnittpunkt, K Grebescher Punkt, H Mittelpunkt des Umkreises).

a) Beweis. Da $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 = t_a^2$ ist, so können wir, um der Aufgabe zu genügen, setzen $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 = \lambda^2 a^2$ (1); $\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2 = \lambda^2 b^2$ (2); $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2 = \lambda^2 c^2$ (3). Durch Addition der drei Gleichungen erhält man $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; durch Subtraktion von (1) und (2) ergiebt sich $\lambda^2(a^2 - b^2) = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$ und da $\lambda^2 = \frac{3}{4}$, so ist $a^2 - b^2 = b^2 - a^2$, also $a = b$, ebenso $a = c$; mithin muſs das Dreieck gleichseitig sein. Der Aufgabe wird aber auch genügt, wenn gesetzt wird $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 = \lambda^2 b^2$ (1'); $\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2 = \lambda^2 a^2$ (2'); $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2 = \lambda^2 c^2$ (3'). Durch Addition findet man wieder $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Durch Subtraktion von (1') und (3') erhält man $\frac{3}{4}(c^2 - a^2) = \lambda^2(b^2 - c^2)$ und da $\lambda^2 = \frac{3}{4}$, so ist $2c^2 = a^2 + b^2$, also $t_c = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$; daher ist t_c die Höhe des über der Seite c konstruierten gleichseitigen Dreiecks. — Der Aufgabe wird z. B. genügt durch $a = 17$, $b = 7$, $c = 13$.

b) Beweis. $\cot\vartheta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4F}$ (Progr. d. Friedr. Wilh. Realgymn. in Stettin. 1886. §. 37) $= \frac{3c^2}{4F} = \frac{3\cdot 4r^2 \sin\gamma^2}{8r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{3\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}$.

ARTST (Recklinghausen). EMMERICH. FUHRMANN. MEINEL. STEGEMANN.

c) 1. Beweis. CH werde mit r bezeichnet; dann ist KH (Durchmesser des Brocardschen Kreises) $= r\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}\,\vartheta^2}$ (Progr. d, Friedr. Wilh. Realgymn. in Stettin. 1887. §. 83); und $CK = \frac{2abt_c}{a^2+b^2+c^2}$ (Progr. 1886. § 41); und in unserem Fall ist $CK = \frac{abc\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{4Fr\sqrt{3}}{4F\cot\vartheta}$ (Progr. 1886. § 37) $= r\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\vartheta$; also $CH^2 = KH^2 + CK^2$. — Ferner ist $H'C = 2r\cos\gamma$, $CE = \frac{2}{3}t_c =$ (in unserem Fall) $\frac{1}{3}c\sqrt{3} = \frac{2}{3}r\sin\gamma\sqrt{3}$ und

$$H'E^2 = \frac{4}{9}H'H^2 = \frac{4}{9}r^2(1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

$= \frac{4}{9}r^2(1-4(\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2-2)) = \frac{4}{9}r^2(9-12\sin\gamma^2)$ (da $a^2+b^2=2c^2$, also $\sin\alpha^2+\sin\beta^2 = 2\sin\gamma^2$ ist) $= 4r^2 - \frac{16}{3}r^2\sin\gamma^2$. Nun ist $H'E^2 + CE^2 = 4r^2 - \frac{16}{3}r^2\sin\gamma^2 + \frac{4}{3}r^2\sin\gamma^2 = 4r^2\cos\gamma^2$ $= H'C^2$.

EMMERICH. FUHRMANN.

2. Beweis. S_c sei der Mittelpunkt von AB und D der Fußpunkt der von C auf AB gefällten Höhe. Dann ist $CS_c = t_c = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$ und $CD = h_c = \frac{2F}{c}$, folglich $\frac{CS_c}{CD} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4F}$. Ferner ist CH' $= c\cot\gamma = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4F} = \frac{c^3}{4F}$ und $CE = \frac{2}{3}t_c = \frac{c}{\sqrt{3}}$; mithin $\frac{CH'}{CE} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4F}$. Da nun $\frac{CS_c}{CD} = \frac{CH'}{CE}$, so ist $\triangle CS_cD \sim CH'E$, also $\sphericalangle CEH' = CDS_c = 90^0$. Es ist $CH = r = \frac{abc}{4F}$ und $CK = \frac{ab}{c\sqrt{3}}$ (s. 1. Bew.), also $\frac{CH}{CK} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4F} = \frac{CS_c}{CD}$, und da K und E, sowie H' und H Winkelgegenpunkte sind, so ist $\sphericalangle KCH = DCS_c$, mithin $\triangle CKH \sim CDS_c$ und folglich $\sphericalangle CKH = CDS_c = 90^0$.

STEGEMANN.

3. Beweis. Wenn die beiden Dreiecke ähnlich sind, so ist $\sphericalangle AEB = \alpha + \beta$, $BEC = \gamma + \alpha$, $CEB = \beta + \gamma$, also $AKB = 180^0 - (\alpha + \beta - \gamma)$, $BKC = CKA = 180^0 - \gamma$, daher fällt K mit dem Brocardschen Punkt C_2 (Progr. 1887. § 104) zusammen und die Sekante CKC_2 wird zur Tangente. — Der Winkel-

gegenpunkt von K ist E, der von C_2 ist der Fufspunkt Z des Lotes von H' auf CE. Da C_2 und K zusammenfallen, ist dies auch mit E und Z der Fall. Artzt.

678. (Gestellt von Fuhrmann XVIII$_3$, 198 im Anschlufs an Nr. 625, XVIII$_3$, 195.) Sind A_2, B_2, C_2 die Brennpunkte der drei Parabeln, welche durch ähnliche Punktreihen auf den Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC erzeugt werden und verbindet man dann den Schwerpunkt E mit A und A_2, resp. mit B und B_2, C und C_2, so sind die Halbierungslinien der Winkel AEA_2, BEB_2, CEC_2 die gemeinschaftlichen Parabeltangenten der drei Parabeln.

Beweis. AE ist die Direktrix, A_2 der Brennpunkt der Parabel (bc) (vergl. Progr. Recklinghausen 1884, § 2, 2 u. 5); daher sind die Halbierungslinien L und L' des Winkels AEA_2 und seines Nebenwinkels Tangenten an (bc). Da nun die zwei gemeinsamen Tangenten T und T' an die drei Parabeln (bc), (ca), (ab) durch E gehen, so sind sie identisch mit L und L'.

Artzt. Emmerich. Stegemann.

Fuhrmann und ähnlich Meinel benutzen Nr. 625, XVIII$_3$, 195 und beweisen, dafs $2a_0A' = a_0A_\nu + a_0A_\mu$ ist; a_0A' wird also durch A_ν und A_μ harmonisch geteilt. Da nun $EA_\nu \perp EA_\mu$, so halbieren sie die Winkel zwischen Ea_0 und EA'; Ea_0 ist EA, EA' auch EA_2, da $A'EA_2$ in einer Geraden liegen.

Zusatz. Auf T und T' liegen die Achsen der Ellipse ABC, deren Centrum in E fällt. — Diese Achsen sind nämlich zunächst parallel den Halbierungslinien V und V' der Winkel $(BC, B'C')$ u. s. w. (vergl. Progr. Recklinghausen 1886, Seite 28, 20); also liegen BC und $B'C'$ symmetrisch zu V und V'. Nur ist ABC ungleichwendig ähnlich $A'B'C'$, also liegen auch die homologen Geraden EA und EA' oder auch EA und EA_2 symmetrisch zu jenen Halbierungslinien V und V'; da sie aber schon zu L und L' oder, was dasselbe ist, zu T und T' symmetrisch liegen, so sind V und V' den T und T' parallel. — Die Achsen der genannten Ellipse sind also den Asymptoten von Γ parallel. Artzt.

B. Neue Aufgaben.

725. Wenn man die Zahl e auf Grund einer der sie definierenden Formeln $\left(\text{z. B. } e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2}\cdots \text{ oder } \lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right]\right)$ auf 9 Decimalen berechnet hat und man kennt nicht die Theoreme über ihre Irrationalität, so wird die Wiederholung der vier Ziffern 1828 die Vermutung erwecken, dafs die Zahl periodisch sei. Hieran knüpft sich die allgemeine Aufgabe: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs, wenn in einer durch ein bestimmtes Operationsgesetz definierten

und diesem gemäfs auf eine bestimmte Anzahl von Stellen berechneten Zahl sich in den letzten Stellen eine Gruppe von m Ziffern $n$mal wiederholt, die Zahl jene m Ziffern zur Periode habe? (Hierbei stellt $n = 1$ den Fall dar, dafs die Zahl nicht periodisch erscheint und hierbei wieder $m = \infty$ den Fall, dafs sie wirklich nicht periodisch d. h. dafs sie irrational ist.) Höfler (Wien).

726. Auf den Seitenkanten SA, SB, SC einer durch die Grundfläche $ABC = G$ und die Höhe H gegebenen dreiseitigen Pyramide $SABC$ werden drei Punkte A', B', C' mit den bezüglichen Höhen h_1, h_2, h_3 angenommen. Wie findet man den Rauminhalt des schief abgeschnittenen Pyramidenstutzes? Welche Specialisierungen läfst die Formel zu? v. Miorini (Bielitz).

727. Nimmt man auf den beiden Diagonalen eines Vierecks die Punkte, welche zu dem Diagonalenschnittpunkt in Bezug auf die Mittelpunkte der Diagonalen symmetrisch liegen, so kann man das durch die zuletzt genannten drei Punkte bestimmte Dreieck aus dem Viereck schneiden, ohne die Lage des Schwerpunktes zu ändern.
Most (Koblenz).

728. Nimmt man bei einem beliebigen dreiachsigen Oktaeder auf jeder Diagonale den symmetrischen Punkt zu dem Achsenschnitt in Bezug auf die Mittelpunkte der Diagonalen, so kann das durch die vier zuletzt bezeichneten Punkte bestimmte Tetraeder aus dem Oktaeder he ausgenommen werden, ohne dafs die Lage des Schwerpunktes geändert wird. Most (Koblenz).

729. a) Dreht sich eine Trägheitsachse in der Ebene eines Quadrats um eine Ecke desselben, so hat das Paar der Nachbarecken in Beziehung auf sie ein unveränderliches Moment (d. h. die Quadratsumme ihrer Entfernungen von der Geraden ist unveränderlich). b) Das auf der Nebenachse einer Ellipse oder Hyperbel gelegene Punktpaar, welches vom Mittelpunkt ebenso weit absteht, wie die Brennpunkte, hat für alle Tangenten dasselbe Trägheitsmoment. c) Liegen zwei Punkte auf der nötigenfalls verlängerten Achse einer Parabel in gleichem Abstande a vom Brennpunkt F, so ist das Trägheitsmoment des nach dem Scheitel zu gelegenen Punktes P_1 für alle Tangenten um dieselbe Gröfse kleiner als das des anderen P_2. Weinmeister (Tharand).

730. Durch den Endpunkt F eines Kreisdurchmessers FG die Sehne FX so zu ziehen, dafs sie zu ihrem Abstande BL von einem auf FG gelegenen Punkt B im Verhältnis $p : q$ steht.
Weidenmüller (Marburg i. H.).

731. Auf einem mit dem Radius $CA = CB$ beschriebenen Kreisbogen AB ist ein Punkt D gegeben; durch D soll eine Gerade, welche CA in E und die verlängerte CB in F schneidet, so gelegt werden, dafs die Flächen ADE und BDF gleich sind. —

Wenn D auf AB fortrückt, so ändert die Gerade EF ihre Lage, bleibt aber immer Tangente an einer Hyperbel, welche die ins Unendliche fortgesetzten Radien CA und CB zu Asymptoten hat. Die Halbachsen dieser Hyperbel sind zu bestimmen. SCHLÖMILCH.

732. Im Sehnenviereck sind gegenüberliegende Winkel supplementär; im Tangentenviereck sind die Summen gegenüberliegender Seiten gleich. Diese Sätze sind auf das Kreis- bez. Tangentenvieleck zu erweitern. SCHUMACHER (Schweinfurt).

733. Sind Q, Q_1 die Schnittpunkte einer Ellipsentangente PT mit den Leitlinien der Kurve, F, F_1 resp. die benachbarten Brennpunkte, so wird der zum Punkte P gehörige Krümmungshalbmesser PR durch QF, Q_1F_1 harmonisch im Verhältnis $QQ_1 : Q_1P - QP$ geteilt. — Welche Eigenschaft der Parabel folgt aus diesem Satz? EMMERICH (Mülheim a. d. R.).

734. Vier Kegelschnitte, von denen jeder die Mittelpunkte der drei anderen zu je einem Tripel konjugierter Punkte hat, sind ähnlich gelegen und die reciproken Werte der Quadrate der Hauptachsen haben die algebraische Summe Null. KOBER (Schollwitz).

735. Gegeben ist ein imaginäres Viereck mit imaginären Diagonalen, dargestellt durch einen beliebigen Kegelschnitt K und eine in der Ebene desselben liegende elliptische Strahleninvolution mit dem Träger C; ferner eine reelle Gerade G, welche die Vierecksdiagonalen etwa in a und b schneiden möge. Man konstruiere die Verbindungslinien G_1 der Punkte a_1 und b_1, welche von a und b durch die imaginären Gegenecken des Vierecks harmonisch getrennt sind. DRASCH (Steyr).

Berichtigung.

627 b. (XVIII$_4$, 268.) Auch $x = \infty$ ist eine Wurzel der Gleichung.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Auflösungen sind eingegangen von: Bermann 709. Beyens 683. 687. 692. 693. 705. 706. Brockmann 675. 684. Drees 702. 705. 706. Emmerich 680—683. 685—689. 692—697. 699. 700. 702—710. End 684. 685. 692. 693. 702. 705. Fleischhauer 694. Fuhrmann 702—706. 708. 709. 713. 715. 722. 723. Hodum 670. 672—675. 679. 680. 683—687. 689. 692. 693. 697. Holzmüller 716. Hahn 683. 685. 686. 693. 695—697. Kiehl 624. 625. Meyer 662. 664 (zu spät) 674. Niseteo 695. 705. 706. Plaßmann 723. Rulf 705. Stegemann 702. 703. 705. 706. Stoll 702—707. 711. 712. 715—720. 722—724. Thieme 705. 706. 708. 709. Treumann 693. 705. Vollhering 703. Züge 692. 697.

Neue Aufgaben: Emmerich (6). Fuhrmann (2). Kiehl (4). Rulf (1). Thieme (2). (s. auch den Briefkasten am Schlusse des Heftes.)

Anhang zum Aufgaben-Repertorium.

Zwei arithmetische Aufgaben von Rich. Schurig, Mathematiker in Gohlis bei Leipzig.

(Aus dem arithm. Aufg.-Repertorium im „Leipziger Tageblatt" 1887 Nr. 86 u. Nr. 114. Vergl. Jahrg. XVII, 631).

I. (Aufgabe Nr. 381.)

Eine Zahl zu suchen, aus welcher durch Versetzung der 1. Stelle hinter die letzte oder auch der letzten Stelle vor die erste eine 2. Zahl dergestalt entsteht, dafs jene erste durch die zweite dividiert einen ganzzahligen Quotienten giebt. Hierbei sei 0 als 1. Stelle links ausgeschlossen,

z. B. 285714 und 857142; denn 857142 : 285714 = 3.

Auflösung (von Rich. Schurig). Es sei die gesuchte Zahl ohne die zu versetzende Stelle $= z$ (im vorstehenden Beispiel 85714), die zu versetzende Stelle $= x$ (im Beispiel 2), der Quotient $= y$ (im Beispiel 3).

1. Fall. Die erste Zahl (Dividend) sei z mit nachgesetztem x (s. ob. 857142), die 2. Zahl (Divisor): z mit vorgesetztem x (285714). Die Auflösung ist nur möglich, wenn $(x+1)\,y$ kleiner als 10 ist. Um z zu erhalten, dividiere man xy mit angehängten Nullen durch $10-y$ und setze die Nullen im Dividend so lange fort, bis der Rest $= x$ ist. Der entstehende Quotient ist die gesuchte Zahl z.

Beispiel: $x = 2$, $y = 3$, also $xy = 6$, $10 - y = 7$.

$$\frac{600000 : 7}{= 85714}$$

Da der Rest jetzt $= 2 = x$ ist, so ist 85714 die gesuchte Zahl z, $x = 2$ die nach- und vorzusetzende Stelle, der Quotient aus beiden Zahlen $= y = 3$.

Probe: 857142 : 285174 = 3.

Selbstverständlich findet man auch 857142857142 : 285714285714 = 3. Für diesen 1. Fall existiert nur noch 428571 : 142857 = 3.

2. Fall. Der Dividend sei z mit vorgesetztem x, der Divisor z mit nachgesetztem x, der Quotient beider Zahlen $= y$. Um z zu erhalten, dividiere man x mit angehängten Nullen durch $10y - 1$, bis der Rest $= xy$ ist. Die Lösung ist nur möglich, wenn x gröfser als y oder $= y$ und einer der Reste $= xy$ ist.

1. Beispiel: $x = 5$, $y = 4$, also $10y - 1 = 39$, der betreffende Rest $= xy = 20$.

$$\frac{500000 : 39}{= 12820}$$

Da der Rest jetzt $= 20 = xy$ ist, so ist 12820 die gesuchte Zahl z, $x = 5$ die vor- und nachzusetzende Stelle, der Quotient aus beiden Zahlen $= y = 4$.

Probe: 512820 : 128205 = 4.

2. Beispiel: $x = 9$, $y = 2$, also $10y - 1 = 19$, der betreffende Rest $= xy = 18$.

$$\frac{900000000000000000 : 19}{= 47368421052631578}$$

Da der Rest jetzt $= 18 = xy$ ist, so ist dieser Quotient die gesuchte Zahl, $x = 9$ die vor- und nachzusetzende Stelle, der Quotient aus beiden Zahlen $= y = 2$.

Probe: 947368421052631578 : 473684210526315789 = 2. Für $y = 2$ kann offenbar x jede der Zahlen 2 bis 9 sein.

II.

Das Abarechen eines Dezimalbruchs geschieht bekanntlich nach folgender leicht erklärlichen Regel:

> Ist die erste der weggelassenen Stellen kleiner als 5, so bleibt die letzte der beibehaltenen Stellen unverändert. Ist aber die erste der weggelassenen Stellen gröfser als 5, so wird die letzte der beibehaltenen Stellen um eine Einheit vergröfsert.

Sind daher die Dezimalbrüche 0,3475; 0,093487 ..., 0,69961 ...; 0,333333... auf 3 Dezimalstellen zu benutzen, so hat man 0,348; 0,093; 0,700; 0,333 zu schreiben. Wird ein gemeiner Bruch gesucht, der in einen Dezimalbruch verwandelt und auf 2 Dezimalstellen abgebrochen 0,49 giebt, so könnte man $^{20}/_{41}$ oder $^{37}/_{75}$ als Auflösung erhalten, denn $^{20}/_{41} = 0{,}487804...$; $^{37}/_{75} = 0{,}49333....$ Soll aber der gemeine Bruch gesucht werden, welcher den **kleinsten** Nenner hat, so wäre dies nur der Bruch $^{17}/_{35} = 0{,}48571....$, denn jeder andere gemeine Bruch mit noch kleinerem Nenner führt nicht zu dem abgebrochenen Decimalbruch 0,49.

Es soll nun der gemeine Bruch mit **kleinstem** Nenner gesucht werden, welcher auf 5 Stellen abgebrochen

0,39062

giebt. Wie bestimmt man denselben ohne alle Versuche?

Auflösung. Soll 0,39062 ein abgebrochener Dezimalbruch sein, für welchen der gemeine Bruch mit **kleinsten** Zahlen gesucht werden soll, so mufs derselbe offenbar gröfser als 0,390615 und kleiner als 0,390625 sein. Die Partialnenner der gleichbedeutenden Kettenbrüche sind:

$$0{,}390615 = 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 23, \ldots..$$
$$0{,}390625 = 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2.\quad (g\ k\ g\ k\ g\ k\ g\ \ k\ldots)$$

Da nun die Partialwerte abwechselnd gröfser (g) und kleiner (k) als der Wert des ganzen Kettenbruchs sind (s. § 91 im 3. Teile des Lehrbuchs der Arithmetik von Richard Schurig, welcher Paragraph die Kettenbrüche vollständiger, klarer und evidenter behandelt, als jedes andere Lehrbuch), so mufs mit Rücksicht auf den zuerst abweichenden 6. Partialnenner

$\frac{16}{41}$ kleiner als 0,390615, $\frac{25}{64}$ (der ganze Kettenbruch) $= 0{,}390625$ sein.

Beide gemeine Brüche sind offenbar unbrauchbar, da der gesuchte Bruch nicht kleiner als 0,390615 und nicht $=$ 0,390625 sein soll. Folglich hat man, um Zwischenwerte zu erhalten, dem Kettenbruch für 0,390625 eine gröfsere Zahl von Partialnennern zu geben. Man erreicht dies, wenn man dem letzten (6.) Gliede $\frac{1}{2}$ die Form giebt.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\infty}}}$$

Die Partialnenner sind jetzt:

$$0{,}390615 = 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 23, \ldots..$$
$$0{,}390625 = 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ \infty.$$
$$g\ \ k\ \ g\ \ k\ \ g\ \ k\ \ g\ \ k$$

Nimmt man mithin für den 8. Partialnenner eine der Zahlen 24, 25, 26 bis $\infty - 1$, so erhält man einen Partialwert, der gröfser als 0,390615 und kleiner als 0,390625 ist. Von allen diesen Partialwerten aber mufs der mit dem Partialnenner 24 offenbar die **kleinsten** Zahlen enthalten und folglich ist

$$2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 24 = \frac{616}{1577} \text{ der gesuchte Bruch.}$$

Litterarische Berichte.

A. Rezensionen.

PFEIFER, DR. FR. XAV., (K. Lycealprofessor in Dillingen, Baiern), Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst. Mit vielen hundert Nachweisungen und 13 Lichtdrucktafeln. Augsburg, Verlag des Litter. Inst. von Dr. M. Huttler (ohne Jahreszahl!). 230 S. gr. 8. Pr. 8 M.

II.*)

Es sei uns nach der ausführlichen Inhaltsangabe (Heft 1, S. 44 f.) gestattet, an der Hand derselben einige spezielle Bemerkungen über einzelne Punkte zu machen, um mit Rücksicht hierauf am Schlusse unserer Anzeige mit einem Urteile über das ganze Werk zu schliefsen.

Nach der (bereits früher erwähnten) kurzen Erklärung der Begriffe Verhältnis, Proportion, Progression, Reihe, (1) die beiläufig gesagt, für den mathematisch gebildeten Leser überflüssig ist, spricht Verfasser (2) von der Proportion des goldenen Schnitts insbesondere. Unsers Erachtens hätte er nun gleich von hier aus den Gegenstand mathematisch behandeln sollen, so dafs er, von der Definition des goldenen Schnitts ausgehend, zur Entwickelung der Gleichung, ihrer Auflösung und zur Diskussion des Resultats fortschritt, hieran die Konstruktion, welche die Ausführung des Schnittes — eigentlich die Hauptsache — zeigt, knüpfte und endlich daran noch spezielle Zahlenwerte schlofs. Die letzteren bringt Verfasser erst in Abschnitt 10 (Darstellung des goldenen Schnitts in Zahlen). Statt dessen ergeht sich Verfasser (S. 5) mit unnötiger Breite in einer Erörterung über die Unterscheidung der Begriffe „Proportion des goldenen Schnitts“ und „Schnitt selbst“, Erörterungen, die uns an einer bedauerlichen Unklarheit zu leiden scheinen oder mindestens zu Mifsverständnissen Veranlassung geben können und überdies unnötig sind. Verfasser sagt nämlich (S. 5):

„Da gemäfs der gegebenen Erklärung der goldene Schnitt zunächst eine Teilung ist, woraus dann eine bestimmte Proportion

*) Den I. Teil der Besprechung siehe in Heft 1, S. 44—47.

folgt, so sollte man, insofern die Proportion die Hauptsache und die Teilung oder der Schnitt nur ein Mittel zur Erlangung der Proportion ist, streng genommen anstatt des Ausdruckes „goldener Schnitt" den genaueren Ausdruck Proportion des goldenen Schnittes gebrauchen".

Zur Klarstellung gestatten wir uns, hierüber folgendes zu bemerken: Das erste (ursprüngliche) ist doch ohne Zweifel der goldene Schnitt (d. h. die Teilung) selbst und die Proportion ist nur der in mathematischen Zeichen gegebene Ausdruck für diese Teilung. Denn, wie alle Theorie erst auf dem Boden der Praxis gewachsen ist, wie also z. B. die Geometrie aus der praktischen Feldmessung (der alten Egypter), die Perspektive aus der praktischen Malerei, die Harmonielehre aus der praktischen Musik sich entwickelt hat, so hat die Lehre vom goldenen Schnitt ihre Keime (Wurzeln) im Boden der Kunst und zwar vorzugsweise der Baukunst. Man wollte z. B. die Höhe eines quadratischen Turmes mit einer achtseitigen regulären Pyramide krönen und suchte nun durch Teilungsversuche zu erfahren, welche Höhenverhältnisse hier zu wählen seien, damit die Teile, sowohl unter sich als auch im Vergleich zum Ganzen, ein dem Auge wohlgefälliges Bild des Bauwerks gäben. So kam man (vielleicht nach unzähligen verunglückten Versuchen, welche uns die Geschichte nur nicht aufbewahrt hat) auf das Verhältnis des goldenen Schnitts und nun erst kleidete man dieses Verhältnis in eine Proportion bezw. Gleichung ein und ersah daraus nach mathematischen Regeln wie die Teilung der ganzen Höhenlinie kunstgerecht zu machen sei. So ohngefähr dürfte der geschichtliche Gang gewesen sein.*) Der goldene Schnitt ist eine künstlerische That oder auch das Resultat derselben — denn der Ausdruck „Schnitt" ist doppeldeutig — die Proportion des goldenen Schnittes aber ist der mathematische Ausdruck dazu. Der „Schnitt" verhält sich zur „Proportion" des goldenen Schnitts, wie die Praxis zur Theorie. Meist wird nun in Ueberschriften (Titeln etc.) der Kürze halber die Kunst

---

*) Freilich liefse sich auch der Fall denken, dafs ein Philosoph, Mathematiker oder Künstler gleich anfangs, sozusagen *a priori* auf den Gedanken gekommen sei, diese Teilung direkt als Untersuchungsobjekt aufzustellen und sie dann erst mit andern ebenfalls willkürlich angenommenen Teilungen bezügl. ihres ästhetischen Eindrucks zu vergleichen. Doch scheint uns dieser letztere Fall als unwahrscheinlicher, obschon er den Pythagoräern, welche nach Cantor (Gesch. d. Mathematik I, 151) den goldenen Schnitt zuerst systematisch behandelt haben, zuzutrauen ist (s. das Geschichtliche ds. W. S. 40 u. f.). Gewifs ist, dafs Euklid diese Teilung bereits kannte, denn er hat sie in lib. II, Satz 11 behandelt. Auf den Gedanken: zu untersuchen ob diese Teilung bereits fertig in der Natur vorliege, ist man erst später gekommen.

Ob es übrigens nicht noch andere Schnitte, d. h. Teilungen einer Länge (Strecke) giebt, die ebenfalls einen wohlgefälligen Eindruck auf den Beschauer machen und einem Kunstgesetze genügen, kann hier nicht untersucht, soll aber wenigstens angedeutet werden.

(Konstruktion) selbst statt der Lehre von der Kunst genannt, z. B. „die Kegelschnitte" statt: „die Lehre von den Kegelschnitten"; „die Kreisteilung" statt: „die Lehre von der Kreisteilung"; „der Steinschnitt" statt: „die Lehre vom Steinschnitt" u. dergl. mehr. — Warum nun wegen solcher durch die Kürze motivierter Ausdrücke solche pedantische, minutiöse Unterscheidungen machen, welche doch die Sache nicht einen Schritt fördern? Sonach erscheint uns — entgegen der Ansicht des Herrn Verfassers — gerade der Schnitt (die Konstruktion, Teilung) als Hauptsache und nicht blos als „Mittel zur Erlangung der Proportion". Der Herr Verfasser scheint uns hier zu verwechseln den goldenen Schnitt und den Probeschnitt, besser: Probierschnitt. Solange man nämlich das (ästhetische oder Kunst-) Gesetz des goldenen Schnitts noch nicht kannte, mufste man Probierschnitte machen, die allerdings ein „Mittel zur Erlangung der Proportion" des Schnitts, aber nicht des „goldenen" (eher des blechernen) waren. Solcher (vergeblicher) Probierschnitte wurden vielleicht unzählige gemacht, ehe man auf den richtigen, den „goldenen" kam und erst nachdem er gefunden war, war seine Konstruktion mit Hilfe der Mathematik (Geometrie) möglich.

Mit derselben Weitschweifigkeit ist Nr. 3) (S. 5) „Nachweis der Berechtigung etc."*) behandelt. Des Verfassers Gedankengang ist nämlich folgender: Die Proportion des goldenen Schnitts mufs nicht gerade durch einen Schnitt (richtiger sagt man wohl „Teilung", denn der „Schnitt" ist nur das Mittel zur Teilung!) hervorgebracht sein; vielmehr kann die Teilung als schon vollbracht, die Teile können als schon vorhanden und ohne Beziehung auf die vorausgegangene Teilung betrachtet werden; m. a. W.: man kann von dem Akte der Teilung „abstrahieren". Die Teile sind dann auch von der Lage unabhängig, d. h. sie können verschiedene Lagen zu einander haben, sie brauchen nun nicht mehr, wie gewöhnlich (bei der Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt), Verlängerungen von einander zu sein. Verfasser nennt das „Modifikation der Lage"; man vergleiche z. B. Seiten und Diagonalen einer Figur, Parallelen innerhalb derselben, Längendimensionen an einem Körper z. B. Seiten- und Grundkanten etc.**) Er nennt daher Schnitt (= Teilung) und Lage „unwesentliche Momente". Demgemäss glaubt er den Begriff der Proportion des goldenen Schnitts „erweitern" zu müssen, indem er folgende angeblich die „wesentlichen" Momente (Merkmale) jenes Begriffs umfassende Definition giebt (S. 7): „Unter Proportion des goldenen Schnitts ist zu verstehen eine stetige geometrische Proportion zwischen drei ungleichen linearen Gröfsen, von welchen das kleinste Glied zum

*) „Nachweis der Berechtigung und Notwendigkeit, den Begriff der „Proportion des goldnen Schnitts" von dem Schnitte selbst zu trennen und jenen Begriff weiter als gewöhnlich geschieht zu fassen durch Losschälung desselben von allen unwesentlichen Elementen."

**) Solche Längen sind dargestellt auf dem Titelblatt des Werkes.

mittleren, wie dies zum gröfsten sich verhält und worin zugleich das gröfste Glied gleich der Summe der beiden andern ist. Diese Definition unterscheidet sich von der früher gegebenen dadurch, dafs sie von der Entstehung der Proportion durch die Teilung einer Linie und vom Lageverhältnis der Teile absieht." Uns erscheint das selbstverständlich. Denn unserem wissenschaftlichen und ästhetischen Gefühle nach versteht man unter „goldenem Schnitt" nicht sowohl den Akt der Teilung einer Strecke, sondern weit mehr die bereits fertigen von der Lage unabhängigen Teile, also den fertigen Schnitt, nicht ohne die Empfindung ihres wohlgefälligen Eindrucks auf das betrachtende Subjekt. Es liegt das schon in der Doppeldeutigkeit des Wortes „Schnitt", das nicht allein den Akt des Schneidens oder Teilens (sectio), sondern auch das Resultat dieser Thätigkeit, die Abschnitte (Teile, partes) bezeichnet. Aber hierzu bedurfte es doch nicht eines seitenlangen „Nachweises", sondern es genügte die einfache Bemerkung: es ist nicht gerade notwendig, dafs die Teile des goldenen Schnitts aus der Teilung eines Ganzen erzeugt gedacht werden, sondern sie können auch als bereits fertig vorliegend (neben-, unter-, übereinander lagernd oder gestellt) betrachtet werden, wie dies ja in der Natur auch vorkommt. Gleichwohl möchte auch diese Behauptung, so wichtig sie erscheinen mag, einer Einschränkung bedürfen; denn trotzdem dafs wir diese Teile häufig in gesonderter Lage betrachten, können wir doch die Vorstellung der Teilung nicht los werden. Denn das verbannte Ganze G ist ja doch gleich $M + m$ und wenn auch M und m als schon fertige Glieder auseinander liegen und uns in dem Verhältnis ihrer Längendimensionen ein uns wohlgefälliges Bild geben, so kehrt doch immer die (sozusagen hinausgeworfene) Vorstellung des Ganzen (G), aus dem die Teile M und m vorher entstanden sein müssen, in die Vorstellung zurück; unwillkürlich stellen sie sich uns im Gliede $M + m$ der Proportion

$$m : M = M : (M + m)$$

als wiedervereinigt vor; man wird dieses Ganze nie recht los, es schleicht sich, hinausgeworfen, trotzig zu einer Hinterthür wieder herein; kurz: der Gedanke, dafs in dieser stetigen Proportion die Teile M und m zusammengesetzt das Ganze geben ist nicht zu verbannen.

Auch die mathematische Entwickelung (S. 38, Abschn. 10), welcher, wie schon oben bemerkt, weit früher eine Stelle angewiesen werden mufste, ist verfehlt, weil unklar, weitläufig und überdies unvollständig. Die Konstruktion des goldenen Schnittes ist (S. 38) gar nicht ausgeführt, aber die (wenig elegante) Formel*) wie für einen Anfänger in der Mathematik in Worte übersetzt und auf ein Zahlenbeispiel angewendet.

*) $x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$.

Unserer Ansicht nach müfste der Gang der Darstellung etwa folgender sein: Zuerst wäre die Definition des goldenen Schnittes zu geben, demgemäfs die Proportion (Gleichung) aufzustellen. Bedeutet nämlich a die zu teilende Strecke und x ihren gröfseren Abschnitt (Major), so lautet die Proportion $a : x = x : (a - x)$ und daraus ergiebt sich die quadratische Gleichung $x^2 + ax - a^2 = 0$, aus der man erhält:

$$x = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) a \text{ oder } \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

einen Ausdruck, welcher bekanntlich mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes leicht zu konstruieren ist und der bei der Konstruktion der Seite des regulären Zehn- (und Fünf-) Ecks eine Rolle spielt*) übrigens in jedem guten Lehrbuche der Planimetrie gelehrt wird.**)

Hieran schliefst sich ungezwungen die Berechnung der Zahlenwerte. Setzt man nämlich $a = 1$, so giebt die obige Formel auf 3 Dezimalen abgerundet $x = 0{,}618$; für die kleinere Strecke, den Minor, bleibt dann übrig 0,382. Sonach lautet die Proportion numerisch:

$$1 : 0{,}618 = 0{,}618 : 0{,}382$$

oder allgemein, wenn man, wie Verf., das zu teilende Ganze mit G, den Major mit M, den Minor mit m bezeichnet, $G : M = M : m$ oder da $G = M + m$ sein soll

$$(M + m) : M = M : m \qquad (\#)$$

Aus dieser Darstellung wird auch dem Leser am besten klar, dafs diese stetige Proportion zwei Eigentümlichkeiten hat, nämlich: 1) dafs die Summe des mittleren und kleineren (vierten) Gliedes (Major und Minor) gleich dem gröfseren (ersten) Gliede ist und 2) dafs, was hieraus folgt, die Verhältnisse sowie der Wert des Major (d. i. des goldenen Abschnitts***)) irrational†) sind, Eigentümlichkeiten, welche andern stetigen Proportionen nicht zukommen (vgl. z. B. $8 : 4 = 4 : 2$; $12\frac{1}{2} : 5 = 5 : 2$).

Nimmt man aber, was für manche Fälle, z. B. für den S. 69

---

*) Bekannt ist, dafs die Seiten des regulären Zehn- und Fünf-Ecks im Verein mit dem Halbmesser des bez. Kreises ein rechtwinkliges Dreieck bilden. (Man s. hierüber mehrere diesbezügl. Artikel in Grunerts Archiv, sowie die sogen. Renaldische Konstruktion. Vergl. unsere Vorschule d. Geom. S. 142, Anm.)

**) Die S. 10—11 besprochenen Konstruktionen stehen in spezieller Beziehung zu besondern Pflanzenblättern (*Thalictrum flavum* u. a.).

***) Dafs der „goldene Abschnitt" immer der gröfsere (Major) ist, verschweigt Baltzer in seiner Definition (Elem. d. Math. 13. Aufl. 1870. Geom. S. 80, Anm.)

†) Aus der Proportion (#) ergiebt sich nämlich:

$$M^2 = (M + m)\, m \quad \text{und also} \quad M = \sqrt{(M + m)\, m} = \sqrt{Mm + m^2}$$

Wie man sieht, ist der Radikand ein unvollständiges Quadrat.

besprochenen und beschriebenen Proportional-Zirkel praktisch ist, den Minor als Einheit an, so erhält man (nach einem Satze der Proportionslehre) leicht:

$$\text{Minor} : \text{Major} = 1 : 1{,}618$$

d. i. in ganzen Zahlen ohngefähr 144 : 233, zwei Verhältniszahlen, die auch in der Laméschen Reihe*) (S. 100) vorkommen und sich leicht merken lassen. Für kleinere Dimensionen ist schon das Verhältnis 8 : 13 hinreichend genau.

Auch die übrigen hier nicht ausführlicher besprochenen Abschnitte dieses allgemeinen (theoretischen) Teils (bes. von S. 13 ab) haben auf uns den Eindruck der Weitschichtigkeit gemacht und es ist uns schwer geworden uns durch dieselben hindurchzuarbeiten. Wenn wir daher nun einen Rückblick thun auf die Abschnitte 1) bis 10) des allgemeinen Teils, so müssen wir uns leider dem Urteile Plaſsmanns, des strengsten Kritikers von Pfeifers Werk (vgl. die hierauf bezügl. Kontroverse Heft 2, S. 139) anschlieſsen, welches lautet: „leider befleiſsigt sich Verfasser einer Weitschweifigkeit, welche den Kenner verdrieſst und den Laien weder fesselt noch belehrt."

In Bezug auf das Geschichtliche, von welchem Verfasser nur die Hauptmomente (S. 40 etc.) geben wollte, ist ihm jedenfalls als nicht geringes Verdienst anzurechnen, daſs er das (jetzt schwer zu erlangende**)) Werk des Lucas de Burgo „*Divina proportione*" sorgfältig studiert hat und deshalb auch imstande war, die Irrtümer Sonnenburgs***) und Suters†), welche das genannte Werk gar nicht gelesen zu haben scheinen, zu berichtigen (S. 46—47).

Der Hauptwert des Buches liegt aber ohne Zweifel — wie schon im 1. Teile dieser Besprechung (Heft 1, S. 45) bemerkt wurde — in dem speziellen Teile (von S. 71 an) und zwar besonders in dem botanischen (Messung von Pflanzenteilen). Es wird Sache der Botaniker sein, besonders jener, welche den mathematischen Teil ihrer Wissenschaft zu ihrem Studien- und Arbeitsfelde erkoren haben, die Resultate dieser speziellen Studien zu prüfen und zu bestätigen.

Gegen diesen Abschnitt (Botanik) tritt freilich zurück der folgende über den goldenen Schnitt im Tierreich. Doch sind die gewonnenen Resultate, an denen auch andere Forscher††) teil haben,

---

*) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 477, 610 etc.

**) Das vom Verf. benutzte Exemplar des seltenen Werkes war aus der Münchner Staatsbibliothek entliehen. (Vgl. S. 44).

***) Sonnenburg, Der goldene Schnitt. Beitrag zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendung. O.-Progr. d. Gymn. zu Bonn (Nr. 367) 1881. (Siehe ein Referat hierüber in d. Progr.-Schau ds. Z. Jahrg. XIII, S. 401).

†) Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Zürich, 1873 u. 1875. 2 Bde. (Das von Pfeifer S. 47 aus Sonnenburg entlehnte Zitat von Suter steht dort Bd. I, S. 153).

††) z. B. Wasmann. Vgl. den Artikel in XVII, 425.

immer dankbar hinzunehmen. Völlig brach scheint dagegen noch zu liegen das Gebiet der Kristallographie, wo — wie man wenigstens vermuten darf — die bereits vorliegenden genauen Messungen die Untersuchungen bezügl. des goldenen Schnitts erleichtern. Gänzlich verunglückt aber erscheinen die Untersuchungen im Gebiete der Sternkunde (der goldene Schnitt im Planetensystem S. 76), welche mehr theoretischer Natur, nicht mit Unrecht von Plaſsmann u. a. angegriffen worden sind.

Wir müssen, genötigt durch den engbegrenzten Raum, uns mit diesen Bemerkungen begnügen, obschon uns noch manche Bedenken, besonders im allgemeinen Teile, aufgestoſsen sind, Bedenken, welche auch eine uns erst spät zugegangene weit ausführlichere Beurteilung des Werkes teilt.*)

Unser Schluſsurteil über das Werk lautet: Unter den Schriften über das behandelte Thema ist diese zur Zeit die umfassendste und eingehendste; die Wissenschaft, besonders die Botanik, ist dafür dem Verfasser zu Danke verpflichtet. Soll aber das Werk die wissenschaftliche Höhe, die seiner würdig ist, erreichen, bezw. sich darauf erhalten, so ist unseres Erachtens der allgemeine Teil umzuarbeiten, d. h. zu klären zu kürzen und neu zu ordnen. Im speziellen Teile ist der Abschnitt über Astronomie einer sorgfältigen Prüfung zu unterwerfen, bezw. hiernach umzuarbeiten, event. zu tilgen. Die neuen Untersuchungen sind auf Kristallographie auszudehnen und die älteren in den übrigen Gebieten zu prüfen, fortzuführen und bezw. zu ergänzen; die Resultate hiernach zu bestätigen, bezw. zu berichtigen und event. zu vermehren.

P. S. Es dürfte hier vielleicht eine passende Stelle sein, um nachträglich einer Rede zu gedenken, welche den eben besprochenen Gegenstand berührte. Zur Feier von Königs Geburtstag hielt nämlich im vorigen Jahre der erste Mathematiker am Staatsgymnasium zu Leipzig, Hr. Dr. Lehmann, einen Vortrag über „Rafaels Sixtinische Madonna". Darin wurde auch derjenige Teil der Mathematik gewürdigt, dessen die Malerei bedarf, nämlich die Perspektive, und hierbei fand auch der „goldene Schnitt" die ihm gebührende Stelle. Die nicht mathematisch gebildeten Zuhörer und Kollegen mögen sich wohl gewundert haben, daſs ein Mathematiker über einen Gegenstand sprach, der scheinbar (aber nach Laienmeinung ganz gewiſs) seinem Fache fern lag. Es möchte jedoch sehr heilsam sein, wenn mitunter — und geschähe es doch öfter! — den Laien in der Mathematik und besonders den die Kunst (oder auch nur Kunstgeschichte) als eine zu ihrem Gebiete gehörende Domäne betrachtenden Philologen (Philosophen, Theologen) zu Gemüte geführt würde,

---

*) Vielleicht würde es für die Fortführung der Untersuchungen und für eine neue Auflage des Buchs von Nutzen sein, später auf dieselben zurückzukommen.

dafs die Mathematik auch in das Gebiet der Kunst hinübergreift, ja dafs ein grofser Teil der Künste, besonders die sogenannten „bildenden" Künste, wie Baukunst, Malerei, Skulptur, Bühnenkunst und auch die Musik, durch die Lehren der Mathematik und Physik erst eine sichere Grundlage erhalten. H.

B. Programmschau.

Mathematische und naturwissenschaftliche Programme der Provinzen Preufsen und Posen.

Ostern 1887.

Berichterstatter Dr. Meyer, Rektor des Realgymnasiums zu Freiburg, Schl.

Preufsen.

Allenstein. Gymn. Progr. Nr. 1. Gymnasiall. Johann Wilhelm Bernhard Landsberg, *über einheimische Mikrostomiden.* 12 S. u. eine Figurent. 4°.*)

Der Verfasser giebt zunächst die Diagnose der von ihm untersuchten, der Familie Microstomida O. Schm. angehörenden, rhabdocoeliden Turbellarien: *microstoma lineare Oerst., Stenostoma leucops* O. Schm. und *Stenostoma unicolor O. Schm.*, und schildert sodann den histologischen Bau derselben, der bei allen von ihm untersuchten Arten grofse Übereinstimmung zeigt, im Zusammenhange, nachdem er einige Bemerkungen über seine Untersuchungsmethode, insbesondere über die Vorbereitung der Tiere für das Schnittverfahren und über die Herstellung der Zerzupfungspräparate vorausgeschickt hat. Die Beschreibung erstreckt sich insbes. auf die Epithelzellen des Integuments, die Haft- oder Klebzellen, den Hautmuskelschlauch, das Bindegewebe, den Verdauungsapparat, das Gehirn, den „Riechnerv" und die Wimpergrübchen, und schliefst mit einer Zusammenstellung der Resultate, einem Litteraturverzeichnis und einer Tafelerklärung.

Hohenstein in Ostpreufsen. Gymn. Progr. Nr. 5. Gymnasiall. Ernst Johannes Borchert, *eine Aufgabe aus der analytischen Mechanik.* 12 S.

Der Verfasser behandelt die Aufgabe: „Ein homogener geradliniger Stab liegt auf einer Horizontalebene und ist gezwungen, mit einem Endpunkte längs eines in der Horizontalebene liegenden straff gespannten Fadens ohne Reibung zu gleiten. Der Stab soll anfänglich einen rechten Winkel mit dem Faden bilden, und auf das freie Ende ein Stofs parallel dem Faden geführt werden. Welche Bewegung nimmt der Stab an?" und untersucht zunächst die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes und sodann die rotierende Bewegung des Stabes um den Schwerpunkt, wendet die gewonnenen allgemeinen Resultate auf ein numerisches Beispiel an, bespricht die Modifikation der Aufgabe für den Fall, dafs die Ebene, auf welcher der Stab liegt, schief ist, und schliefst mit Formulierung einiger Aufgaben, welche auf ähnliche Art gelöst werden können und sich auf die Bewegung einer Kugel, eines Cylinders und eines dreiachsigen Ellipsoids beziehen.

---

*) Da nach einer Mitteilung im letzten (7.) Hefte S. 559 die sämtlichen Schulprogramme des deutschen Reichs, mit Ausnahme der bayrischen, gleiches Format haben, so werden wir künftig die Formatbezeichnungen weglassen und sie nur bei der bayrischen anführen. D. R. d. Z.

Königsberg. Königl. Friedrichs-Koll. Progr. Nr. 7. Gymnasiall. Robert Noske, *die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid.* Teil II. 30 S.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der vorjährigen Programmarbeit des Verf., über welche in ds. Zeitschrift, XVII, 533 und 534 berichtet worden ist. Nachdem der Verfasser im ersten Teile der Arbeit die Formeln für das abgeplattete und das verlängerte Sphäroid entwickelt hat, geht er in dem jetzt vorliegenden 2. Teile zum dreiachsigen Ellipsoid über und entwickelt die Gleichung der kürzesten Linie auf demselben, so wie die Formeln, welche die laufenden Koordinaten der kürzesten Linie als Funktionen einer Variablen darstellen, durch welche nunmehr auch der Bogen der kürzesten Linie ausgedrückt wird. Hierauf werden die vier Nabelpunkte einer besondern Betrachtung unterzogen und die beiden Hauptarten kürzester Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid geometrisch erklärt.

Königsberg. Königl. Wilhelmsgymn. Progr. Nr. 8. Gymnasiall. Dr. Hans Lullies, *die Kenntnis der Griechen und Römer vom Pamir-Hochlande und den benachbarten Gebieten Asiens. Ein Beitrag zur Entdeckungsgeschichte.* 22 S.

Eine richtige Auffassung von dem orographischen Bau der gewaltigen Bodenanschwellung im innersten Asien, wo Himalaya, Hindukusch, Küenlün und Tiën-schan sich fast berühren, haben wir erst durch Fedschenkos Reisen im Alaigebiet (1868—71) und durch die grofse russische Expedition unter Putjata, Iwanow und Benderski (1883) erlangt. Auf Grund dieser berichtigten Kenntnisse des genannten Gebiets unternimmt es nun der Verfasser die Überlieferungen der Griechen und Römer, insbesondere des Hesiod, Aristeas, Hekatäus, Herodot, Ktesias von Knidus, Ephorus, Aristoteles, Nearchus, Megasthenes, Patrokles, Eratösthenes, Hipparch Polybius, Artemidorus, Apollodorus, Horaz, Florus, Isidorus von Charax, Agrippa, Strabo, Trogus Pompejus, Pomponius Mela, Plinius, des Periplus des erythräischen Meeres von einem unbekannten Verfasser, des Dionysius Periegetes, Marinus von Tyrus, Ptolemäus, Pausanias, Ammianus Marcellinus und Marcianus über diese Gegenden einer sachverständigen Kritik zu unterziehen.

Königsberg. Städt. Realg. Progr. Nr. 20. Oberl. Prof. Dr. Wilhelm Wegener, *Die Tierwelt bei Homer.* 40. S.

Die vorliegende Arbeit gehört nur in sofern in das Gebiet dieser Zeitschrift, als es jedensfalls auch dem Lehrer der Zoologie von Interesse sein mufs, von der Anschauungsweise des mit Recht beliebtesten klassischen Dichters über Leben und Treiben der Tierwelt eine übersichtliche Darstellung kennen zu lernen. Die Arbeit beginnt mit den allgemeinen homerischen Ausdrücken für Tier, wildes Tier, kriechende, fliegende Tiere, Vögel, Fische, grofse Seetiere. Von Säugetieren finden wir die Fledermäuse, den Bären, das Fell eines dem Marder ähnlichen Tieres, den Schakal, den Wolf, den Hund, den Löwen, den Panther, den Hasen, den Elephanten, das Schwein, das Pferd, den Esel, das Maultier, den Hirsch, das Reh, die Ziege, das Schaf, das Rind, den Seehund und den Delphin, von Vögeln den Geier, den Falken, den Adler, den Seeadler, den Habicht, die Weihe, den Kauz, den Nachthabicht, den Krammetsvogel, die Nachtigall, die Schwalbe, den Sperling, den Star, die Dohle, den Raben, die Taube, den Kranich, den Reiher, den Taucher, die Möve, den Schwan und die Gans, von Reptilien nur die Schlangen, von Fischen nur den Aal, von Gliedertieren die Spinne, die Heuschrecke, die Wespe, die Biene, die Grille, die Bremse, die Fliege (Stubenfliege, Stechfliege, Aasfliege, Hundsfliege), die Hundslaus, den Bohrwurm und den Regenwurm, und von Weichtieren nur die Auster und den Polypen erwähnt.

Osterode. Realg. Progr. Nr. 21. Ord. L. Dr. Carl Fritsch, *die Marklücke der Coniferen.* 14 S.

Es ist eine bekannte Erscheinung bei krautigen Pflanzen, dafs durch Lostrennung, Zerreifsung oder Zerstörung ausgebildeter Zellen Marklücken entstehen. Dafs aber durch die nicht erfolgte Streckung der Markzellen bei holzigen Gewächsen auf schizogenem Wege auch Lücken entstehen können, dafür bieten die Coniferen ein gutes Beispiel. Die Marklücke derselben entdeckte Herr Professor Caspary. Derselbe sagt (Schriften der physikal. ökonom. Gesellschaft. Königsberg 1874. S. 114, Anmerkung): „Bei *Picea excelsa, P. alba, Abies balsamea, A. pectinata, A. sibirica, Larix europaea* und gewifs auch bei andern Coniferen zeigt sich die merkwürdige Erscheinung, dafs normal das Mark in seiner ganzen Breite durch eine quere Lücke an den Stellen unterbrochen ist, wo sich ein neuer Jahresschofs als Fortsetzung des vorhandenen Schosses oder ein Seitensprofs anschliefst.“ Ihm verdankt die vorliegende Arbeit ihre Entstehung. Er überliefs das reiche Coniferenmaterial des königl. botanischen Gartens dem Verfasser zur Untersuchung und setzte ihn dadurch in den Stand, das Vorkommen der Lücke noch bei einer grofsen Zahl andrer Coniferen nachzuweisen.

Tilsit. Königl. Realg. Progr. Nr. 22. Oberl. Wilhelm Krüger, *über eine merkwürdige spontane Färbung von Bakterien in faulendem Rinderblute.* 17 S. u. eine Figurent.

In einem Blute, welches, von einem an Milzbrand erkrankten Rinde herrührend, dem Verfasser zugegangen war, fanden sich, als er dasselbe nach mehrmonatlichem Stehen auf Milzbrandsporen mikroskopisch prüfte, schwarzgefärbte Bakterienformen vor. Eine Durchmusterung der einschlägigen Litteratur, so weit sie dem Verfasser in der Kürze der ihm zugemessenen Zeit möglich war, ergab keine einzige Spezies, welche mit diesen Formen sich vergleichen liefs. Die von dem Verfasser angestellte mikroskopische Untersuchung macht es wahrscheinlich, dafs ein Mikrophyt zu der Bildung des schwarzen Farbstoffs in naher Beziehung steht, wenn er nicht gar als Ursache derselben anzusehen ist. Eine sichere Entscheidung hierüber würde erst durch Reinkulturen dieses Organismus zu erlangen sein. Der Verfasser behält sich vor, die Ergebnisse der weiteren Untersuchungen, so wie die Vervollständigung dieser Arbeit auch nach andern Richtungen hin später zu veröffentlichen.

Königsberg. Löbenichtsche höh. Bürgersch. Progr. Nr. 24. ord. L. Dr. Müller I., *Grundzüge der organischen Chemie* (Schlufs). 16 S.

Die vorliegende Arbeit bildet mit der vorjährigen Programmarbeit des Verfassers (über welche seinerzeit [Jahrg. XVII. dies. Zeitschr. S. 535] nicht berichtet werden konnte, weil sie dem Berichterstatter nicht zur Hand war, die aber jetzt ebenfalls mit vorliegt) zusammen Fortsetzung und Schlufs der Programmarbeit desselben Verfassers vom Jahre 1885, über welche im Jahrg. XVI. dies. Zeitschr. S. 519 u. 520 berichtet worden ist. Nachdem der Verfasser in seiner ersten Arbeit eine allgemeine Einleitung vorangeschickt und sodann zunächst die Kohlenwasserstoffe und deren Derivate, so wie die Kohlenhydrate behandelt hat, bespricht er in der vorjährigen Fortsetzung (21 S.) die Alkohole, Phenole und Äther, so wie die Aldehyde und die organischen Säuren im allgemeinen, insbes. die Ameisensäure, die Essigsäure, das Acetaldehyd, das Chloral und das Chloralhydrat, und in der diesjährigen Arbeit die Propionsäure und die Buttersäure, die Palmitin- und Stearinsäure, die Ölsäure, die Fette und Seifen, die Milchsäure, die Kleesäure, die Bernsteinsäure, die Äpfelsäure, die Weinsäure, die Bezonsäure, das Bittermandelöl, die Salicylsäure, die Gerbsäuren, die Cyanverbindungen, den Harnstoff, die Alkaloïde, die Proteïnkörper und die eiweifsähnlichen Substanzen.

Pillau. Realprog. Progr. Nr. 25. Oberl. Otto Rudolf Meifsner, *Beschreibung eines neuen Demonstrationsbarometers.* 6 S. u. eine Figurent.

So zahlreiche und praktische Apparate auch bekannt sind, welche den Zusammenhang zwischen der Dichtigkeit und der Spannung der Gase in einfacher Weise darstellen, so giebt es doch kaum eine Vorrichtung, welche in gleicher Einfachheit und Veränderungsfähigkeit das Gay-Lussacsche Gesetz zu beweisen gestattete. Der Verfasser beschreibt nun ein neues, von ihm konstruiertes, billiges Demonstrationsbarometer, welches ohne Hilfe eines Mechanikers auch von einem ungeübten Lehrer der Physik hergestellt und sowohl zum Beweise des Mariotteschen und des Gay-Lussacschen Gesetzes, als auch zur Darstellung der Dampfspannung im luftleeren und im lufterfüllten Raume benutzt werden kann. Derartige Mitteilungen werden ohne Zweifel von den Fachgenossen immer mit Dank aufgenommen werden.

Marienburg. Gymn. Progr. Nr. 35. Oberl. Prof. Rautenberg, *über diophantische Gleichungen des zweiten Grades.* 24 S.

Der Verfasser wünscht, dem strebsamen und wissbegierigen Primaner eine Gelegenheit zur Rekapitulation und ein Hülfsmittel für ein weiteres und tieferes Eindringen in den in der Klasse verarbeiteten Stoff zu bieten. Da in den mathematischen Elementarbüchern gar nicht oder doch nur nebenbei auf die Zahlentheorie und die diophantischen Gleichungen des zweiten Grades Rücksicht genommen wird, dieser Stoff aber sowohl objektiv, was das geistbildende Element desselben, als auch subjektiv, was das Interesse des Schülers betrifft, einer der dankbarsten des mathematischen Unterrichts ist; so giebt der Verfasser in der vorliegenden Arbeit die in der Aufgabensammlung von Heis, § 79, enthaltenen, hierher gehörigen Aufgaben, erheblich vermehrt und mit ausführlicher Angabe der Lösung versehen, und fügt zum Schlufs noch eine Zusammenstellung der in dieses Gebiet einschlagenden Sätze aus der Zahlentheorie nebst Beweisen hinzu.

Posen.

Schneidemühl. Gymn. Progr. Nr. 151. Oberl. Prof. Dr. Th. Bindseil, *Reiseerinnerungen von Sicilien.* 34 S.

Der Verfasser beschreibt eine im Sommer 1886 von ihm unternommene Reise nach der Nordwestecke Siciliens, insbesondere nach Palermo, Trapani, dem Berge Eryx, über Marsala, Mazzara und Castelvetrano, von wo die Tempelruinen von Selinus besucht wurden, und über Calatafimi zu dem Tempel von Segesta. Die frische und lebendige Schilderung der Reiseerlebnisse, sowie des Landes mit seinen zahlreichen historischen Erinnerungen und seinen archäologischen und Kunst-Denkmälern, seinem üppigen Pflanzenwuchs und seinen in vielfacher Hinsicht interessanten Bewohnern wird nicht nur von den philologischen Spezialkollegen des Verfassers, sondern auch von dem Lehrer der Geographie und der Naturgeschichte mit Vergnügen gelesen werden, da sich der Verfasser, wie für Geschichte und Archäologie, so auch für Natur begeistert zeigt.

Rawitsch. Realg. Progr. Nr. 159. Dir. Dr. Karl Heinrich Liersemann, *Maxima und Minima, analytisch-geometrisch beleuchtet.* 51 S. (31—81) und 8 Figuren. (4—11).

Nachdem der Verfasser zu der Abhandlung „Maxima und Minima, analytisch-geometrisch beleuchtet“ die Einleitung dem vorjährigen Programm beigegeben hat, über welches im XVII. Jahrg. dieser Zeitschr. S. 536 berichtet worden ist, legt er den Fachgenossen nunmehr die Arbeit selber vor. Nachdem der Verfasser seine neue Methode zur Untersuchung

algebraischer Kurven in der Einleitung auseinander gesetzt hat, zeigt er in der vorliegenden Abhandlung die überraschende Fruchtbarkeit dieser Methode in ihrer Anwendung auf die „Aufgaben über Maxima und Minima“, welche die „Methodisch geordnete Aufgabensammlung“ von Dr. E. Bardey auf S. 216 ff. (12. Aufl.) als Anhang zur „Anwendung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten“, so wie auf S. 299 als Anhang zu dem Abschnitt „Der binomische Satz“ enthält. Die erstaunliche Menge der eleganten Entwickelungen, welche der Verfasser bei der Diskussion der einzelnen Aufgaben, wie aus einem Füllhorn, ausschüttet, im einzelnen zu besprechen, gestattet der dem Berichterstatter zugemessene Raum nicht und er mufs sich darauf beschränken, die Fachgenossen auf eignes Studium der mit seltnem Geschick und grofsem Fleifs abgefafsten Arbeit mit Nachdruck hingewiesen zu haben.

(Die Programmschau von Schlesien folgt im 1. Hefte des nächsten Jahrgangs.)
D. Red.

C. Bibliographie.

September.

Erziehungs- und Unterrichtswesen.

Berner, Die Unhaltbarkeit der Reifeprüfung an den Mittelschulen. (15 S.) Brünn, Knauthe. 0,40.

Berthold, Schulinsp. Dr., Die Temperamente u. ihre pädagogische Behandlung. (64 S.) Leipzig, Siegismund. 1,00

Prüfungsvorschriften, die, für den Unterr. an höheren und niederen Schulen in Preufsen. 7. Aufl. (119 S.) Berlin, Heymann. 1,60.

Keferstein, H., Volkserziehung und Staatspädagogik. 5. u. 6. Heft der „deutschen Zeit- u. Streit-Fragen“. (72 S.) Hamburg, Richter 1,60

Rasp, Reg.-Ass., Die Ergebnisse der Unterrichts-Statistik im Königreich Bayern f. 1884—85. 52. Heft der Beiträge zur Statistik im Königreich Bayern. (229 S.) München, Lindauer. 4,00

Ehrenberger, Dr., Schule u. Haus. Eine pädagogische Studie. (25 S.) Leipzig, Fock. 0,60.

Krusche, Oberl., Litteratur der weiblichen Erziehung u. Bildung in Deutschland von 1700—1886. In 2 Abtlgn. nach der Zeitfolge geordnet u. mit Register versehen. (43 S.) Langensalza, Beyer. 0,60.

Haufe, Dr., Fremdländisches u. einheimisches Erziehungsleben u. Bildungswesen. (80 S.) Zürich, Schröter u. Meyer. 0,50.

Günther, Prof. Dr., Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum J. 1525. (3. Bd. der „Monumenta paedagogica“.) (408 S.) Berlin, Hofmann. 12,00.

Stürtz-Gebauer, Über Erziehung des weiblichen Geschlechtes. (16 S.) Zürich, Schröter & Meyer. 0,30.

Krönlein, Rect. Prof. Dr., Über akademische Freiheit. (29 S.) Zürich, Meyer & Zeller. 0,80.

Kastan, Dr., Gesundheitspflege in Haus und Schule. Ein Lesebuch für Eltern u. Erzieher. (263 S.) Berlin, Heine. 4,00.

Grünfeld, Das Leben des Pädagogen H. Pestalozzi. (63 S.) Schleswig, Bergas. 1,00.

Mathematik.

A. Reine Mathematik.

1. Geometrie.

Jost, Ing., Über einen neuen Ellipsenzirkel. (2 S. mit Taf.) Wien, Gerold. 0,30.

2. Arithmetik.

Schapira, Über ein allgemeines Princip algebraischer Iterationen. (24 S.) Heidelberg, Winter. 0,80.
Blater, Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200 000, welche die Ausführung von Multiplikationen, Quadrierungen u. das Ausziehen der Quadratwurzel bedeut. erleichtert u. durch vorzügl. Korrektheit fehlerlose Resultate verbürgt. (205 S.) Wien, Hölder. 12,00.
Gordan's, Dr., Vorlesungen über Invariantentheorie. Herausg. v. Dr. Kerschensteiner. 2. Bd. Binäre Formen. (360 S.) Leipzig, Teubner. 11,60.

B. Angewandte Mathematik.
(Astronomie. Geodäsie. Mechanik.)

Petersen, Prof. Dr., Lehrbuch der Dynamik fester Körper. Deutsche Ausg. unter Mitwirkung des Verf. bes. v. Oberl. Dr. Fischer-Benzon. (216 S.) Kopenhagen, Höst. 4,00.
Meyer, M. Wilh., Die Lebensgeschichte der Gestirne in Briefen an eine Freundin. Eine populäre Astronomie der Fixsterne. (224 S. m. 46 Textill., 2 Taf. u. 1 Titelbilde.) Jena, Mauke. 4,00

Physik.

Schröter, Prof., Untersuchungen an Kältemaschinen verschiedener Systeme. (171 S.) München, Oldenburg. 4,50.
Knoblauch, Geh.-R. Dr., Über die elliptische Polarisation der Wärmestrahlen bei der Reflexion von Metallen. Festschr. zur Erinnerung an das 200jähr. Bestehen der Leop.-Carol. Akad. als kaiserl. deutsch. Reichsakademie. (60 S. u. 29 Taf.) Leipzig, Engelmann. 12,00.
Mann, Prof. Rekt., Physikalisch-pädagogische Miscellen. (36 S.) Ulm, Ebner. 0,80.
Schütte, Prof. Dr., Physikalische Bilder. (400 S.) Leipzig, Strübig. 4,50.
Petroff, Gen.-Maj., Prof., Neue Theorie der Reibung. Aus dem Rufs. übers. v. Wurzel. Gekr. Preisschr. (187 S.) Hamburg, Vofs. 5,00.
Planck, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Gekr. Preisschr. (274 S.) Leipzig, Teubner. 6,00.
Puluj, Prof. Dr., Objektive Darstellung der wahren Gestalt einer schwingenden Saite. (4 S.) Wien, Gerold. 0,15.

Chemie.

Jung, Dr., Leitfaden für den Unterricht in d. Chemie für Mädchenschulen. 1. Kurs. Anorganische Chemie. (98 S.) Weimar, Krüger. 1,00.
— Dass. für Seminarien, Real- etc. Schulen. I. Anorg. Chemie. (129 S.) Ebenda. 1,20.

Beschreibende Naturwissenschaften.

1. Zoologie.

Hoffmann, Schmetterlingsetiketten. (48 Bl.) Stuttgart, Hoffmann. 1,20.
Franz, Dr., Deutschlands Schlangen mit bes. Würdigung des Bisses der giftigen Kreuzotter. Mit 2 Abb. (45 S.) Erfurt, Bartholomäus. 0,50.
Meyer, Hofr. Dr., Unser Auer-, Rackel- und Birkwild u. seine Abarten. Mit Atlas v. 17 kol. Taf. in Imp. Fol. (95 S.) Wien, Künast. 220,00.
Riehm, Dr., Repetitorium der Zoologie. Mit 243 Fig. (169 S.) Göttingen, Vandenhoek. 3,60.

Fritsch, Prof. Dr., Die elektrischen Fische. Nach neuen Unters. anatomisch-zool. dargestellt. (90 S.) 12 Taf. I. Abt. Leipzig, Veit & Co. 30,00.

2. Botanik.

Lahm, Gymn.-L., Flora v. Oberhessen. (106 S.) Gießen, Ricker. 2,00.
Gamroth, Prof., Beitrag zur Praxis des botanischen Unterrichtes an der Oberrealschule. (34 S.) Mähr.-Ostrau, Prokisch.
Studer, die wichtigsten Speisepilze, nach der Natur bemalt u. beschrieben. (24 S. u. 11 Chromolith.). Bern, Schmidt & Francke. 2,50.
Petri, Über die Methoden der modernen Bakterienforschung. (62 S.) Hamburg, Richter. 1,20.

3. Mineralogie.

Fischer, Taschenbuch für Mineraliensammler. (324 S.) Leipzig, Leiner. 2,80.
Ochsenius, Dr., Die Bildung des Natronsalpeters aus Mutterlaugensalzen. Mit 1 Karte u. 4 Profilen der mittleren südamerikan. Westküste. (176 S.) Stuttgart, Schweizerbart. 5,00.
Blaas, Dr., Bilder aus der Urwelt Tirols. Vortrag. (20 S.) Innsbruck, Wagner. 0,40.
Neumayr, Dr., Erdgeschichte. 2. Bd. Beschreibende Geologie. Mit 581 Abb., 12 Aquarelltaf. 2 u. Karten. (6. Bd. der „Allg. Naturkunde.) (879 S.) Leipzig, Bibl. Inst. 14,00.

Geographie.

Pechuel-Loesche, Doz. Dr., Kongoland. (521 S.) Jena, Costenoble. 10,00.
Atlas, topographischer, der Schweiz. 1 : 25 000. Bern, Schmid u. Francke. In ca. 40 Lfgn. à 9,60.
Lux, Hauptm., die Balkanhalbinsel mit Ausschlufs von Griechenland. Physikal. u. ethnographische Schilderungen und Städtebilder. Mit 90 Ill. etc. (276 S.) Freiburg, Herder. 6.
Hentschel, Prof. Dr. u. Dr. Märkel, Oberl., Rundschau in Heimat u. Fremde. Ein geographisches Lesebuch zur Ergänzung der Lehrbücher der Geographie, insonderheit derer von Seydlitz. 2. Bd. Europa. Mit vielen Abb. (459 S.) Breslau, Hirt. 3,60.
Hummel, Schulatlas zum Unterricht in der Erdkunde. 29 Karten mit 11 Nebenk. Halle, Anton. 1,20.
Leuzinger, Reliefkarte v. Mittel- u. Südbayern, Nordtyrol, Salzburg, nebst den angrenzenden Gebieten.
Schulwandkarte v. Österreich-Ungarn. 1 : 1000 000. 4 Blatt. Miltenberg, Helbig. 10,00.

Neue Auflagen.

1. Mathematik.

Kober, Dir. Dr., Aufgaben für den Rechenunterricht. 3 Hefte. 4. resp. 5. Aufl. (59 S., 60 S., 57 S.) Trier, Lintz. à 0,75.
Braune, Dir., Vollständige kaufmännische Arithmetik f. Handels-, Real- u. Gewerbeschulen. 6. Aufl. (336 S.) Leipzig, Hirt. 3,50.
Lieber, Prof. Dr. u. von Lühmann, Oberlehrer, Geometrische Konstruktionsaufgaben. 8. Aufl. (206 S.) Berlin, Simion. 2,70.
Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementarmathematik. Nach dem Lehrplan für das k. preufs. Cadettencorps bearb. von Prof. Strübing u. Prof. Dr. Hülsen. 2. Tl. Obertertia. 2. Aufl. (188 S.) Berlin, Nauck. 3,90.

Drobisch, M. W., Geh.-R. Prof. Dr. Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft. 5. Aufl. (247 S.) Hamburg, Vofs. 4.

Dirichlet, Lejeune-, Vorlesungen über die im umgekehrten Verh. des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Herausg. v. Oberl. Dr. Grube. 2. Aufl. (184 S.) Leipzig, Teubner. 4,00.

Keller. Lehrbuch der Buchstabenrechnung. 2. Aufl. (66 S.) Jena, Costenoble. 1,00.

Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit bes. Berücks. der neueren Methoden. Frei bearb. v. Prof. Dr. Fiedler. 5. Aufl. 1. Tl. (432 S.) Leipzig, Teubner. 8,80.

2. Naturwissenschaften.

Hoffmann, der Schmetterlingssammler. Beschreibung u. Abbildung der vorzüglichsten in Mitteleuropa heim. Schmetterl. Mit 263 col. Abb. 2. Aufl. (158 S.) Stuttg., Thienemann. 6,00.

Lüben's Naturgeschichte nach unterrichtlichen Grundsätzen, neu bearb. von Halenbeck. 11. Aufl. 3. Tl. (72 S.) Halle, Anton. 0,30.

Seidlitz, Doc. Dr., Fauna baltica. Die Käfer der Ostseeprovinzen Rufslands. 2. Aufl. Königsberg. Dr. Seidlitz' Selbstverlag. In Lfgn. à 1,50.

Zwick, Dr., Lehrbuch f. den Unterr. in der Botanik. 1. Kurs. 3. Aufl. (132 S.) Berlin, Nicolai. 1,20.

Hübner, Pflanzenatlas. 6. Aufl. (32 col. Taf. u. 32 S. Text.) Stuttgart, Weisert. 4,50.

Rufs, Dr., Sprechende Vögel. 2. Aufl. (457 S.) Magdeburg, Creutz. I. Papageien. 6,00.

3. Geographie.

Egli, Prof. Dr. Neue Erdkunde für höhere Schulen. 7. Aufl. (324 S.) St. Gallen, Huber u. Co. 3,40.

Kozenns, geographischer Schulatlas für Gymnasien, Real- etc. Schulen. Vollständig neu bearb. von V. v. Haardt, rev. von Prof. Dr. Umlauft. 43 Karten. 30. Aufl. Wien, Hölzel. 5,60.

—, ders. in 59 Karten. 31. Aufl. Ebd. 7,20.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. drgl.)

Ansichten eines preufs. Gymnasiallehrers über den gegenwärtigen Zustand des mathematischen Unterrichts in Gymnasien und über seine Verbesserung.

Mit Randbemerkungen des Herausgebers.

Abgedruckt aus dem Pädagog. Archiv Bd. XXIX 1887 Heft 4. S. 231 u. f. mit gütiger Erlaubnis der Redaktion d. Bl.

„Eine eingehendere Beleuchtung verlangt der Unterricht in der Mathematik; dieselbe mag mit der Bemerkung begonnen werden, dafs hier ein gewisser Fortschritt konstatiert werden kann, zu dem unter anderem auch die durch die neuen Lehrpläne von 1882 erfolgte Durchführung des propädeutisch-geometrischen Kursus in Quinta*) einiges beigetragen hat. Den Nutzen dieses Unterrichts, wenn er von einem geeigneten Lehrer im Sinne der offiziellen Verfügungen erteilt, also das Hauptgewicht auf die Erfüllung der Vorstellung des Schülers mit greifbaren Elementen der räumlichen Anschauung gelegt wird, hält der Verfasser für nicht gering, aber allerdings ist die Voraussetzung unabweislich, dafs dieser Unterricht keinen ungeeigneten Händen anvertraut wird. In dieser Hinsicht kommen noch recht ärgerliche Mifsgriffe vor, wie denn dem Verfasser ein Fall bekannt ist, wo ein Elementarlehrer, anscheinend gänzlich unbekannt mit den verschiedenen guten, neuerdings erschienenen einschlägigen Leitfäden, ganz fröhlich seinen Unterricht mit denselben abstrakten Definitionen über Gröfsen und Raumelemente, besonders auch den Punkt beginnt, die den doch immerhin noch etwas reiferen Quartanern weniger ungeniefsbar zu machen eben der Zweck dieses propädeutischen Kursus sein soll.

Wenn solche Mifsgriffe vermieden werden, so ist dieser propädeutische Kursus ohne Zweifel sehr nützlich und mitwirkend zu einem allgemeineren Verständnis für die Mathematik seitens der Schüler, wie es in der That neuerdings mannigfach beobachtet werden kann. Dieser Verstärkung der Wirksamkeit des mathematischen Unterrichts förderlich ist ferner noch eine etwas rationellere, den Fachlehrern eigene Unterrichtsmethode, ganz besonders aber jedenfalls der Zug der Zeit, die nun einmal von den exakten Wissenschaften beherrscht wird. Es ist in der That nicht gleichgültig, ob der Schüler von vornherein geneigt ist, das ihm durch den Unterricht mitgeteilte Wissen für nützlich zu halten oder nicht, und in dieser Hinsicht neigt sich die Wagschale mehr und mehr zu Gunsten der exakten Fächer, während der Sinn für die altsprachlichen Studien schwindet.

Trotzdem kann man nicht sagen, das die Mathematik innerhalb des

---

*) Dieser propädeutisch-geom. Unterricht war, wie wir schon wiederholt in d. Z. bemerkt haben, in Sachsen schon 20 Jahre früher. D. Red. d. Z.

gymnasialen Lehrplanes eine vollberechtigte Stelle einnimmt. Der erst ganz kürzlich (?) von Weifsenfels*) in der Zeitschrift für Gymnasialwesen gegen die Kompetenz des mathematischen Lehrers zur Beurteilung der Allgemeinreife eines Schülers erhobene Zweifel dürfte wohl noch immer die Meinung ausdrücken, die die Mehrzahl der philologisch geschulten Gymnasiallehrer, vor allem aber der Direktoren und der Schulräte beherrscht; es klingt in ihm eine Anschauung durch, an die auch ein mathematischer Fachlehrer (Erler) anläfslich einer Beleuchtung des Weifsenfelsschen Standpunktes erinnert, nämlich die schon früher von mancher Seite geäufserte Ansicht, dafs man ein vorzüglicher Mathematiker und dabei doch hinsichtlich der allgemeinen Geistesbildung sehr beschränkt sein könne.**) Begreiflicher Weise hat dieser Angriff in den Kreisen der mathematischen Lehrer entschiedenen Widerspruch***) hervorgerufen; der Äufserung selbst würde auch, als von offenbar nicht unbefangener Seite kommend, ein so grofser Wert nicht beizulegen sein, wenn sie nicht durch die Autorität eines Mannes unterstützt würde, den man doch nicht gut unter die Philologen rechnen kann, nämlich Liebigs. Dieser spricht sich in der Einleitung zu seinen chemischen Briefen in ganz demselben Sinne aus.†) Angesichts solch auffallender Übereinstimmung des Urteils zwischen Männern, die auf so total verschiedenem Boden stehen, kann man wohl sagen, dafs die Vermutung für einen berechtigten Kern der erwähnten Ansicht spricht. In der That, geht man unbefangen auf den Charakter ein, den der mathematische Unterricht an unseren höheren Schulen trägt, so mufs man zugeben, dafs das allgemeinbildende Moment in demselben aufserordentlich zurücktritt; im Vordergrunde steht eine gewisse Dressur für allerhand mathematische Kunststücke, deren Berechtigung auch für die Unterweisung der nicht spezifisch mathematisch beanlagten Schüler recht zweifelhaft erscheint.

Die Schuld an diesem Zustand liegt nur zum Teil bei den Fachlehrern, unter denen sich neben manchen hervorragenden und keineswegs in fachlicher Einseitigkeit aufgehenden Persönlichkeiten allerdings bisweilen auch recht wunderliche Heilige finden; den gröfseren Teil der Schuld trägt nach des Verfassers Ansicht der Lehrplan und die Auffassung der mafsgebenden höheren Instanzen, die — wie der Gang der Abiturienten-Prüfungen erkennen läfst — vielfach an die Möglichkeit einer tiefergehenden Wirkung des mathematischen Unterrichts nicht entfernt denken. Durch diesen Umstand wird auch dem eine solche Wirkung erstrebenden Fach-

---

*) S. d. Art. „Eine Wertschätzung des Schulmathematikers an einer höheren Schule seitens eines Schulphilologen" in d. Z. XVI (1885) S. 467 u. f. D. Red. d. Z.

**) Dieselbe Ansicht findet sich in Niemeyers Pädagogik. Wir haben zwar die Ansicht dieses Pädagogen hierüber schon einmal in dieser Ztschr. irgendwo mitgeteilt, können aber die Stelle nicht finden und wiederholen sie daher (Niemeyer, Grunds. d. Erz. II, Kap. 4): „Dafs man dies Alles (näml. mathemat. Wissen) zu einem hohen Grade von Vollkommenheit gebracht haben und dennoch, sobald es auf andere Operationen des Verstandes ankommt, höchst unbeholfen, bis zum Kindischen unverständig, umgekehrt aber, wenn der Geist eine andere Richtung genommen hat, von dem Allen wenig wissen und dennoch höchst gebildet, in andern Künsten und Wissenschaften erfahren, ja viel brauchbarer für die Welt sein kann — das wird zu wenig bedacht, so klar es, wenn man sich über sein beengendes Unterrichtssystem erheben und nur um sich schauen will, am Tage liegt."
Man sieht, der theologische Pädagog Niemeyer verstand es, sich derb auszudrücken. Man könnte aber das, was er in obigem Satze ausspricht, auch von einem Stockphilologen sagen, überhaupt von jedem einseitig gebildeten Menschen. Siehe jedoch den Art. von Erler in d. Z. XVII (1886) S. 75. D. Red. d. Z.

***) Nur Widerspruch? Vielmehr Entrüstung! Vielleicht aber auch Gelächter! D. Red. d. Z.

†) Wir haben deshalb auf der Leipz. Univ.-Bibl. diese Briefe nachgelesen, konnten aber in den Vorreden d. 4. Aufl. (1859), in der auch die Vorrede zur 1. u. 3. Aufl. abgedruckt ist, eine derartige Äufserung nicht finden. Die Verf. von Zeitschrift-Aufsätzen sollten aber doch in ihren Zitaten sorgfältiger sein! Sollte eine solche Äufserung sich nicht vorfinden, so behalten wir uns vor, den Verfasser zur Rechenschaft zu ziehen. D. Red. d. Z.

lehrer seine Thätigkeit sehr erschwert, namentlich da auch der offizielle Zuschnitt des Maturitäts-Examens derselben entgegensteht.

Die schriftliche Reifeprüfung in der Mathematik ist insofern von vornherein eine Anomalie, als in ihr nicht die Bearbeitung eines einzigen in sich geschlossenen Themas, sondern die Lösung von mehreren unter sich nicht zusammenhängenden, rein mechanisch zusammengewürfelten Aufgaben verlangt wird. Diese Einrichtung der Prüfung zeigt schon auf das deutlichste, wo es dem mathematischen Unterricht fehlt: dafs derselbe das Ziel einer harmonischen Ausbildung der seiner Wirkung zugänglichen Geisteskräfte nicht erreicht, sondern noch auf der obersten Stufe in eine Menge innerlich zu wenig verschmolzener Einzelheiten auseinanderfällt.

Überdies ist der Wert mancher mit besonderer Intensität gepflegter Zweige des mathematischen Unterrichts ein keineswegs zweifelloser, der Verfasser denkt dabei besonders an die auch im Abiturienten-Examen vielfach in den Vordergrund gestellten planimetrischen Konstrucktionsaufgaben. Gewifs ist die Verwendung des erworbenen geometrischen Wissens zur Lösung geeigneter Aufgaben sehr wichtig, aber dabei kommen vernünftiger Weise nur *die* Aufgaben in Betracht, bei denen die Lösung durch einfachere, mit einer gewissen Notwendigkeit sich ergebende Operationen bewirkt wird. Gerade diese Aufgaben aber sind bei einem grofsen Teile der Fachlehrer und auch bei den zur Beurteilung in höherer Instanz berufenen Autoritäten nicht besonders beliebt; viel mehr in Gunst stehen solche Aufgaben, deren Lösung nur durch einen *Kunstgriff**) bewirkt wird, auf welcher die Mehrzahl der Schüler überhaupt nicht kommen würde, wenn er nicht durch die in der Schule vorhergegangene Übung in der Lösung ganz ähnlicher Aufgaben ihnen nahe gelegt wäre. Die sogenannte Analysis derartiger Aufgaben ist in der Regel ein Gaukelspiel, (?) weil gerade der Schlüssel der Lösung, die Konstruktion ganz bestimmter, dieselbe ermöglichender Hilfslinien dabei ohne Motivierung bleibt**); solche Analysis ist nur ein Glied in dem äufserlichen Schematismus, durch welchen die innere Nutzlosigkeit dieser ganzen Dressur einigermafsen verschleiert wird. Die Unfreiheit, mit der manche Lehrer an diesem Schematismus hängen, ist auch ein charakteristisches Zeichen für die bei ihnen vorhandene mechanische Auffassung des ganzen Unterrichtsfaches.

Solche mechanische Auffassung ist aber keineswegs notwendig. Wie der Verfasser schon andeutete, weifs er sehr gut, dafs es auch jetzt eine ganze Reihe von mathematischen Fachlehrern giebt, die eine richtigere und tiefere Vorstellung von der wissenschaftlichen und unterrichtlichen Bedeutung ihres Lehrfaches haben; ihnen die Geltendmachung dieser Vorstellung durch eine geeignetere Gestaltung des Lehrplanes und des Abiturienten-Examens ermöglicht zu sehen, wünscht der Verfasser um so lebhafter, als er von dem grofsen Nutzen, den ein zweckmäfsig betriebener Unterricht in der Mathematik für die allgemeine Geistesbildung hat, auf das tiefste überzeugt ist.

Die mathematischen Aufgaben erfordern zu ihrer Lösung eine gewisse Technik; diese Technik steht gegenwärtig im Vordergrunde des Unterrichts, und aus dem Vorwiegen derselben ergeben sich alle die vorher erwähnten Momente, die der allgemein bildenden Wirkung des mathematischen Unterrichts im Wege stehen und den Vorwürfen Liebigs und der Philologen eine gewisse Berechtigung verleihen. Der Verfasser befürwortet, dafs die mathematische Technik in die zweite Linie gerückt, dafs sie zu der ihr zukommenden Stellung eines Hilfsmittels für die Durchführung gewisser

---

*) Man lese, was Dr. v. *Fischer-Benzon*-Kiel in ds. Z. XVI, 362 Anm. über diesen Begriff sagt. D. Red. d. Z.

**) Der Verfasser mag einen schönen Begriff von dieser „Analysis" haben. Er lese und studiere das neueste Buch hierüber von G. *Hoffmann*, rezensiert von Fischer-Benzon im 5. Hefte ds. Jahrgs. (S. 362), welches Buch diesen Teil der Mathematik als *Kunst* behandelt. D. Red. d. Z.

Gedanken zurückgeführt wird. Darum wünscht er die Beseitigung alles dessen, was dem Schüler als einzelnes Kunststück erscheinen mufs, darum plaidiert er vor allem für eine Richtung des Unterrichts, die bei der mathematischen Arbeit nicht auf die Gewandtheit der einzelnen zur Lösung herangezogenen Operationen, sondern auf den gedanklichen Inhalt den Hauptwert legt.

Dies ist aber nur möglich, wenn die vom Schüler geforderten mathematischen Ausarbeitungen namentlich auf der obersten Stufe einen gröfseren Umfang haben, und die Einführung solcher gröfserer Arbeiten befürwortet der Verfasser denn auch auf das lebhafteste nicht nur für das Abiturienten-Examen, wo an Stelle der jetzt vorgeschriebenen Lösung von vier kleineren Aufgaben eine einzige Arbeit über ein gröfseres Thema zu liefern sein würde*), sondern selbstverständlich auch für den Unterricht selbst, namentlich den auf der höchsten Stufe, der ja die Schüler zum Bestehen der Reifeprüfung fähig zu machen berufen ist. Dort würden neben regelmäfsigeren kleineren, die fortgesetzte Übung in der mathematischen Technik bezweckenden Aufgaben im Laufe des Schuljahres einige — und zwar, wie schon oben bei Besprechung des deutschen Aufsatzes erwähnt auch nicht zu viele — Ausarbeitungen ausgedehnteren Umfanges zu liefern sein. Den Stoff dazu würde die angewandte Mathematik bieten, auf die sich der Unterricht überhaupt vernünftigerweise mehr und mehr zuspitzen müfste. Welche Partieen der Mathematik und der Physik hiebei heranzuziehen wären, hängt natürlich unter anderem auch von den Grenzen ab, in welchen der mathematische Unterricht sich nach der Art der Lehranstalt bewegt; die Stoffe, die dem Realgymnasium zu Gebote stehen, werden mannigfaltiger sein als das für das Lateingymnasium in Betracht kommende Material. Jedenfalls wird es auf beiden Anstalten möglich sein, einen Teil der Aufgaben der praktischen Geometrie zu entlehnen, die der Verfasser hiefür vorzüglich geeignet hält, namentlich wenn dabei zugleich die topographischen Verhältnisse des Schulortes in angemessener Weise Verwendung finden. Eine solche Verwendung erscheint ihm einerseits als ein sehr passendes Mittel, das Interesse der Schüler zu wecken und zu fesseln, während sie andererseits ganz besonders berufen sein dürfte, die spezifischen Zwecke des mathematischen Unterrichts direkt zu fördern. Diese Zwecke erblickt der Verfasser (wie er hofft, in Übereinstimmung mit den mathematischen Fachlehrern) einmal in der Gewöhnung an eine richtige Anschauung, zweitens in der Erziehung zu geistiger Klarheit, die die Forderung, von allgemeinen Vorstellungen aus mit Hilfe der mathematischen Technik zu ganz speziellen Resultaten zu gelangen, notwendig mit sich bringt.

Arbeiten der eben vorgeschlagenen Art würden in ihrem Zuschnitt sich den Arbeiten annähern, die im späteren Leben vom Schüler verlangt werden, ja sie würden unter allen Schularbeiten die zweckmäfsigste Vorbereitung für die spätere Berufsthätigkeit gewähren. Es käme in solcher Arbeit vor allem darauf an, in einer sprachlich korrekten, wohl disponierten, logisch begründeten Auseinandersetzung der thatsächlichen, sich aus dem Text der Aufgabe ergebenden Verhältnisse die Punkte zu ermitteln, wo der Kalkül resp. die geometrische Operation einzusetzen hat, um an das Resultat derselben weitere, der schliefslichen Lösung dienende Betrachtungen zu knüpfen. Wer in seiner Darstellung eine richtige Auffassung der gegebenen Aufgabe selbst nach klarer Erkenntnis der zur Lösung nötigen Prinzipien an den Tag legt, wer dabei die Übersicht über den Zusammenhang des Ganzen auch unter der Durchführung der zur Lösung erforderlichen Einzeloperationen nicht verliert, vielmehr jede dieser Operationen — unbeschadet ihrer exakten Ausführung — dem Ganzen an

*) Zu einer solchen Arbeit, wie sie z. B. Erler in seinen „Vierteljahrsarbeiten" vorgezeichnet hat, dürfte aber die beim Mat.-Examen bewilligte Zeit nicht ausreichen.
D. Red. d. Z.

wichtiger Stelle einzufügen versteht, der legt nach des Verfassers Überzeugung von seiner geistigen Reife ein weit gültigeres Zeugnis ab, als es bei der Natur der gegenwärtig in der schriftlichen mathematischen Reifeprüfung verlangten Aufgaben möglich ist. Diese sind entweder so elementar, dafs ihre Lösung überhaupt für den Prüfungszweck belanglos ist, oder können, wenn sie künstlicher sind, im allgemeinen von der Mehrzahl der Abiturienten nur gelöst werden, wenn sie sich ziemlich eng an den Schulunterricht anschliefsen.

Dagegen ist es möglich, dafs die Ausarbeitungen der oben empfohlenen Art wirklich freie selbständige Leistungen des Schülers sind; es wird dies um so eher der Fall sein, wenn die zur Anwendung zu bringenden mathematischen Hilfsmittel möglichste Einfachheit besitzen, so dafs eine sichere Handhabung derselben von allen Schülern mit Recht verlangt werden kann. Dabei würde es nach des Verfassers Ansicht nichts schaden, wenn die angewendeten Konstruktionen und die durchgeführten Rechnungen verhältnismäfsig ungeschickt sind, auch nichts, wenn die geringere Eleganz der Rechnung eventuell auch eine geringere Genauigkeit der Resultate nach sich zieht — sobald nur sich deutlich zeigt, dafs der Schüler die ihm zu Gebote stehenden mathematischen Mittel nach klar bewufstem Plane verwendet hat.

Dem so festgestellten Ziele des mathematischen Unterrichts mufs nun auch die der obersten Stufe vorhergehende Unterweisung nach Stoff und Methode sich anpassen; es dürfte deshalb wohl angezeigt sein, manche ihrer Natur nach überhaupt auf Kunstgriffen beruhenden und darum für die allgemeine Bildung verhältnismäfsig bedeutungslose Partieen gänzlich aus dem Lektionsplan zu beseitigen. Aber auch in den nach wie vor festzuhaltenden Zweigen der Schulmathematik würde verständnisvoll zu scheiden sein zwischen dem Nötigen und dem nur Wünschenswerten. Nur das erstere wäre als ein durchaus unerläfslicher Besitz allen Schülern fest einzuprägen, von denen daher nur solche Aufgaben gefordert werden dürfen, deren Lösung mit einfachen Mitteln bewirkt werden kann. Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, dafs für diese Aufgaben auch geschicktere, sich feinerer Methoden bedienende Lösungen möglich und zulässig sind; es ist dies im Interesse der speziell mathematisch beanlagten Schüler sogar wünschenswert.

Die nicht direkt für den Zweck des Unterrichts notwendigen Teile des mathematischen Unterrichtsstoffes würden dann je nach den Umständen in gröfserem oder geringerem Umfange, aber wesentlich nur als Übungsmaterial zur Anwendung und Befestigung der eigentlichen Hauptlehren zu betreiben sein. Wenn ein militärisches Bild erlaubt ist, so könnte der mathematische Unterricht auf den tieferen Klassenstufen, wo die fachliche Technik naturgemäfs eine gröfsere Rolle spielt, der Ausbildung auf dem Exerzierplatz, die zusammenfassende Anwendung des erworbenen Wissens auf der obersten Stufe dem Manöver im Terrain, die Bethätigung des gesamten Wissensstandes im Abiturienten-Examen und eventuell im späteren Leben dem Ernstfall des Krieges verglichen werden. Wie nun auf dem Exerzierplatz eine ganze Zahl von Übungen vorgenommen wird, die im Ernstfalle nicht zur Verwendung kommen und doch als Mittel zur Befestigung der militärischen Ausbildung ihren indirekten Wert haben, so wird auch der mathematische Unterricht der höheren Lehranstalt manches nicht absolut Nötige mit Vorteil verwenden können, wenn nur festgehalten wird, dafs dies Mittel zum Zweck, nicht Selbstzweck ist.

Übrigens verkennt der Verfasser keineswegs, dafs ein begabter, seinen Stoff wissenschaftlich und pädagogisch beherrschender Lehrer auch den speziellsten Partieen des mathematischen Unterrichtspensums die allgemein bildende Seite abgewinnen kann, und dafs manche Fachlehrer in dieser Hinsicht selbst bei nur mäfsig beanlagten Schülern bemerkenswerte Erfolge erzielen. Er möchte darum auch das freie Ermessen des Lehrers in der

Beurteilung des Mafses, in welchem die mehr entbehrlichen Teile des Schulpensums heranzuziehen sind, möglichst wenig beschränkt wissen, und zwar auch auf dem Lateingymnasium, wo unter der Herrschaft der gegenwärtigen Schulverhältnisse sich immer eine gewisse Anzahl speziell mathematisch beanlagter Schüler finden werden, die auf eine angemessene Berücksichtigung ihrer Befähigung immerhin einigen Anspruch machen können. Dafs im übrigen die Grenze zwischen dem Notwendigen und Wünschenswerten, ebenso wie der Umfang der Verwendung des letzteren, auf dem Realgymnasium anders zu bemessen sein wird, als auf dem Gymnasium, versteht sich von selbst.

Mag indessen das Ziel des mathematischen Unterrichts höher oder niedriger gesteckt sein, die Hauptsache ist, dafs derselbe der Gefahr entzogen wird, in eine die technischen Operationen in den Vordergrund stellende Fachdressur auszuarten. Die Versuchung zu solcher Ausartung wünscht der Verfasser durch die Forderung zu beseitigen, dafs der Unterricht auf den obersten Stufen und in der Reifeprüfung eine sich an gröfseren Aufgaben bethätigende zusammenhängende Anwendung des erworbenen Wissens zum Ziel hat, und möchte eine derartige Gestaltung des Unterrichts um so mehr befürworten, als er in derselben auch ein charakterbildendes Moment zu finden geneigt ist.

Eine natürliche Folge der Vorschläge des Verfassers würde die sein, dafs der mathematische und physikalische Unterricht sich auf der obersten Stufe einigermafsen verschmelzen. Dies würde auf dem Realgymnasium sich äufsern im Fortfall der selbständigen sogenannten physikalischen Prüfungsarbeit, die in Wahrheit nur eine für die eigentlich physikalische Durchbildung wenig beweisende Anwendung der Mathematik vorstellt. Auf dem Gymnasium, wo das geringere Ziel des mathematischen Unterrichts erlauben würde, die eigentliche mathematische Technik vor dem Eintritt in Ober-Prima abzuschliefsen, fände sich durch die gedachte Verschmelzung von selbst ohne Überlastung der Schüler die Zeit für gewisse, schon oben bei Besprechung des deutschen Aufsatzes angedeutete Aufgaben, die dem physikalischen Unterricht neben der mathematischen Lösung seiner Spezialprobleme obliegen. Der Verfasser meint damit freiere, von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus anzustellende Erörterungen über passende Stoffe, deutsche Aufsätze über physikalische Themata, bei denen sich die Fähigkeit des Schülers zu zutreffendem und angemessenem Urteil um so besser zeigen kann, wenn der Unterricht die geschichtliche Entwickelung unseres Wissens auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften nicht unberücksichtigt läfst."

„Mathematik und Humanität“ und der wahre Zustand der Mathematik in den höheren Schulen.

Abwehr gegen den (i. d. Schlesischen Zeitung Nr. 598 vom 28. VIII. 1887 erschienenen) Angriff auf die Mathematik als Lehrgegenstand in höheren Schulen (Vergl. Heft 7 S. 552 unseren Art. „Ernst oder Scherz?“)

Die „Schlesische Zeitung“ bringt in Nr. 598 ds. J. einen Leitartikel unter der Überschrift: „Mathematik und Humanität“, der aus „Rücksichten der Menschlichkeit“ entweder Verweisung der Mathematik aus dem

*) Aus der „Breslauer Zeitung“ vom 4. Sept. 1887. Vom unterzeichneten Herrn Verfasser uns zum Abdruck gütigst eingesandt. Derselbe bemerkt in seinem beigegebenen Briefe: Der (von uns abgedruckte) Artikel könnte die Herren Kollegen in den Glauben versetzen, dafs in Schlesien die Mathematik sehr im Argen liege oder — wenn nicht — dafs keiner der dazu Berufenen den Mut habe, sein Fach vor der Öffentlichkeit zu vertreten, deshalb sei die Abwehr nötig. Wir schliefsen uns dieser Ansicht an und geben hiermit diese Abwehr unverkürzt. D. Red.

obligatorischen Lehrplan unserer Gymnasien oder Beschränkung derselben auf die oberen Klassen und Einschränkung des Lehrstoffes fordert. Begründet wird diese Forderung durch die vermeintliche Beobachtung des Herrn Verfassers, dafs „auf zehn Abiturienten kaum einer kommt, der sich auch nur mit den allerersten Anfangsgründen dieser Wissenschaft vertraut gemacht hätte", so „dafs für die grofse Mehrzahl unserer die Gymnasien besuchenden Jugend die 1500 auf die Mathematik verwandten Stunden nur Stunden absolut nutzloser Qual sind". „In den alten Sprachen dagegen erreicht schliefslich auch der mit weniger Befähigung für mechaniches Auswendiglernen ausgestattete, im Übrigen aber wohlbegabte Schüler sein Ziel." Schaden werde eine Beschränkung des mathematischen Unterrichts nichts, da er ja doch „nur die Schulung des Geistes zum logischen Denken bezweckt", also, so ist wohl die Meinung, seine Funktionen auch durch die anderen Gymnasialfächer übernommen werden können.

Diese Anschauungen sind geeignet, diejenigen Zeitungsleser, welche mit den wirklichen Mitteln und Zielen unserer höheren Schulen weniger vertraut sind, irre zu führen. Besonders werden den Eltern, welche ihre Söhne auf dem Gymnasium „Jahre nutzloser Qual" verbringen sehen, schwere Besorgnisse bereitet; es wird ihnen eine neue, von Vielen gewifs gern ergriffene Handhabe zu dem Glauben geboten, dafs die vielfachen Mifserfolge der Kinder nicht in diesen selbst, nicht in der Wahl einer ungeeigneten Schule, nicht in der vorzeitigen Teilnahme an geselligen Genüssen und Ansprüchen, sondern in den grausamen Einrichtungen der Schule und in der falschen Methode der Lehrer ihre Ursache haben.

Es sei mir gestattet, im Folgenden mit einigen Worten jene Urteile über die Stellung und Leistung der Mathematik auf unseren höheren Schulen richtig zu stellen.

Ein Zweck des mathematischen Unterrichts ist allerdings der, zur logischen Schulung des Geistes an seiner Stelle beizutragen. Hierzu ist die Mathematik in eigener Weise befähigt, weil man allein in ihr imstande ist, bestimmte Beziehungen, die man ins Auge fafst, von anderen vollständig abzugrenzen, so dafs die Konsequenzen einer bekannt gewordenen Thatsache rein zu verfolgen sind und ein Fehlschufs durch seine kontrolierbaren Wirkungen sich sicher verrät. In dieser festen Verbindung baut sich aus den ersten Sätzen allmälig das ganze System auf, das erste und für die Schule einzig zugängliche Beispiel eines wissenschaftlichen Systems überhaupt. Mit der Durchsichtigkeit und Abgrenzbarkeit hängt es zusammen, dafs in der Mathematik allein auch der weniger Geübte, ja der Anfänger in dem, was er allmälig selbst zu produzieren lernt, etwas absolut Richtiges und Vollkommenes zu sehen das Recht hat, nicht wie in allen anderen Fächern nur relativ und für eine gewisse Betrachtungsweise Gutes. Der Schüler, der eine mathematische Aufgabe nach den Regeln der Kunst gelöst hat, hat sie absolut richtig behandelt; er braucht eigentlich nicht das Urteil des Lehrers. Er empfindet hier zum ersten Male die Freude des eigenen Schaffens, den Genufs, aber auch die strenge Selbstzucht, die in der wissenschaftlichen Arbeit liegt; hier entspringt die Quelle einer Freude an der Mathematik, das Gegenteil von der Qual und Sklavenarbeit, die der Herr Verfasser des in Rede stehenden Leitartikels überall in der Schule und vor allem in der Mathematik sieht.

Aber die logischen und systematischen Vorzüge der Mathematik sind durchaus nicht, wie der Herr Verfasser meint, ihre einzigen. Die Schulung der Sinnesthätigkeit, durch Zeichnen und Naturbeobachtung begonnen, wird durch die Geometrie weitergeführt. Die geometrische Betrachtungsweise löst die Raumvorstellung vom Stoff los, lehrt den Geist, sich in den Gesetzen der Raumanschauung zurechtzufinden und durch sie die Anschauung zu regulieren. Sie giebt der Phantasie das bildsamste und doch kontrolierbarste Material; sie stählt die raumbezwingende Vorstellungskraft, die dem bildenden Künstler und dem Techniker unentbehrlich ist.

Die Mathematik ist endlich eines der Werkzeuge, mit denen wir der Natur ihre Geheimnisse abzwingen; in Maſs und Zahl werden die Naturgesetze ausgedrückt; wer nicht durch Mathematik geschult ist, der kann die Naturbeherrschung, welche das Zeichen des modernen Zeitalters ist, nur als ein fremdes Wunder bestaunen. Durch die Forderung, das Verständnis der exakten Naturauffassung anzubahnen, ist der Umfang der Schulmathematik festgestellt, der nicht willkürlich eingeengt werden darf.

Die Schulmathematik nimmt dieselben Geistesfunktionen in Anspruch wie die anderen Wissenschaften, nur dem Grade nach anders. Wer begabt genug ist, den Anforderungen in den übrigen Lehrgegenständen einer höheren Schule zu genügen, dessen Fähigkeiten reichen auch für den Betrieb der Schulmathematik aus. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, daſs Besonderheiten in Neigung und Begabung den Einzelnen die Freuden und Leiden der verschiedenen Fächer recht ungleich zuteilen. Das gelegentliche Versagen in Mathematik führt der Herr Verfasser mit Recht auf Mängel in den Grundlagen zurück. Aber das natürliche Heilmittel: auf die ersten Anfänge recht viel Sorgfalt zu verwenden, zuerst der Anschaulichkeit und der Erziehung der Vorstellungskraft recht breiten Raum zu gewähren, die abstrakte, rein logische Betrachtungsweise möglichst lange bei Seite zu halten, sieht er nicht. Die Unterrichtsverwaltung, der er so wenig Weisheit zutraut, dringt beständig hierauf und hat seit 1882 einen propädeutischen Anschauungsunterricht für Quinta festgesetzt.

Wodurch belegt nun der Herr Verfasser sein ungünstiges Urteil über die heutigen Leistungen des mathematischen Unterrichts? Er hat an einigen jungen Leuten, welche das Abiturienten-Examen bestanden hatten, die Erfahrung gemacht, daſs ihre Kenntnisse in Mathematik mangelhaft waren; er hat von ihnen die Auskunft erhalten, daſs Unwissenheit in Mathematik der allgemeine Zustand sei, daſs den Lehrern und der Aufsichtsbehörde durch einen systematisch gepflegten Betrug nicht vorhandene Leistungen vorgespiegelt werden.

Zunächst ist leicht einzusehen, daſs eine Prüfung auf bestimmte Abiturientenkenntnisse, die einige Jahre nach dem Examen vorgenommen wird, groſse Lücken ergeben muſs; ja, daſs auch das ursprünglich lückenlose, nicht auswendiggelernte, sondern durch klares Verständnis zusammengehaltene Wissen sich verflüchtigen muſs, wenn es durch die herrschenden Gedankenkreise lange keine Auffrischung erfährt. Das ist die Natur des menschlichen Gedächtnisses; und da das Gedächtnis nun einmal nur eine gewisse Weite hat, ist es gut, daſs es so ist, daſs alle nicht mehr aktiven Gedankenverbindungen und Vorstellungsgruppen den neuen und wirksamen den Platz räumen. Hat der Gewährsmann des Herrn Verfassers nach längerer Zeit seine mathematischen Formeln und Sätze vergessen, so bin ich geneigt, anzunehmen, daſs das logische Denken, die klare, phrasenlose Ausdrucksweise, der er sich erfreut, zum Teil eine Frucht seiner mathematischen Schulung ist, deren Resultate inhaltlich längst entschwunden sind.

Sehe ich in einzelnen Fällen echte, vom Gymnasium mitgebrachte Unwissenheit, so werde ich allgemeinen Anschuldigungen nicht leicht trauen, hinter denen die persönliche Schwäche sich gern versteckt. Wenn ein junger Mann, der das Abiturienten-Examen gemacht hat, mir versichert, daſs er nie Logarithmen aufschlagen gekonnt hat, so werde ich mich zuerst erkundigen, wie er das Kunststück fertig gebracht hat, eine vielgepflegte Technik nicht zu erwerben, zu welcher nicht mehr Begabung und weit weniger Übung gehört, als zum Rechnen in den 4 Spezies. Zweitens würde ich fragen, auf welche Weise er seine Unwissenheit 3 Jahre lang seinem Lehrer hat verbergen können. Sollte er mir dann antworten: „In unserer Klasse schlug immer nur Einer die Logarithmen auf, der sie den Andern diktierte“, dann — würde ich mir einen anderen jungen Mann suchen, um meine sokratischen Unterhaltungen fortzusetzen. Denn der Zustand, den jener als vorhanden angiebt, liegt gänzlich auſser

aller Vorstellungsmöglichkeit. Ebenso gut ist es möglich, dafs in einer Gymnasialprima nur Einer dividieren kann, die Andern es abschreiben. Auch in der Klasse, an der Tafel, von dem einzelnen Schüler werden Leistungen verlangt, z. B. Logarithmenaufschlagen — sollte es möglich sein, dafs Logarithmen von einem kundigen Medium auf spiritistischem Wege einem Unkundigen vorgeschoben werden?

Es ist handgreiflich, dafs ein solcher Zustand der Unwissenheit und des permanenten Betrugs einem einigermafsen gewissenhaften Lehrer und einer einigermafsen aufmerksamen Aufsichtsbehörde auch nicht an einer Schule verborgen bleiben könnte; trotzdem hält der Herr Verfasser diesen Zustand nicht nur an einer Schule für wirklich bestehend, sondern er verallgemeinert das Urteil für alle höheren Schulen mit vereinzelten Ausnahmen. Auf solche Begründungen hin über Einrichtungen, die nicht von gestern auf heute entstanden, sondern das Resultat einer langsamen, wohlgeleiteten Entwickelung sind, und über die gewissenhafte Arbeit vieler Männer, die durch langjährige Vorbereitung für ihren Beruf geschult sind, den Stab zu brechen, ist mindestens voreilig und unbillig. Daran wird durch das halbe Kompliment, das der Herr Verfasser den Lehrern der Mathematik macht, nichts geändert. Wären die Leistungen so schlecht, wie er sie schildert, lebten die Lehrer in einem solchen Taumel der Selbsttäuschung, der es ihnen unmöglich macht, das grobgesponnene Netz des sie umgebenden Betruges zu zerreifsen, so wäre die logische Konsequenz nicht: „Ehre den Lehrern der Mathematik“, sondern: Fort mit ihnen, die die Bedingungen und die Wirkung ihres Schaffens so wenig erkennen und ihre Pflicht so schlecht thun.

Die unbillige Neigung, zwischen Mathematik und Humanität einen Gegensatz aufzustellen, verführt den Herrn Verfasser selbst zur Verdächtigung solcher Einrichtungen, die unzweifelhaft humanen Erwägungen ihren Ursprung verdanken. Nach den Bestimmungen des Abiturienten-Reglements können ungenügende Leistungen in einem Fach durch mindestens gute in einem anderen ausgeglichen werden. Hierdurch wird nach dem Urteil des Herrn Verfassers die Unwissenheit in der Mathematik geradezu sanktioniert; dafür hat er wieder einen Gewährsmann. Recht und billig aber wäre es, sich auch nach solchen umzusehen, denen die Mathematik über Mängel in anderen Fächern hinweggeholfen hat. Es wäre nicht schwer gewesen, dergleichen Zeugnisse zu erbringen; berichtet doch das Feuilleton der Nr. 582 der „Schlesischen Zeitung“ selbst, dafs von den vielen Schülern Ludwig Kamblys kaum einer eine Deckung durch ein anderes Fach nötig hatte, viele aber mehr leisteten, als durch die Bestimmungen gefordert wird. Der Herr Verfasser hätte leicht erfahren können, dafs auch in anderen Schulen die Leistungen in der Mathematik zu den sichersten gehören; nicht weil die Lehrer der Mathematik besser wären als ihre Kollegen, sondern weil sie den Vorteil des klar abgeschlossenen Lehrstoffs haben.

Was ich erweisen wollte, ist: Die Mathematik hat einen ganz eigenen, durch kein anderes Fach zu ersetzenden Bildungswerth;*) die Ausnutzung dieses Bildungsgehaltes ist jedem zugänglich, der überhaupt Befähigung genug besitzt, den Kursus einer höheren Schule durchzumachen; durch die Ausführungen der „Schlesischen Zeitung“ ist in keiner Weise bewiesen, dafs bei dem heutigen Zustand unserer Schulen der mathematische Unterricht seine Aufgabe im allgemeinen nicht erfüllt.

Breslau. Dr. Heinrich Vogt.

NB. Zwei weitere Meinungsäufserungen über dieses Thema mufsten wegen Raummangel leider für nächstes Heft zurückgelegt werden. D. Red.

---

*) Wir haben diesen höchst wichtigen Satz durch den Druck hervorheben lassen. D. Red.

Über Schul-Programme.

Vortrag in der allgemeinen württ. Reallehrer-Versammlung in Stuttgart 15. Juni 1886.*)

Von Realschuldirektor O. BÖKLEN in Reutlingen.

Die Zahl der jährlich von den höheren Lehranstalten Deutschlands und Österreichs veröffentlichten Programm-Abhandlungen beträgt ungefähr 600. Um sich über dieselben zu orientieren, dienen zunächst die Verzeichnisse in Mushackes Schulkalender, der bis zum Jahr 1852 zurückgeht und demgemäfs wohl die vollständigste Übersicht darbietet. Separat-Abdrücke davon (seit 1879 aus dem statistischen Jahrbuch der höheren Schulen) werden von der Teubnerschen Buchhandlung ausgegeben, welche auch jährlich an die beim Programmentausch beteiligten Schulen Verzeichnisse der Programme nebst Schulnachrichten von den höheren Schulen Deutschlands (excl. Bayern) versendet. Da es nicht wohl möglich ist, eine Übersicht über sämtliche Abhandlungen zu geben, so werden im Folgenden nur die mathem.-naturwissenschaftlichen berücksichtigt, welche zum Teil schon seit 1876 in dieser Zeitschrift besprochen wurden. Um die Übersicht möglichst zu erleichtern, habe ich ein nach den einzelnen Fächern geordnetes Verzeichnis angefertigt, wovon der erste Teil, die Jahre 1883—86 umfassend, in Heft III. der „math.-naturwiss. Mitteilungen (Tübingen, Fues)“ erscheint, welchem sich die Fortsetzung von den früheren Jahrgängen in Heft IV anschliefsen wird; da in den Verzeichnissen manche Programme fehlen, namentlich solche, welche nicht im Anschlufs an den Programmentausch (seit 1875) veröffentlicht wurden, so ist jede Mitteilung in dieser Richtung sehr erwünscht, um die notwendigen Ergänzungen nachtragen zu können.

Hinsichtlich der Frage: Lassen sich aus den Programmen einzelne für diese Gattung der Litteratur charakteristische Gruppen ausscheiden, welche in den Fachzeitschriften nicht oder weniger vollständig vertreten sind, führten meine Forschungen über die Jahrgänge 1870/86 bis jetzt zu folgenden Resultaten:

1. Arithmetik, Algebra, Analysis. Hier gehen die Themata der Abhandlungen nach zu verschiedenen Richtungen auseinander, auch beziehen sie sich hie und da auf Gegenstände, deren eigentliche Vertretung in den Fachblättern liegt, so dafs die Ausscheidung von charakteristischen Gruppen, vorläufig wenigstens, nicht wohl möglich ist. Dagegen bilden in der

2. Geometrie die Abhandlungen über Transversalen, Kreise, merkwürdige Punkte des Dreiecks, das Malfattische, das Taktions-Problem, die Trisektion des Winkels, ferner über eine Reihe von ebenen Kurven, Cissoide, Kardioide, Konchoide, logarithmische Spirale, Kettenlinie, Cycloiden, kaustische Linien, Lemniskaten, Ovalen einen Komplex, welcher für solche, die in diesem Gebiete arbeiten, wohl die reichste Quelle für Nachforschungen über Vorarbeiten, Litteratur-Nachweisungen, die in mehreren Programmen sehr vollständig enthalten sind, darbietet.

3. Mechanik (wie bei 1).

4. Physik und Chemie. Eine Reihe von Abhandlungen lokalen Charakters, Beschreibung der meteorologischen, klimatischen, magnetischen Verhältnisse, chemische Untersuchungen des Trinkwassers, Angabe von Quellentemperaturen der betreffenden Städte und Gegenden giebt diesem

---

*) Abdruck mit Erlaubnis des Verfassers aus dem Korresp.-Bl. f. d. Gel.- u. Realsch. 1886, 11. u. 12. Heft mit einigen redaktionellen Änderungen; als Ergänzung zu unserer Bemerkung über die Programmschau d. Z. in Heft 3 des laufenden Jahrgangs S. 217 und zu der Bemerkung Heft 5, S. 397. D. Red.

Teil der Programm-Litteratur ein charakteristisches Gepräge. Noch mehr tritt der lokale Charakter in der

5. Naturgeschichte hervor, wo die Beschreibungen der geologischen Verhältnisse, der Flora, Fauna der Orte, von welchen die Programme ausgehen, und ihrer Umgebung die überwiegende Mehrzahl bilden. In der

6. Astronomie und math. Geographie ist die Zahl der Abhandlungen noch zu klein, als daſs sich hier ein bestimmtes Urteil bilden lieſse. In der

7. Naturphilosophie mögen folgende namhaft gemacht werden: Grenzen und Grund-Anschauungen in den Naturwissenschaften, Grundlagen der Mathematik, zur Psychologie der Raum-Vorstellungen, Zweck und Methode der Psychophysik, Newtons, Goethes naturphilosophische Ansichten. Ganz charakteristisch für das Programm-Wesen sind die

8. Historischen Monographien: Geschichte der Magnetnadel, der Hageltheorien, der Theorie des Regenbogens, der Chladnischen Klangfiguren, der kaustischen Linien und Flächen, der Undulations-Theorie; zur Geschichte der Physik im 17. Jahrhundert. Biographie von Archimedes, Jakob Bernoulli. Das mathematisch Unendlich Kleine (von Euklid bis auf die neueren Forschungen von Dubois Reymond), die Erforschung der Schwere durch Galilei, Huygens, Newton, historisch und didaktisch dargestellt. In letztgenanntem Programm, welches auch im Buchhandel erschien (Leipzig, Teubner), ist der Versuch gemacht, die ursprünglichen Methoden der Erfinder zu reproduzieren, so daſs man an der Hand desselben der Frage näher treten kann, inwiefern dieselben in den Unterricht aufgenommen werden können. Die Instruktion über den physik. Unterricht an niederen Realschulen (Erlaſs der k. württ. Kultministerial-Abteilung v. 7. Jan. 1869) spricht sich hierüber so aus: „Berücksichtigung verdient im Unterricht auch die Geschichte der Personen und Ereignisse, welche in epochemachender Weise zur Förderung der physik. Kenntnis beigetragen haben, und die einzelnen Abschnitte der Physik werden sich in die Form einer aus guten Quellen geschöpften Erzählung einkleiden lassen.“ Hier würde es sich also zunächst um eine Zusammenstellung von historischen Notizen handeln, in Form einer kurzen Übersicht über die Biographie und die Hauptwerke der Erfinder, während die andere Seite der Frage, nämlich die Aufnahme der ursprünglichen Methoden in den Unterricht, vorausgesetzt daſs sie durch tieferes Eingehen in die Sache, durch unmittelbare Vorführung und Veranschaulichung der Schwierigkeiten, welche der richtigen Erkenntnis sich entgegen stellten, gegenüber den später aufgekommenen Methoden den Vorzug verdienen, durch eine Darstellung wie in dem genannten Programm weiter verfolgt werden könnte. Von den nicht sehr zahlreichen Abhandlungen über die

9. Unterrichts-Methode sind zu nennen: der mündliche Vortrag auf höheren Schulen, der Unterricht in der Trigonometrie, der geometrische Unterricht in Sexta, der zoologische in Quinta. Manche Autoren haben es sich zur Aufgabe gemacht, solche Lehren, bei denen es noch fraglich ist, ob und in wie weit sie in den Unterricht der höheren Lehranstalten aufgenommen werden sollen, z. B. die Determinanten, die Graſsmannsche Ausdehnungslehre, die Raumkurven III. Ordnung elementar zu behandeln.

10. Aufgaben-Sammlungen. Die (105) Aufgaben aus der darstellenden Geometrie von Kommerell (Tübingen 1869), welche in Heft I der math.-naturwissensch. Mitteilungen abgedruckt sind, erscheinen nun in besonderer Ausgabe (Tübingen, Fues), systematisch geordnet, mit Andeutungen der Auflösungen, wie sie für die unmittelbare Verwendung beim Unterricht sich eignen. Die (300) Text-Gleichungen geometrischen Inhalts von Th. Harmuth (K. Wilhelms Gymn., Berlin 1886) werden in besonderer, vermehrter Ausgabe im Buchhandel erscheinen; es sind Aufgaben aus der Geometrie und Stereometrie, wie z. B. Nr. 43): In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 75, die dazu gehörige Höhe 36. Gesucht die

Katheten (60 und 45); Nr. 226) Vergrößert man die Kanten eines Würfels je um 3, so wächst sein Inhalt um 819. Wie groß sind dieselben? (8) Aufgaben aus der niederen Analysis v. Fuhrmann. Königsberg 1886.

Vorstehender Übersicht mögen nun noch zum Schluß einige Bemerkungen angereiht werden. Im Jahr 1874 hat der damalige preußische Unterrichtsminister Dr. Falk mit der Teubnerschen Buchhandlung Unterhandlungen gepflegt, in Folge welcher der Programmentausch unter den höheren Lehranstalten eingerichtet wurde, dessen großer Nutzen für die Verbreitung dieser Schriften mehr und mehr zu Tage tritt. Die Besprechungen der math.-naturw. Abhandlungen von 1875 an in dieser Zeitschrift haben viel dazu beigetragen, um dieselben in weiteren Kreisen bekannt zu machen. Bei der unverkennbaren Bedeutung, welche dieses Gebiet der Litteratur, zunächst für die Lehrer und Lehramtskandidaten hat, und die von Jahr zu Jahr im Zunehmen begriffen ist, (ein Beweis dafür ist unter anderem die Nachfrage nach älteren Programmen von Seiten der Universitäts-Bibliotheken z. B. in Göttingen, Breslau) tritt vor allem der Wunsch nach möglichst leichter Orientierung und Gewinnung von Übersicht über die stets wachsende Masse des Stoffs entgegen, weshalb ich es unternahm, in dem Obigen wenigstens einen Versuch zu machen, um zu zeigen, wie man demselben etwa gerecht werden kann. Systematisch geordnete, nach einzelnen Fächern zusammengestellte Verzeichnisse sind ein unentbehrliches Hülfsmittel für jeden, der dem Studium dieses Zweigs der Litteratur näher treten will, ohne gleich von Anfang an durch ihre überwältigende Masse zurückgeschreckt zu werden. Nach einem solchen Verzeichnis, welches aber blos die Jahre 1870/86 umfaßt, wurden obige Bemerkungen gemacht; denselben ist übrigens hinzuzufügen, daß zwar rein wissenschaftliche Arbeiten, welche nur neue Resultate enthalten, in der Programm-Litteratur schwach vertreten sind, weil solche in Fachblättern zweckmäßiger veröffentlicht werden, während sich andererseits aus allen Fächern eine große Zahl von Abhandlungen gruppieren läßt, die neben einer mehr oder weniger vollständigen, chronologisch geordneten Zusammenstellung und kurzen Kritik der Vorarbeiten (cfr. das Malfattische Problem v. Sachs in Durlach 1884/85) noch Resultate enthalten, die entweder dem Inhalt oder der Form und Behandlungsweise nach neu sind; auch sind manche Arbeiten für ein übersichtliches Studium dadurch zugänglicher gemacht worden, daß denselben am Schluß ein kurzes Resumé der gewonnenen Resultate beigefügt ist.

Da bei obiger Zusammenstellung vorzugsweise der Standpunkt der Schule ins Auge gefaßt wurde, so sind einzelne Programme z. B. bei 8) Historische Monographien nicht erwähnt worden, weil sie demselben zu fern stehen. Es scheint übrigens hier noch ein dankbares Gebiet brach zu liegen, sowohl hinsichtlich der Geschichte spezieller Theorien in der Mathematik (cfr. die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum v. Zeuthen. Kopenhagen 1886) und in den Naturwissenschaften, als auch der Bearbeitung von Biographien für Schulzwecke. Hierdurch würde die Beachtung des Historischen beim Unterricht wesentlich gefördert. Außer obigem Citat aus der württ. Instruktion sind auch die Instruktionen für den Unterricht an den Realschulen in Österreich S. 220 u. s. f., Wien 1885, anzuführen.) Für geometrische Abhandlungen könnte sich in der Bearbeitung einzelner Sätze und Aufgaben aus Steiners Werken,*) der Kinematik nach Chasles, Mannheim, der abzählenden Geometrie nach Schubert noch ein ergiebiges Feld eröffnen, namentlich wenn auf eine elementare Behandlung der Grundlagen mit entsprechender Exemplifikation Rücksicht genommen wird.

---

*) Z. B. Onstein, Behandlung und Erweiterung der von Steiner, ges. Werke, Bd. II p. 431 unter Nr. 1, 2 mitgeteilten Sätze. Aachen, Realg. 1887 (nach dem neuesten Teubnerschen Verzeichnis).

Diesen Andeutungen liegt die Ansicht zu Grunde, welche in der vorliegenden Zusammenstellung ihre Bestätigung finden wird, dafs die Bedeutung der Programm-Litteratur um so mehr wächst, als sich in derselben bestimmte, in sich abgeschlossene Gruppen bilden, von welchen jede ein gewisses Ziel und womöglich nach einem gemeinsamen Plan verfolgt. Hierzu sind Übersichten über sämtliche Abhandlungen je aus einem Fach, Geometrie, Algebra, Physik etc., von allen früheren Jahrgängen (s. o.) zu empfehlen, indem sie dazu dienen, dafs sich die Wahl des Stoffs mehr und mehr nach denjenigen Richtungen hin konzentriert, welche dem Programmen-Wesen eigentümlich sind, und als spezielle Domänen desselben angesehen werden können, so dafs die oben angeführten charakteristischen Gruppen sich allmählig erweitern und ergänzen, und ihnen sich noch weitere aus andern Fächern anschliefsen würden. Die Frage, ob der Nutzen, welchen die Programm-Litteratur bis jetzt gestiftet hat, auch seit dem von der Teubnerschen Buchhandlung in höchst dankenswerter Weise eingeleiteten Programmentausch, im Verhältnis steht zu dem damit verbundenen Aufwand von geistiger Arbeit sowie auch in finanzieller Beziehung, führt zu dem Wunsche nach weiterer Verbreitung, und es wäre insbesondere von Wert, wenn solche Abhandlungen, von welchen die Autoren glauben, dafs sie eine über den Programmentausch hinausgehende Verwendung finden, speziell für Unterrichtszwecke wie z. B. die unter 10. angeführten Aufgaben-Sammlungen, in gröfserer Anzahl gedruckt und auf Buchhändlerischem Wege weiteren Kreisen zugänglich gemacht würden.

Nachbemerkung der Redaktion.

Wir schliefsen uns diesen Ausführungen und Wünschen des geehrten Herrn Verfassers um so lieber an, weil wir es seit Jahren als einen empfindlichen Mangel erkannt haben, dafs die Verfasser von Zeitschriftartikeln, Programmen und auch — Büchern sich viel zu wenig um die Vorarbeiten (zu ihrem Thema) bekümmern, teils aus Unkenntnis der Geschichte und der Litteratur ihrer Wissenschaft, teils aus Bequemlichkeit, teils endlich aus Mangel an Hilfsmitteln. Solche Hilfsmittel, wenigstens teilweise, zu bieten, sind Programmverzeichnisse sehr geeignet. Wir machen daher auf das Verdienstliche der Arbeit des Verfassers hiermit aufmerksam, indem wir gleichzeitig eine (schon früher existierende) ähnliche allgemeinere, d. h. alle Fächer umfassende Sammlung von Hahn in Erinnerung bringen, deren genauen Titel, da sie uns nicht zur Hand ist, wir nicht angeben können und von der wir auch nicht wissen, ob sie fortgesetzt worden ist.*)

Zum Andenken an Ludwig Kambly.**)

(† 17. August 1887.)

Wer es etwa unternehmen wollte, für den unlängst aus unserer Mitte geschiedenen Prorektor a. D. Professor Dr. Kambly eine umfängliche Lebensbeschreibung abzufassen, der würde bald zu der Überzeugung gelangen, dafs dies ein schwieriges, wenn nicht unausführbares Werk wäre. Denn ganz abgesehen davon, dafs verhältnifsmäfsig nur geringes urkundliches Material zur Verfügung steht, abgesehen auch davon, dafs die gleichaltrigen Freunde und näheren Bekannten des Verewigten, welche namentlich über die frühesten und früheren Zeiten seines Lebens nähere mündliche Auskunft geben könnten, fast alle bereits vor ihm das Zeitliche gesegnet

*) Wir bitten, falls Lesern d. Z. dieselbe bekannt sein sollte, uns hierüber zu informieren. D. R.

**) Aus d. Schlesischen Zeitung Nr. 592 (26. Aug. 1887). D. Red.

haben — sein Leben war kein ereignisreiches und wechselvolles, hat keine merkwürdigen Schicksale und Vorkommnisse aufzuweisen, sondern verlief ruhig und ebenmäfsig, namentlich in den letzten Jahrzehnten still und einförmig. Wenn nichtsdestoweniger seine Person zu den gekanntesten von Breslau, vielleicht auch der ganzen Provinz, gehörte, wenn sein Name weit über diesen Kreis hinaus, und zwar nicht nur im ganzen deutschen Vaterlande, sondern sogar weit über dessen Grenzen bis jenseit des Oceans rühmlich bekannt war und ist, so liegt schon darin ein Beweis von dem hohen Werte dieses Mannes, welchem wir einen nur geringen Zoll unserer Dankbarkeit abtragen, indem wir sein Leben und Wirken im folgenden zu kurzer Darstellung bringen. Allen denen, welche ihn von Person gekannt haben, hoffen wir dadurch eine liebe Erinnerung aufzufrischen und auszugestalten; Fernerstehende aber finden darin vielleicht eine nicht unwillkommene Gelegenheit, sich wenigstens ungefähr ein Bild von dem Manne zu machen, dessen Name auch bei ihnen einen so guten Klang hat.

Karl August Heinrich Ludwig Kambly wurde den 26. August 1811 zu Liegnitz geboren, woselbst sein Vater Regierungssekretär, später Registraturrat war. Dort erhielt er seinen ersten wissenschaftlichen Unterricht in dem Institut des Oberdiakonus Lingke, aus welchem er Michaelis 1823 in die Obertertia der Ritterakademie aufgenommen wurde. Von dieser zu Michaelis 1829 mit einem Reifezeugnis erster Nummer entlassen, studierte er an der Universität Breslau zuerst anderthalb Jahre Philosophie und Philologie, dann zweiundeinhalb Jahre Mathematik. Schon im Juli 1834 unterwarf er sich der Staatsprüfung und erwarb sich in derselben die unbedingte *facultas docendi,* mit der Berechtigung, Mathematik, Physik und Deutsch in allen Klassen, Geschichte und Geographie, Griechisch, Lateinisch, Französisch und Religion in den mittleren Klassen eines Gymnasiums zu lehren. Von Michaelis 1834 an leistete er sein Probejahr ab, und zwar zunächst und zum gröfsten Teile an der Ritterakademie in Liegnitz, von wo er im Sommer 1834 in das pädagogische Seminar zu Breslau berufen wurde, als dessen Mitglied er bis zum Ende seines Probejahres mit Unterricht am Gymnasium zu Maria-Magdalena und am Friedrichs-Gymnasium beschäftigt wurde. Michaelis 1835 schickte ihn das königliche Provinzial-Schulkollegium zu interimistischer Verwaltung einer Lehrerstelle an das Gymnasium zu Brieg mit Zusicherung späterer definitiver Anstellung. Als diese im Sommer des nächsten Jahres erfolgen sollte, eröffnete sich ihm zugleich die Aussicht auf eine ordentliche Lehrerstelle am Elisabet-Gymnasium zu Breslau, für welche er sich entschied und in welche er am 1. Oktober 1836 als achter Kollege eintrat. In verhältnismäfsig schneller Aufeinanderfolge erstieg er die höheren Stufen, wurde zu Neujahr 1842 Oberlehrer, am 13. Mai 1854 königlicher Professor, am 29. Januar 1862 zur 300jährigen Jubelfeier des Elisabetans von der Universität zum Dr. phil. honoris causa promoviert, erhielt bei derselben Gelegenheit den Roten Adler-Orden vierter Klasse und wurde am 1. Januar 1873 Prorektor. Nach dem Tode des Direktors Dr. Fickert verwaltete er interimistisch das Gymnasium vom 3. Oktober 1880 bis Ostern 1881. Von Nebenämtern, welche er zeitweise bekleidete, ist namentlich seine Thatigkeit als Lehrer an der königlichen Divisionsschule vom Jahre 1837 bis zu deren Auflösung zu erwähnen. Am 30. September 1884 schied er aus dem Amte zugleich mit der Feier seines 50jährigen Dienstjubiläums, bei welcher er durch Verleihung des königlichen Kronenordens dritter Klasse mit der Zahl 50 ausgezeichnet wurde. Nach nicht ganz dreijährigem Ruhestande starb er am 17. August 1887.

Läfst schon diese einfache Zusammenstellung der hauptsächlichsten Lebensdaten die Bedeutung des Mannes erkennen, so wird dieselbe noch klarer durch die Angabe seiner litterarischen Thätigkeit. Das erste Erzeugnis derselben war ein Unterrichtsbuch, welches er in seiner oben erwähnten Nebenlehrthätigkeit abfafste und herausgab unter dem Titel:

„Leitfaden für den mathematischen Unterricht in dem obersten Cötus der Königl. eilften Divisionsschule, Breslau, Grafs, Barth und Comp., 1840.“ Diese erste Arbeit war die Grundlage seines späteren epochemachenden Werkes: „Die Elementar-Mathematik, für den Schulunterricht bearbeitet, vollständig in vier Teilen, Breslau, Verlag von Ferdinand Hirt.“ Zuerst erschien die Planimetrie 1850, dann die Arithmetik 1851, die ebene Trigonometrie 1852, die Stereometrie 1854, die sphärische Trigonometrie 1855; in den folgenden Auflagen wurden die ebene und die sphärische Trigonometrie vereinigt. Die Zahl der Auflagen beträgt bis jetzt für die Planimetrie 81, für die Trigonometrie und Stereometrie je 18. Auf vielseitiges Ansuchen fügte der Verfasser seinen mathematischen Lehrbüchern auch noch ein physikalisches hinzu unter dem Titel: „Die Physik, für den Schulunterricht bearbeitet. Breslau, Hirt, 1868,“ zuletzt in vierter Auflage erschienen. An Abhandlungen veröffentlichte er im Osterprogramm des Elisabetgymnasiums von 1859 eine Theorie der Harmonikalen, im Jubelprogramm derselben Anstalt von 1862 Beiträge zu Trigonometrie, Stereometrie und Arithmetik, und im Grunertschen Archiv, Band 40, Jahrgang 1863, einen Artikel über das sphärische Viereck im Kreise.

Durch seine mathematischen Lehrbücher ist Kambly eine Berühmtheit geworden. Nicht nur dafs die Originalausgabe derselben eine so aufserordentliche Zahl von Auflagen erfahren hat, sie sind auch in mehrere fremde Sprachen übersetzt worden und nehmen so selbst im Auslande diesseit und jenseit des Oceans unter den bevorzugten Lehrmitteln eine ehrenvolle Stelle ein. Ungezählte Tausende von Knaben und Jünglingen haben ihnen zum grofsen Teil ihre mathematische Vorbildung zu verdanken; nach Tausenden sind selbst die Lehrer zu rechnen, welche sie zum Segen der heranwachsenden Jugend ihrem Unterricht zu Grunde gelegt haben und noch legen. Solche Erfolge sprechen von selbst für ihre Gediegenheit. Es mufs den Mathematikern von Fach überlassen bleiben, ihre Vorzüge eingehend und im einzelnen zu würdigen, wie denn auch in Fachzeitschriften zahlreiche Rezensionen voll von Anerkennung erschienen sind. Nur das eine darf an dieser Stelle nicht ungesagt bleiben, und selbst ein Laie darf es sagen — zumal wenn er die günstigen Wirkungen dieser Bücher in seiner eigenen Jugendzeit an sich erfahren und im späteren Alter als vieljähriger Mitarbeiter des Verfassers an derselben Anstalt im unmittelbaren Verkehr mit der lernenden Jugend sich ein Urteil über ihre Verwertbarkeit gebildet hat — dies nämlich, dafs sie durch mafshaltende Auswahl des Stoffes, durch streng systematischen Aufbau und logische Schärfe, dabei durch Fafslichkeit selbst für die minder Begabten als Musterbilder nicht nur für mathematische Lehrbücher, sondern für Lehrbücher überhaupt gelten können und in ihrer Art bisher kaum übertroffen worden sind.*)

Es läfst sich nun wohl annehmen, dafs der Verfasser so meisterhafter Unterlagen für den Unterricht selber auch ein Meister im Unterrichten

---

*) Nur einmal, so viel uns bekannt, ist gegen diese Lehrbücher, vorzugsweise gegen die Planimetrie, Widerspruch erhoben worden und zwar von Dr. Ohrtmann-Berlin im C.-O. f. d. J. d. R.-W. 1874. S. 608 u. f. — Dies bewog Kambly zu einer Entgegnung in ds. Ztschr. Jahrg. VII (1876) S. 449 u. f. Dort sind auch drei anerkennende Gutachten (von Kummer, Fickert, Kletke) abgedruckt. Dies bewog die Redaktion, das Richteramt in dieser Angelegenheit Hrn. Dr. Bardey, welcher die Kamblyschen Lehrbücher vorher (in VI, 300 u. f.) ausführlich besprochen hatte, zu übertragen. Sein Gutachten steht in VII, 455 u. f. — Der Widerspruch O.s scheint aber Erfolg nicht gehabt zu haben; denn die Anzahl der Auflagen der Planimetrie K.s, damals 42, ist seitdem bis zur Ziffer 81, also beinahe bis aufs Doppelte, gestiegen. — Die Ursache der Beliebtheit der K.schen Lehrbücher dürfte — wie auch der Verf. ds. Nachrufs bemerkt — vorzugsweise in der aufserordentlichen Ökonomie des Inhalts liegen, welche nicht nur dem Schüler den „eisernen Besitzstand“ verbürgt, sondern auch dem Lehrer gestattet, von dem Seinen hinzuzuthun, was und wieviel er will. Kein Lehrer bindet sich gerne sklavisch an ein Lehrbuch; er will vielmehr im Weglassen und Hinzuthun volle Freiheit haben. Leider wird nicht selten von dieser Freiheit ein nur zu ausgedehnter Gebrauch gemacht, so dafs der Stoff des Lehrbuchs im Vortrage des Lehrers völlig untergeht. D. Red.

gewesen sei. Freilich ist der wissenschaftlich und litterarisch Tüchtige nicht immer zugleich auch der Mann, welcher seine Kenntnisse und Einsichten mit derselben Tüchtigkeit praktisch verwerten, durch mündlichen Vortrag und persönlichen Verkehr anderen vermitteln kann. Es ist mancher mit gründlichem Wissen reich ausgestattet und auch sehr wohl imstande, dasselbe in der Stille der Studierstube zu gelungenster schriftlicher Gestaltung zu bringen, und doch geht ihm die Fähigkeit ab, es durch unmittelbare Übertragung auf Lernende geschickt und fruchtbar zu verwerten. Das war bei Kambly nicht, vielmehr war das Gegenteil in glücklichster Verwirklichung der Fall: er war auch ein Lehrer erster Gröfse. Es soll hier nicht von seiner peinlichen, ja rührenden Gewissenhaftigkeit geredet werden — denn Gewissenhaftigkeit kann und mufs man von jedem Lehrer verlangen — nicht davon, dafs er seine Stunden auf das pünktlichste gehalten, dafs er seine zahllosen Korrekturarbeiten auf das fleifsigste ausgeführt, oft sogar und gern weit über dns vorgeschriebene Mafs hinaus, dafs er zur Nachhilfe Zurückgebliebener nicht selten die Zwischenpausen zu Hilfe genommen, dafs er zum Frommen aller zu den festgesetzten Stunden so manche aufserordentliche hinzugefügt, ja dafs er selbst während der Ferienzeiten sich keine andauernde Ruhe gegönnt und, soweit es irgend anging, auch da seinen Schülern teils zur Wiederholung, teils zur Ergänzung gern gebotenen und genommenen Unterricht erteilt hat. Das alles sind mehr Äufserlichkeiten. Wie er es machte, wie er seine Schüler zu klarem Verständnis des oft unleugbar spröden Stoffes brachte, und zwar, wie man fast sicher behaupten kann, alle ohne Ausnahme, darin lag seine hervorragende Bedeutung als Lehrer. Stets von dem ausgehend, was allen bekannt und bereits unzweifelhaftes Besitztum war, ging er Schritt für Schritt vorwärts, fügte Stück zu Stück, duldete keine Lücke, sondern ruhte nicht, bis auch die Schwächsten jeden Teil des Zusammengehörigen erfafst hatten, verwendete das sicher Begriffene und Eingeprägte als festes Fundament zu immer weiterem, neuem Aufbau. Und keineswegs reichte er immer aus dem Schatze seines Wissens den Schülern ohne weiteres das neue Material, so dafs sie nur zuzulangen und zu nehmen brauchten, sondern er liefs sie, so weit es irgend im Bereiche ihrer geistigen Leistungsfähigkeit lag, selber auf die Suche gehen, liefs sie mit glücklicher Darbietung der notwendigsten Fingerzeige selber finden. Hatte er sie so in den Besitz der grundlegenden Sätze, des gleichsam eisernen Bestandes gebracht, dann gab er ihnen immer und immer wieder durch zahlreiche Aufgaben Gelegenheit, nicht nur den gewonnenen Besitz zu befestigen, sondern auch mit einer gewissen Freiheit sich auf dem eroberten Gebiete zu tummeln und immer neue Seiten des in der Hauptsache schon Bekannten kennen zu lernen, immer neue Gesichtspunkte aufzufinden. Bei einer solchen geradezu packenden Methode, einer Methode, welche auch den für Mathematik von vornherein nur wenig Beanlagten — und ihre Zahl ist nicht gering — das Verständnis dieser Wissenschaft erschlofs und auch sie mit ihrer Klarheit, Folgerichtigkeit und Ergiebigkeit zu fesseln wufste, kann es nicht wunder nehmen, wenn er mit seinen Schülern beim Abschlufs ihrer Schullaufbahn Erfolge erzielte, wie sie wohl einzig in ihrer Art dastehen. Es ist vielleicht keiner seiner Schüler zur Universität entlassen worden, welcher nicht wenigstens ein Genügend für sein Zeugnis in der Mathematik hinweggenommen hätte, der vielen nicht zu gedenken, welche sich eines Gut oder Vorzüglich erfreuen konnten; ja es hat nicht wenige gegeben, denen bezeugt werden durfte, dafs sie über das vorgeschriebene Mafs der Schule hinaus mathematisch vorgebildet wären.

Lag Kamblys Hauptthätigkeit und Hauptverdienst auf diesem Gebiete, so war er doch keineswegs einseitig. Im Gegenteil. Ein wie vielseitiges Wissen er sich schon während seiner eigentlichen Studienzeit erworben hat, geht aus der Umfänglichkeit der ihm in seinem oben erwähnten

Prüfungszeugnis zuerkannten Lehrbefugnis hervor. Und er beruhigte sich nicht bei dem erworbenen Besitz, er arbeitete unablässig weiter, nicht nur in seinem Hauptfach, sondern auch auf den anderen Gebieten. Er las fleifsig französische Werke, teils mathematische, teils auch andere, er befestigte seine Kenntnisse in der Geschichte und Geographie, schaffte sich lehr- und genufsreiche Stunden durch Lektüre der Klassiker und zwar nicht nur der modernen, namentlich deutschen, sondern auch — eine grofse Seltenheit in unseren Zeiten — der antiken. In jüngeren Jahren hat er auch Gelegenheit gehabt, alle diese vielseitigen Kenntnisse praktisch zu verwerten, indem er auch in allen Nebenfächern seiner Lehrbefugnis Unterricht erteilte. Und er erteilte ihn mit demselben Geschick und mit derselben Gründlichkeit wie den in seinem Hauptfache. Der schlagendste äufsere Beweis seiner Vielseitigkeit ist wohl der, dafs er eine lange Reihe von Jahren bei den mündlichen Abiturientenprüfungen das Protokoll geführt hat in allen Fächern mit Ausnahme der Mathematik, in welcher er selber examinierte, und das mit einer geradezu vorbildlichen Genauigkeit und Korrektheit; erst wenige Jahre vor seinem Austritt aus dem Amt hat er diese Thätigkeit einer jüngeren Kraft überlassen.

Die Vorzüge welche Kambly als Lehrer besessen, sind der Hauptsache nach anscheinend erschöpft. Aber es fehlt doch noch eins und wohl das beste. Der Lehrer soll nicht nur das sein, was sein Name eigentlich nur besagt, ein Lehrender, er soll auch und vornehmlich Erzieher sein. Und das war Kambly im vollsten Mafse und im edelsten Sinne des Wortes. Und wenn er dies war, so verdient er um so gröfsere Anerkennung und Bewunderung, als sein Hauptlehrstoff, die Mathematik, der eigentlich erziehlichen Hebel und Mittel am wenigsten enthält. Die Lehrer der Religion, des Deutschen, der Geschichte, ja selbst der alten Sprachen mit ihrem reichen und tiefen Denkmälerschatze — welchen ergiebigen Stoff haben sie zu ihrer Verfügung, welche Fundgruben, aus denen sie nur zu nehmen brauchen, um auch auf Gemüt und Herz zu wirken, um Erziehung zu üben. Über solche Schätze hatte der mathematische Lehrer Kambly nicht zu verfügen. Aber er besafs einen Schatz, welcher ihm alles das reichlich ersetzte, einen kostbaren Schatz in seinem Innern, ein tiefes Gemüt, ein ebenso warmes wie keusches Herz. Und diesen Schatz brauchte er nicht erst zu heben, derselbe hob sich von selbst. Ohne gesuchte und überlegte Mittel wirkte Kambly unmittelbar durch die Kraft seiner Persönlichkeit, seines eigensten Wesens. Ganz abgesehen davon, dafs seine strenge Gewissenhaftigkeit von selber die Schüler zur Nacheiferung, zu Fleifs und ernster Arbeit anspornte, ein Gefühl von Ehrfurcht erfüllte sie, wenn er unter ihnen war und zu ihnen redete, ein Gefühl, welches jedem von ihnen sagte: Ein edler Mann steht vor dir, und du mufst und du willst ein ebensolcher werden. Sie wärmten sich an der Wärme seines Herzens, welches jedem, dem Schwachen wie dem Starken, in gleicher Weise, wenn nicht dem Schwachen in noch höherem Mafse, voll entgegenschlug. Feind alles Unwahren und Unlauteren, Freund nur des Wahrhaften und Reinen, drängte er ihre jugendlichen Gemüter von jenem hinweg und leitete sie zu diesem hin. Selten zürnte, noch seltener schalt er. Aber wenn er zürnte, dann war es ein heiliger Zorn, dessen reine Flamme läuternd auf den Betroffenen einwirkte; und wenn er einmal schalt, dann that er es bei allem Nachdruck in so mafsvoller Weise und in so gehaltenen und würdigen Worten, dafs tiefe und gründliche Beschämung des Gescholtenen die wohlthätige Wirkung war. So ist es denn gekommen, dafs Tausende sich glücklich schätzten und schätzen, Kamblys Schüler zu sein. Sie gedenken seiner in Liebe und Dankbarkeit. Ist es doch nicht sowohl ein schöner Schatz grundlegenden Wissens, welchen sie ihm verdanken, als vielmehr der weit schönere eines veredelten Herzens, ein guter, wenn nicht der beste Teil ihres sittlichen Wertes. Er war das verkörperte Ideal eines Lehrers, ein Lehrer von Gottes Gnaden.

Als ein solcher war er denn naturgemäfs seinen Amtsgenossen, insonderheit denen, mit welchen er zusammen an derselben Anstalt wirkte, ein leuchtendes Vorbild in didaktischer wie in sittlicher Beziehung. Und weit entfernt, sich etwa im Bewufstsein dieser Vorzüge abzusondern, fühlte er sich und war — vermöge seiner echt kollegialischen Gesinnung — ihnen eng verbunden. Voll feinen Taktes vermied er alles, was Mifsstimmung oder gar Entzweiung hätte herbeiführen können. War aber einmal ein Mifston erklungen, so trug sein Zartgefühl wesentlich dazu bei, die Harmonie wieder herzustellen. Mit einigen seiner Kollegen stand er in engerem Freundschaftsverhältnis; unter ihnen ist hauptsächlich der ihm geistesverwandte Kampmann zu nennen, welcher zwar schon lange vor ihm abgeschieden ist, aber noch in vieler Erinnerung lebt.

Dafs er in der Auswahl seiner Freunde überhaupt wählerisch war, versteht sich bei einem so gediegenen und lauteren Charakter von selbst. Stellte er an sich selbst die höchsten Anforderungen, so war es unmöglich, dafs er geringe an diejenigen stellte, welche er zu seinen Freunden machen wollte und machte. Daher war die Zahl derselben immer nur eine kleine. Aber um so glücklicher, um so fröhlicher war er in ihrem engeren Kreise; da sprudelte er förmlich in lebhafter Unterhaltung, da genofs er gern und in vollen Zügen die harmlosen Freuden der Geselligkeit. Und Treue bewahrte er in ihnen bis in den Tod, ja über den Tod hinaus. Wie so manchen von ihnen hat er in das Grab sinken sehen; aber mit rührender Anhänglichkeit setzte er den Verkehr mit ihren Hinterbliebenen fort bis an sein eigenes Lebensende. Es ist ihm nicht vergönnt gewesen, sich eine eigene Familie zu gründen. Einigen Ersatz fand er in seinem Verhältnis zu einer freilich entfernt wohnenden Anverwandten, an welcher er mit väterlicher Fürsorge hing. Den weiteren Ersatz boten ihm die Schule in deren Zöglingen er seine Kinder, und seine Freunde, in denen er seine Brüder sah.

Aus diesem allen geht hervor, dafs er trotz einer gewissen Einsamkeit, in welcher er sich namentlich in den letzten Zeiten seines Lebens befand, nichts weniger als menschenfeindlich war. Es ist vielmehr seine Menschenfreundlichkeit auch im allgemeinen hier noch besonders hervorzuheben. Zuvorkommend gegen jedermann, gütig auch gegen Niedrigere, hatte er ein mitleidiges Herz und eine stets offene Hand für Arme und Bedrückte. Die Verborgenheit möglichst wahrend, spendete er seine Wohlthaten, und Viele werden ihm in der Stille heifse Thränen der Dankbarkeit nachweinen. Er vermied es überhaupt, in die Öffentlichkeit zu treten, und wenn das einmal doch unvermeidlich war, machte es ihm stets eine gewisse Pein. Daher trat er auch politisch niemals öffentlich hervor. Selbstverständlich machte er von seinen Gesinnungen kein Hehl, am wenigsten von seiner Königstreue und seiner Freude an der Einigung unseres deutschen Vaterlandes. Ebenso war er, ohne damit auch nur im geringsten absichtlich in den Vordergrund zu treten oder gar zu prunken, ein treuer Sohn der evangelischen Kirche. Tiefe Gottesfurcht wurzelte in seinem guten, weichen Herzen; wenn er Andachten hielt, kostete es ihm Mühe, seine Rührung, oft sogar die Thränen zu bemeistern.

Dafs ein solcher Mann von allen geachtet, geehrt, geliebt wurde, wen möchte es wundern? Ob es wohl jemanden gab oder giebt, welcher andere Empfindungen gegen ihn hegte oder gar ihm gram wäre? Wir glauben — Keinen. Den vollkommensten Ausdruck fand die allgemeine Hochachtung und Liebe an seinem 50jährigen Dienstjubiläum, dessen begeisterte Feier bei uns allen noch in lebhafter Erinnerung steht. Als er an jenem Tage zugleich aus dem Amte schied, da wünschten wir alle ihm einen recht langen und glücklichen Genufs des Ruhestandes. Und wir hofften auch, dafs er ihn haben werde; seine körperliche wie geistige Frische berechtigte uns zu dieser Hoffnung. Dem sollte nicht so sein. Nicht eine längere Reihe von Jahren, sondern nur wenige, nicht ganz drei

Jahre, hat er ausgedauert. Ein körperliches Leiden, welches bei hohem Alter immer bedenklich ist, erfafste ihn und warf ihn nieder. Ein Trost noch, dafs er nicht allzu lange zu leiden, keine schweren Schmerzen zu ertragen hatte. Ein Trost auch, dafs die Trübung des Geistes, welche ihn in den letzten Tagen überkam, ihn nicht schwer belastete, ja sogar willkommene Gedanken in ihm rege machte. Seine geliebte Mathematik war es, welche seinen schon müden Geist immer noch munter erhielt und mit ihren Problemen beschäftigte, bis er zuletzt sanft und selig hinüberschlummerte in ein besseres Jenseits.

Das letzte öffentliche Zeugnis von der Verehrung und Liebe, welche er genossen, legte das Gefolge ab, welches seine irdischen Überreste zur letzten Ruhe geleitete, um sie in kühler Erde zu betten. Am offenen Grabe fand in den Herzen der Hunderte von Leidtragenden lauten Widerhall das Wort: Die Lehrer werden leuchten wie des Himmels Glanz, und die, so viele zur Gerechtigkeit weisen, wie die Sterne immer und ewiglich.

Breslau. Dr. Pasch.

NB. Die übrigen Nekrologe (Gronau, Luther) mufsten wegen Raummangel fürs nächste Heft zurückgelegt werden; ihnen werden sich dann noch einige andere anreihen.

Antwortkasten.

Nr. 47 (Heft 7, S. 558). Die gesuchte Zusammenstellung findet sich in dem grofsartigen „Kanon der Finsternisse“ v. Theod. v. Oppolzer, enthaltend sämtliche Sonnen- und Mondfinsternisse zwischen den Jahren 1207 v. Chr. bis 2167 n. Chr., für erstere auch die Zeiten der Totalität auf einer grofsen Anzahl von Karten gebend. (Der Druck dieses litterarischen Denkmals gröfsten Stiles war bis auf wenige Bogen vollendet, als der Verfasser am 26. Dez. 1886 einem akuten Herzleiden erlag.)

Dr. A.

Berichtigung.

In Heft 5, S. 399 Z. 10 v. u. mufs es heifsen Grofsherzogtum Hessen, statt Rheinhessen.

Bei der Redaktion eingelaufen.

Bücher:

A) Mathematik.

Bretschneider, Lehr- u. Übungsbuch d. allgem. {Arithmetik u. Algebra. I. T. Stuttg., J. Maier. 1887.

Breuer, Konstruktive Geometrie d. Kegelschnitte, auf Grund der Fokaleigenschaften. Prag, Selbstverlag d. V. 1887.

Heger, Einführung in d. Kegelschnitte. Breslau, Trewendt. 1887.

Brockmann, Tabelle zur christlichen und jüdischen Chronologie. Verl. d. d. Heimat, Konstanz-Kreuzlingen. 1887.

Hofmann (Fritz), Methodik d. stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemannschen Flächen. Ein Übungsbuch für den geometr. Teil der Funktionentheorie. Halle, Nebert. 1888.

Schweder, Lehrbuch d. Planimetrie. 4. Aufl. Riga, Kymmel. 1887.

Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes der Geraden und der Ebene. Systematisch und kritisch behandelt. Leipzig, Teubner. 1887.
Harnack, Die Grundlagen der Theorie des Logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion in d. Ebene. Leipzig, ib. 1887.

B) Naturwissenschaft (inclus. Geographie).

Mascart-Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Autorisierte deutsche Übersetzung. II. Bd. Berlin, Springer. 1888.
Keller, Grundlehren d. Zoologie f. d. öffentl. u. privaten Unterr. 2. (umgearb.) Aufl. Leipzig, Winter. 1887.
Clebsch-Kurz, Principien der mathematischen Optik (herausgegeb. von Kurz). Augsburg, Rieger. 1887.
Simon, Physik für Volks- und Mittelschulen. 4. Aufl. Berlin, Klemann. 1887.
Lehmann, Vorlesungen über Hülfsmittel und Methode des geographischen Unterrichts. Heft 4. Halle a/S., Tausch-Grofse. 1887.
v. Urbanitzky, Die Elektricität des Himmels und der Erde. Wien, Hartleben 1887.

C) Anderweitige Schriften:

Kehrbach, Monumenta Germaniae Paedagogica. Schulordnungen, Schulbücher und pädagogische Miscellaneen aus den Landen deutscher Zunge. Bd. III. Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. Bearb. von Dr. S. Günther i. München. Berlin, Hofmann u. C. 1887.
Zeitschriften, Programme und Abdrücke:
Nouv. Ann. III. Oktob.-Heft 1887. — Annals of Mathematics, Aug.-Heft 1887. — Central-Org. f. d. R.-W. XV, 9. 10. — Paed. Arch. XXIX, 9. — Ztschr. f. d. R.-W. XII, 9. — Ztschr. f. Schulgeogr. VIII, 11. 12. — Ztschr. f. d. physikalischen u. chemischen Unterricht (neu). I. Jahrg. Heft 1—2. Berlin, Springer. 1887.
Schumacher, Zur Theorie der biquadratischen Gleichungen (Progr. Gymn. Schweinfurt. 1887).
Schneider. Das Klima von Bremen (Progr. Bremen R. Altst.).
Baer, Erfinder des Lullinschen Versuches (geschichtl.) Progr. R.-G. Karlsruhe. 1887.
Abdrücke: Handl, Genauere Bestimmung des spezif. Gewichts (Exners Repert. d. Physik).
Hofmann, Die synthet. Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes Grunert A. T. V).

(Fortsetzung im nächsten Jahrg.)

Briefkasten (eingelaufene Beiträge).

A. Besonderer.

R. i. P. Konstruktion von Tangenten an einige höhere Kurven mittelst Kegelschnitte. Wir bitten dringend um einen Umschlag mit Aufschrift zu den Manuskripten. Warum wird dieses Gesuch immer wieder nicht berücksichtigt? — **H. i. Br.** Sie haben zwar schon brieflich unsere Meinung gehört, aber wir möchten Ihnen — und damit zugleich manchen andern — nochmals einschärfen, dafs es sich nicht mehr handelt um die Notwendigkeit des (in Sachsen längst, in Preufsen leider zu spät ein-

geführten) propädeutisch-geometr. Unterrichts (i. Quinta), sondern um die Methode und den Umfang desselben, ganz besonders aber um die Grenzlinie des vorwissenschaftlichen (sogen. propädeutischen) und des reinwissenschaftlichen Unterrichts. Die Bestimmung dieser Grenzlinie muſs nach festen, möglichst allseitig anerkannten Prinzipien erfolgen. Eine gründliche Arbeit über diese Grenzlinie in d. Z. wäre allerdings nicht unerwünscht. Auch scheint uns die Frage, ob nicht die wissenschaftliche Geometrie erst in Tertia anzufangen sei, noch diskutierbar. — **O. i. L.** Hülfsmittel zur Veranschaulichung beim geometrischen Unterricht. Warum schreiben Sie denn nicht unter der verlangten Adresse „An die Redaktion etc.“? Und warum keinen — wie ebenfalls schon oft erbeten — Umschlag m. Aufschr. zum Manuskr.? Wenn wir, wie Sie wünschen, jedem Verfasser eines eingesandten Artikels ein „Urteil über seinen Beitrag“ senden wollten, so müſsten wir, mit Homer zu reden, ein *ἄυπνος ἀνήρ* sein. — **E. i. W.** Letzten Beitrag z. A.-R. erhalten. Es ist Ihnen unter den gegebenen Verhältnissen nicht zu verdenken, wenn Sie sich zur Ruhe zurückziehen wollen. — **St. i. D.** Wir müssen sehr bedauern, daſs Sie sich durch diese unwichtige Sache zu solchen Umständlichkeiten (Punkt 1 bis 8) hinreiſsen lieſsen. Ihr Wunsch ist ja nun erfüllt. Pk. doch wohl angekommen? — **S. i. B.** Zum Unterricht in d. Trigonometrie. Sie müssen zehn Abzüge erhalten. — **Th. i. P.** Nochmals „die Teilung d. ph. U.“ Daſs man anfängt, dem „physikalischen“ Unterrichte, der nach Ihrer Ansicht hinter dem chemischen und naturgeschichtlichen zurückgeblieben ist, mehr Aufmerksamkeit und Fleiſs zuzuwenden, das bezeugen mehrere recht gute neue Lehrbücher und neugegründete Zeitschriften für physikalischen Unterricht (Lisser-Benecke und Mach-Schwalbe Poske). — **H. i. L.** Wir haben die neue sächs. Prüfungsordnung für Kandidaten d. höheren Schulamts noch nicht zu Gesicht bekommen, haben aber die darin von Preuſsen adoptierte Einrichtung der sogen. *„Facultas“* (zu deutsch doch wohl „Lehrbefähigung“) für verschiedene Klassen schon scharf verurteilen hören, da dieselbe viele Nachteile mit sich führe, insofern sie sich nur auf reines Wissen (Gelehrtheit), nicht auf pädagog. Lehrgeschick stütze. Die *„Facultas“*, in einer höheren Klasse Unterricht zu erteilen, kann auch durch Übung und Fortbildung erworben werden. Wir werden uns hierüber in einem besonderen Art. aussprechen. — **A. i. C., St. i. Pr., Sch. i. H.** Progr.-Sch. von H.-N., Brand.-Pommern, Westfalen-Mecklenb. — **S. i. B.** „Vereinfachtes Verfahren etc.“ — **M. i. M.** Gedruckte Rezensionsausschnitte Ihrer Werke.

Für das Aufg.-Rep. waren beim Schluſs des Heftes noch eingelaufen: Auflösungen: Dietsch 714. 715. Drees 714—716. Hahn (Worms) 703. 705. 706. 720. Rulf 722. Schlegel Bem. zu 661. Treumann 723. Hodum-Staſsfurt 695. 696. 699. 705. 706. 708. 709. 713—716. 720. 722. Liebetruth (Zerbst) zwei neue Aufgaben.

B. Allgemeiner.

1) Wir richten an die Herren Verfasser, welche uns Bücher zur Besprechung zusenden lassen, wiederholt das Gesuch: uns wenigstens gut- (d. h. fest-) geheftete Exemplare durch die Herren Verleger zugehen zu lassen; womöglich auch beschnittene. Das Beschneiden der Bücher ist ja für den Buchbinder des Verlagsbuchhändlers eine geringe und kurze Arbeit, während das Aufschneiden für den Referenten zeitraubend ist.

2) Wir bitten die Herren, welche uns Rezensionen und Berichte schon sehr lange zugesagt haben, um Einsendung derselben.

665. Brocardscher Kreis. (Gestellt von Stoll XVIII_2, 132.) a) Die Senkrechten von den Mittelpunkten S_a, S_b, S_c der Seiten des Dreiecks ABC auf die entsprechenden Seiten von $A_1B_1C_1$ schneiden sich in einem Punkte T, der die Strecke RH' halbiert und mit N, Z und E in gerader Linie liegt. Auch T, F (Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises), S und W (Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel der neun Punkte) bilden eine gerade Linie und WT ist ein Durchmesser des Feuerbachschen Kreises. b) Die Geraden KF, DH' und NE schneiden sich in einem Punkte V, welcher der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ ist.

1. Beweis. a) Nach Nr. 604 XVIII_1, 35 liegt T mit N, Z, E in gerader Linie, und da E Schwerpunkt des Dreiecks $RH'N$ ist, so ist $NE:ET = 2:1$; da auch $AE:ES_a = 2:1$, so ist $S_aT \parallel AN$. Da nun $AN \perp B_1C_1$ (vrgl. Progr. des Friedr.-Wilh.-Realgymn. in Stettin 1887, § 94), so ist auch $S_aT \perp B_1C_1$. Entsprechendes gilt von S_bT und S_cT. — Da $RT = \frac{1}{2}RH'$, $HF = \frac{1}{2}HH'$, $NW = \frac{1}{2}NH'$ (vrgl. Nr. 395 u. 396; XV, 609 u. 611), so liegen T, F, W in einer Geraden, auf welcher auch S liegen mufs, da $DE:ES = HE:EF = 2:1$. Da nun HH' Mittellinie im $\triangle RH'N$ und $TW \parallel RN$ ist, so ist $TF = FW$; und da W auf dem Feuerbachschen Kreise liegt, so ist auch T ein Punkt desselben und TW ein Durchmesser.

b) Ist V der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$, so mufs auch die Gerade NZE, welche durch den Mittelpunkt Z des Umkreises und den Schwerpunkt E geht, durch V gehen und es ist $EV = 2EZ$. Da auch $DE = 2ES$ (vrgl. Progr. des Friedr.-Wilh.-Realgymn. in Stettin 1887, § 88) und $H'E = 2EH$ ist, so geht DH' ebenfalls durch V. Den Punkten N, H', R, T des Dreiecks ABC entsprechen im Dreieck $A_1B_1C_1$ die Punkte H, V, K, F; mithin $\triangle NH'R \sim HVK$, und da T Mittelpunkt von RH' ist, so ist auch F Mittelpunkt von VK. Die Gerade KF geht also durch V. — $HVH'K$ und $TVWK$ sind Parallelogramme.

Emmerich. Fuhrmann. Stegemann.

Zusatz. Es folgt auch $EV:EH = EH':EN$ oder $EV \cdot EN = EH \cdot EH'$, also liegen N, H, V, H' auf einem Kreise.

Fuhrmann.

2. Beweis. Die Koordinaten des Punktes T, welche man mit Hülfe der Gleichung von B_1C_1, der Gleichung einer durch den Mittelpunkt von B_1C_1 gehenden Geraden und der Bedingung, unter welcher diese Gerade senkrecht zu B_1C_1 steht, ermitteln kann, stimmen mit denen der Mitte von RH' überein, womit der erste Teil von a) bewiesen ist. Der Rest von a) ist ähnlich wie im 1. Beweise. Der erste Teil von b) läfst sich dadurch beweisen, dafs die Determinante, welche aus den betreffenden Koefficienten der Gleichung für KF, DH' und NE gebildet wird, verschwindet. Der Schlufs von b) ist ähnlich wie im 1. Beweise.

Stoll.

B. Neue Aufgaben.

713. (Verallgemeinerung von Nr. 591, XVII_8, 593.)

$$x(\alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha xyz) + a = 0 \, (1); \; y(\beta_1 z + \beta_2 x + \beta xyz) + b = 0 \, (2);$$
$$z(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma xyz) + c = 0 \, (3).$$

Emmerich (Mülheim a. d. Ruhr).

714. Gesucht wird das $n$te Glied der folgenden Reihe:

1, 3, 6, 10, 16, 24, 34, 46, 61, 79, 100, 124, 152, ⋯

Haag (Rottweil).

715. Zu beweisen, dafs

$$1 + \frac{1}{2}\binom{k+1}{1} + \frac{1}{4}\binom{k+2}{2} + \frac{1}{8}\binom{k+3}{3} + \cdots \text{ in inf.} = 2^{k+1} \text{ ist,}$$

wenn $\binom{k+1}{n}$ den $n$ten zum Exponenten $k+1$ gehörigen Binomialkoefficienten bedeutet. Grube (Schleswig).

716. Bezeichnet man mit $\sum(n^k)$ die Summe der $k$ten Potenzen aller Zahlen von 1 bis n, so ist für $n = \infty$. $\sum(n^k) = \frac{n^{k+1}}{k+1}$ (eine zur Berechnung von Trägheitsmomenten sehr brauchbare Regel). Z. B. $1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n^2}{2}$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n^3}{3}$ u. s. w.

Weber (Frankfurt a. M.).

717. Im regelmäfsigen nEck ist a) die Summe der Quadrate über sämtlichen Seiten und Diagonalen gleich n^2r^2 und b) das Produkt sämtlicher Seiten und Diagonalen gleich $\left(nr^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$, wo mit r der Radius des Umkreises bezeichnet wird.

Zimmermann (Eisenach).

718. Verteilt man die überall gleich dicht vorausgesetzte Masse einer dreiseitigen Pyramide in der Weise, dafs man nach jeder Ecke den zwanzigsten Teil derselben und den Rest nach dem Schwerpunkt bringt, so haben diese Massenpunkte für eine beliebige Achse dasselbe Trägheitsmoment wie der Körper. Frage: Welcher Bruch ist für $\frac{1}{20}$ einzuführen, wenn man statt der Pyramide ein Dreieck wählt? Weinmeister (Tharand).

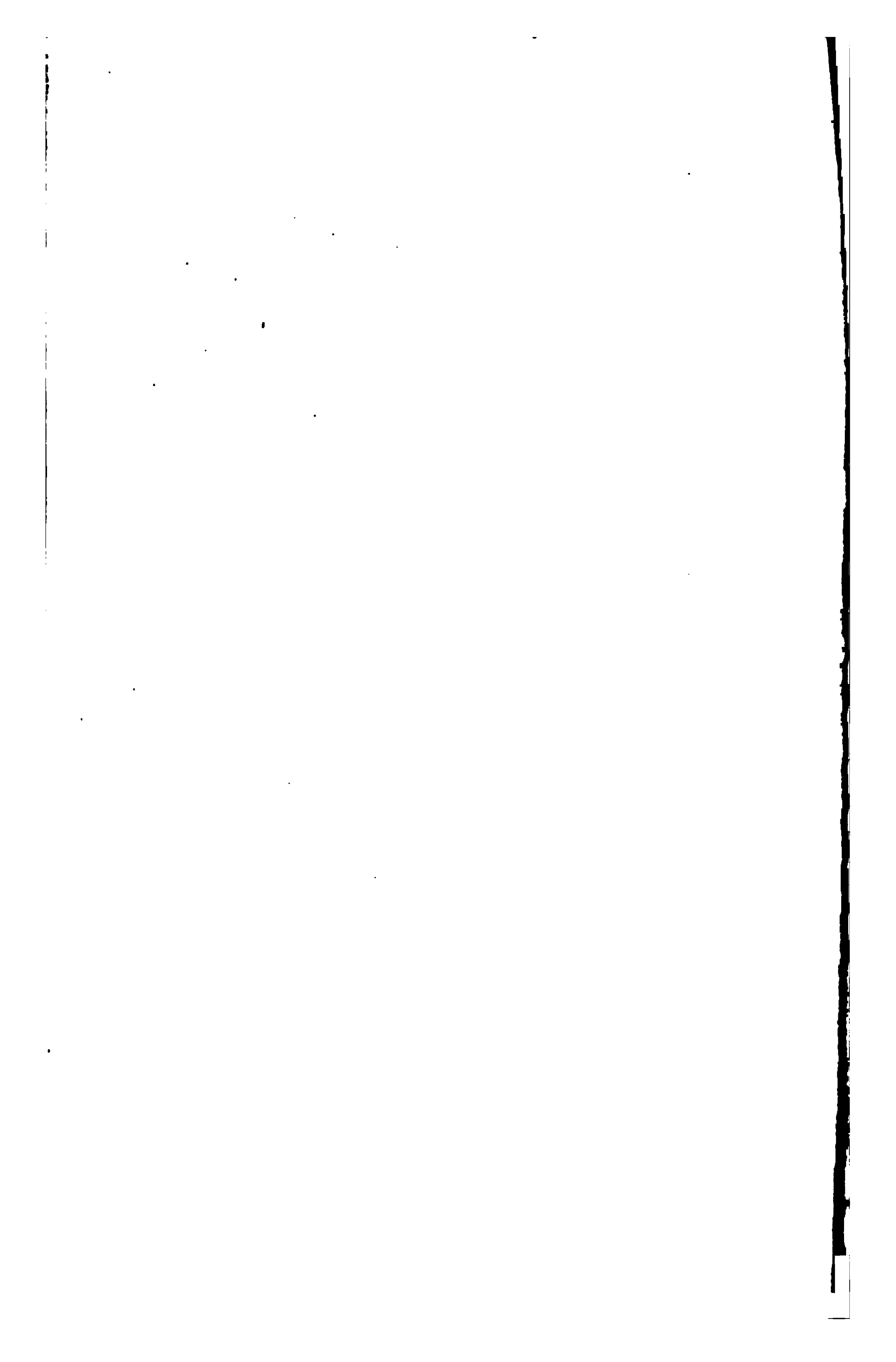
719. Das Trägheitsmoment eines regelmäfsigen Vielecks für eine durch den Mittelpunkt gehende und der Ebene angehörende Gerade ist von deren Richtung unabhängig. (Elementar d. h. ohne Central-Ellipsoid und analytische Geometrie zu beweisen.)

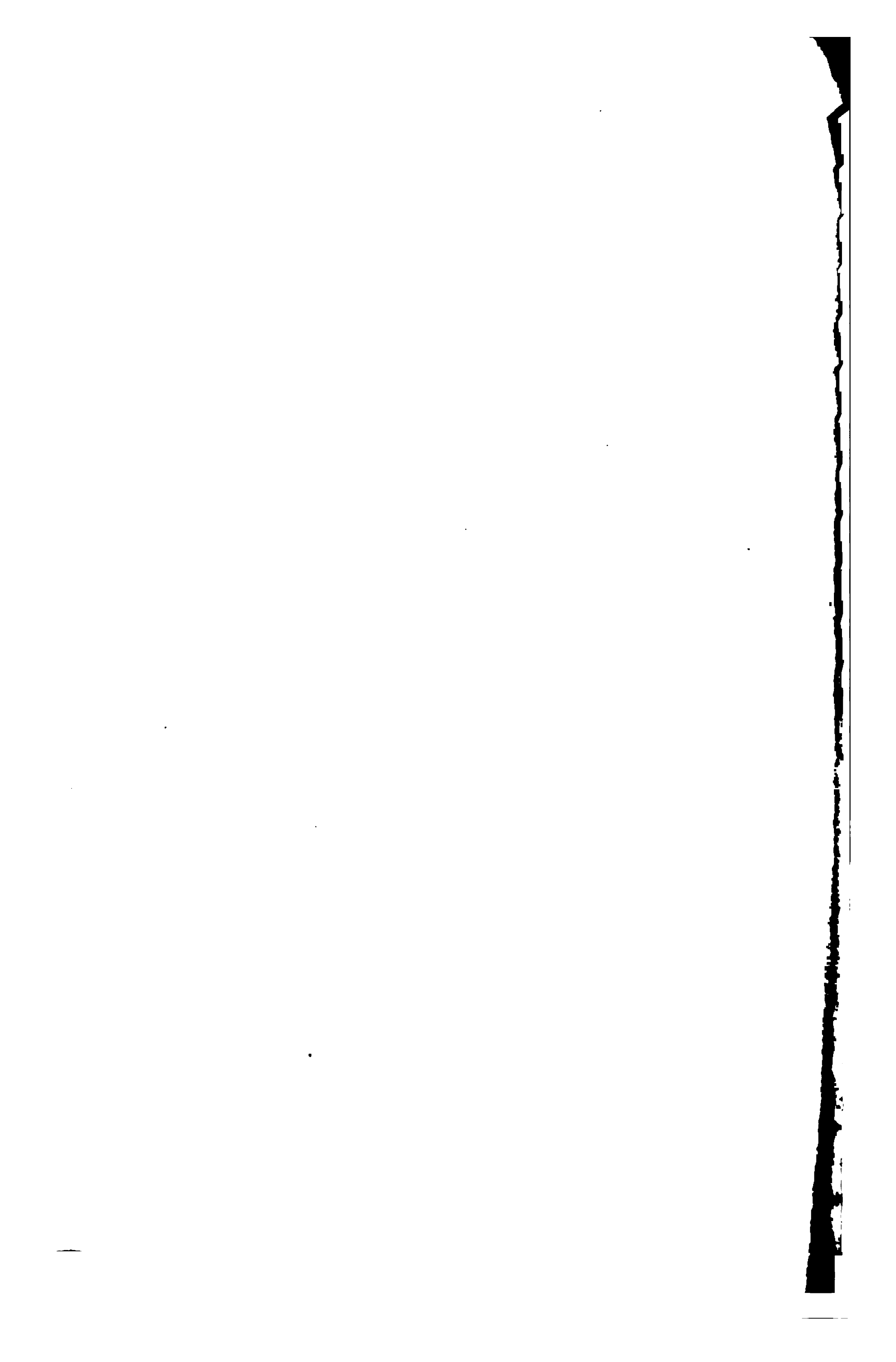
Weinmeister (Tharand).

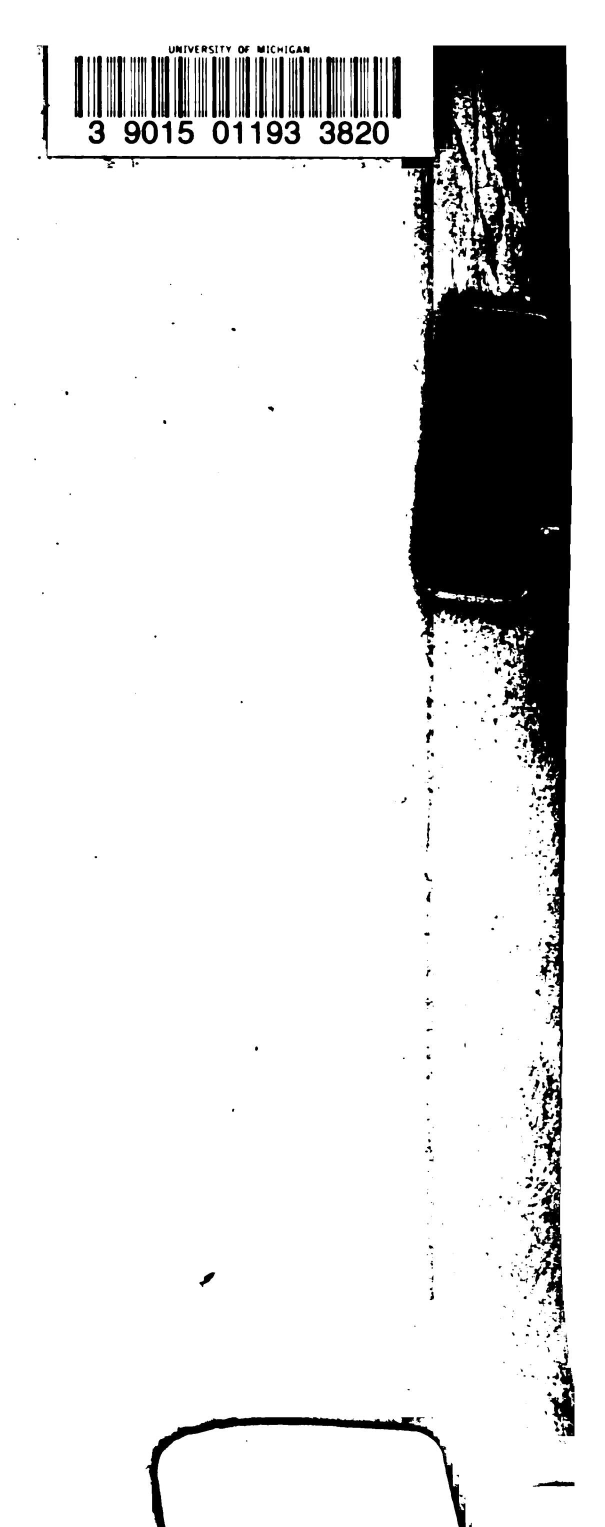
720. Werden die Winkel α, β, γ eines Dreiecks durch die Mittellinien geteilt in resp. α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2, so ist

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} + \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1 \sin\beta_2} + \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2} = 6(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma)$$
$$= 6 \cot\vartheta.$$

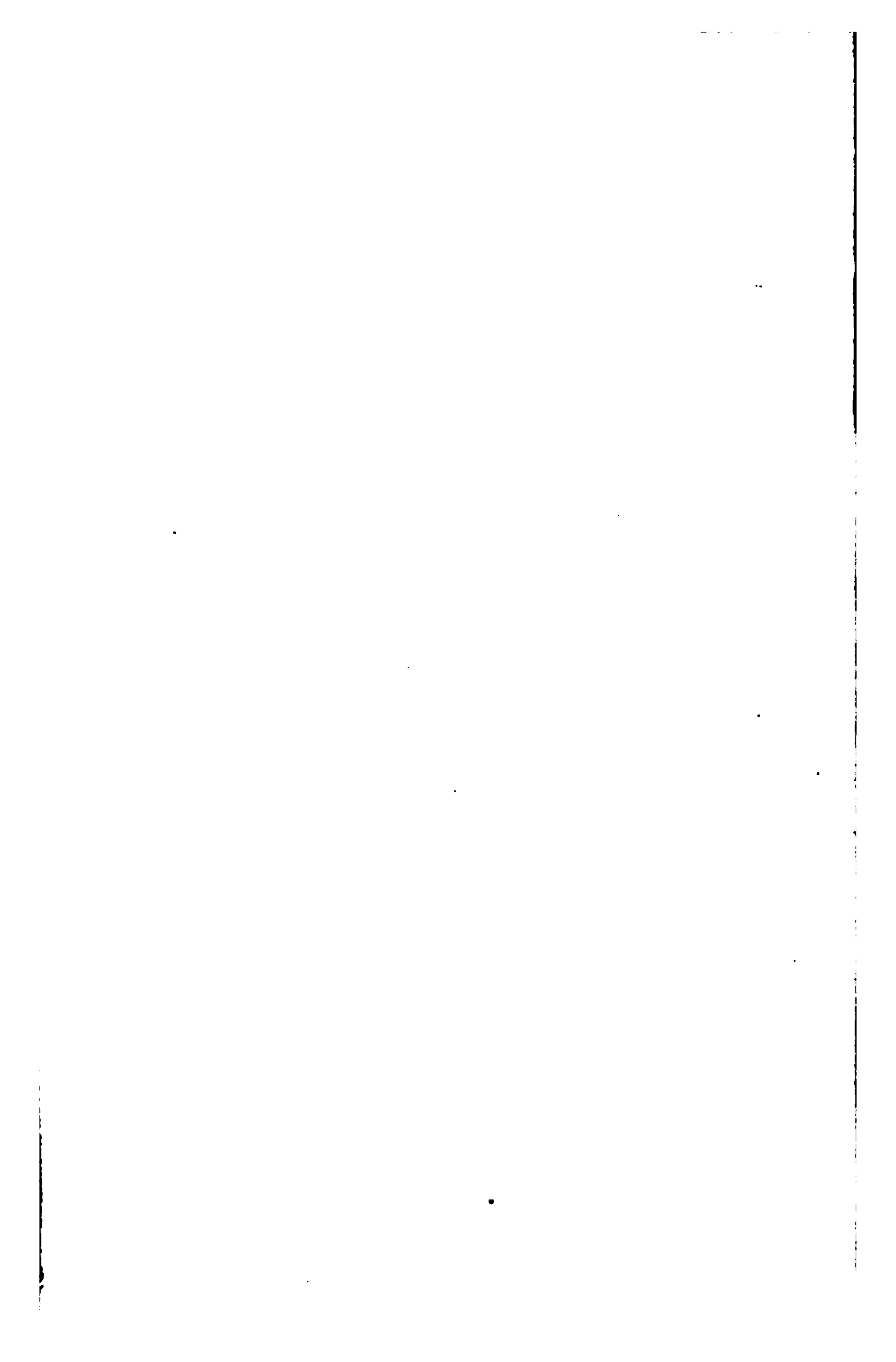
Fuhrmann (Königsberg i. Pr.).












UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 01193 3820

